4. *Zur Theorie des bewegten Spiegels. II;* *von A. Harnack.*

(Vgl. Ann. d. Phys. 39. p. 1053. 1912.)

§ 1. Einleitendes.

Wir stellen die Definitionen an die Spitze:

1. *Relativitätsprinzip erster Art.* Es gibt kein universelles Bezugssystem, auf das die Naturgesetze zu beziehen sind und gegen welches eine (absolute) Bewegung festgestellt werden könnte; vielmehr: Wird in einem Bezugssystem K eine die physikalischen Vorgänge regelnde Gesetzmäßigkeit festgestellt, so gilt in einem relativ zu K in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen System K' die gleiche Gesetzmäßigkeit.

2. *Relativitätsprinzip zweiter Art.* Es gibt kein universelles Bezugssystem, auf das die Naturgesetze zu beziehen sind und gegen welches eine (absolute) Bewegung festgestellt werden könnte; vielmehr: Wird in einem System K eine die physikalischen Vorgänge regelnde Gesetzmäßigkeit festgestellt, so gilt in einem relativ zu K in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen System K' die gleiche Gesetzmäßigkeit, *jedoch nur dann*, wenn alle den in Betracht gezogenen physikalischen Vorgang beeinflussende Körper jetzt im System K' dieselben Geschwindigkeiten haben, wie erst im System K .

Hervorzuheben ist, daß das Relativitätsprinzip erster Art viel mehr besagt, als das der zweiten; beide aber, obgleich wesentlich voneinander verschieden, sind mit dem Ergebnis des berühmten Michelsonschen Versuchs in Einklang. Man sieht auch unmittelbar, die Gleichungen der Mechanik genügen dem Relativitätsprinzip erster Art. Wie steht es nun mit der Optik? Die Einsteinsche Relativitätstheorie versucht dieses auch für die optischen Erscheinungen zu postulieren. Sie geht hierbei zunächst aus von dem einfachsten optischen Vorgang: der Lichtausbreitung im Vakuum, deren allgemeinste Formulierung die Wellengleichung ist:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

sie verlangt also, daß diese Gleichung invariant ist gegenüber einer gleichförmigen Translationsbewegung des Bezugssystems. Auf diese Weise ergeben sich bekanntlich direkt die Transformationsgleichungen der Relativitätstheorie:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Geht also das System K' mittelst dieser Gleichungen aus K hervor, so geht in beiden Systemen in ganz gleicher Weise die Lichtausbreitung vor sich, keines ist vor dem anderen irgendwie ausgezeichnet oder verschieden. Mithin ist das Relativitätsprinzip erster Art erfüllt. (Allerdings nur unter Heranziehung der Kontraktionshypothese und der Zulassung einer veränderten Zeit im System K' .)

Indessen muß man bedenken, daß jeder wirkliche, individuelle Vorgang der Lichtausbreitung nicht eigentlich durch die Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

sondern durch eine *Lösung* derselben dargestellt wird. Nehmen wir etwa an, im System K werden zwei in entgegengesetzte Richtung laufende Wellen von der Frequenz ν_1 und ν_2 beobachtet:

$$\varphi_1 = \sin 2\pi \nu_1 \left(t - \frac{x}{c}\right); \quad \varphi_2 = \sin 2\pi \nu_2 \left(t + \frac{x}{c}\right);$$

die obigen Transformationsgleichungen liefern für das System K' die Frequenzen

$$\nu_1' = \nu_1 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}; \quad \nu_2' = \nu_2 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Ist also im System K beobachtet worden $\nu_1 = \nu_2$, so würde sich für die entsprechenden Frequenzen im System K' eine andere Relation ergeben:

$$\nu_1' = \nu_2' \frac{1 - \beta}{1 + \beta}.$$

Es zeigt sich also schon hier, daß die beiden Systeme K und K' — was z. B. die Frequenzen des Lichts anbelangt — nicht vollständig gleichberechtigt sind, mithin das Relativitäts-

prinzip erster Art nicht mehr gültig ist, ja überhaupt gar keine Möglichkeit besteht, durch irgendwelche Zusatzannahmen demselben zu genügen. Hier liegt eine nicht wegzuleugnende Schwierigkeit, die die Relativitätstheorie nur dadurch beheben kann, daß sie jetzt auf das Relativitätsprinzip zweiter Art zurückgreift. Dieses verlangt ja weniger: nämlich eine Äquivalenz von K und K' nur dann, wenn sämtliche mitwirkende Körper bezüglich K' denselben Bewegungszustand haben, wie vorher bezüglich K . Dies ist aber in unserem obigen Beispiel nicht der Fall, da wir nämlich die Lichtquellen in Betracht zu ziehen haben.

Das Resultat unserer Überlegungen¹⁾ ist also dieses:

Die Relativitätstheorie postuliert zunächst das Relativitätsprinzip erster Art auch für die Optik. Es gelingt jedoch dasselbe nur für die Lichtausbreitung, unter Abstraktion von allem übrigen, beizubehalten; für alle weiteren optischen Vorgänge muß auch die Relativitätstheorie sich auf das Relativitätsprinzip zweiter Art beschränken.

Ist die Sachlage aber eine derartige, so drängt sich sofort die Frage auf, wozu überhaupt erst es mit dem Relativitätsprinzip erster Art versuchen, da doch eine vollständige Durchführung auf dieser Grundlage nicht möglich ist, warum nicht gleich von vornherein das Relativitätsprinzip zweiter Art als Ausgangspunkt wählen? — Tut man das, so gelangt man hinsichtlich der Lichtausbreitung zu dem Ergebnis: Die Lichtausbreitung erfolgt mit der konstanten Geschwindigkeit c in einem Bezugssystem, das bezüglich der Lichtquelle ruht. Wir werden also auch hier zu der Annahme einer „Mitführung“ des Lichtes durch die Lichtquelle geführt, wie sie schon vielfach diskutiert worden ist. Wird also die Lichtgeschwindigkeit durch die Bewegung der Lichtquelle beeinflusst, so liegt es nahe, zu fragen, ob nicht überhaupt alle Körper, mit denen das Licht in Wechselwirkung tritt, einen ähnlichen Einfluß besitzen. Als einfachstes und zugleich prinzipiell wichtigstes Beispiel ist der Vorgang der Reflexion an einem bewegten Spiegel anzusehen. Für diesen Fall sind nun schon ver-

1) Vorstehende Betrachtung erhebt nicht den Anspruch auf Vollständigkeit; eine erschöpfende Behandlung dieses Gegenstandes würde hier zu weit führen.

schiedentlich Annahmen gemacht worden über die Art und Weise, in der die Geschwindigkeit des reflektierten Strahles c' abgeändert ist gegenüber der Geschwindigkeit des einfallenden Lichtes¹⁾. Im nachfolgenden soll nun diese Frage von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus erörtert werden. Es wird sich zeigen, daß unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen eine Wirkung des Spiegels auf die Größe der Lichtgeschwindigkeit nicht angenommen werden kann. Selbstverständlich widerspricht dieses Resultat durchaus nicht der obigen Annahme einer solchen Wirkung durch die bewegte Lichtquelle. Im Gegenteil, die Einzigartigkeit der Lichtquelle in dieser Beziehung hat ohne Zweifel etwas sehr Einleuchtendes.

Zunächst werden wir das Problem des Spiegelbildes am bewegten Spiegel im Rahmen der üblichen Lichttheorie behandeln. Gewisse Schlußfolgerungen daraus werden uns in dem nachfolgenden Paragraphen zustatten kommen.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei hier ausdrücklich betont, daß Verfasser nicht etwa glaubt, im vorstehenden der Relativitätstheorie einen logischen Fehler nachgewiesen zu haben; aber er ist allerdings der Ansicht, daß die mitgeteilten Überlegungen einen gewissen nicht wegzuleugnenden Mangel an Einheitlichkeit in den Grundvoraussetzungen der Relativitätstheorie aufzuzeigen geeignet sind, der um so mehr Beachtung verdient, als die Anhänger der Relativitätstheorie die imponierende Geschlossenheit und ideale Einheitlichkeit derselben stets besonders hervorheben. In der bekannten Hertz'schen Terminologie könnte man etwa sagen, der vorstehend geltend gemachte Einwand richtet sich durchaus nicht gegen die „logische Zulässigkeit“ oder die „Richtigkeit“, wohl aber gegen die „Zweckmäßigkeit“ und „Einfachheit“ des „Bildes“, das die Relativitätstheorie liefert.

§ 2. Nachweis des Vorhandenseins eines Spiegelbildes für den Fall des bewegten Spiegels in der gewöhnlichen Lichttheorie.

In der gewöhnlichen Lichttheorie lassen sich die strengen Formeln für das Reflexionsgesetz am bewegten Spiegel leicht

1) R. C. Tolman, *Phys. Rev.* **31.** p. 26. 1910; **35.** p. 136. 1912; O. M. Stewart, *Phys. Rev.* **32.** p. 418. 1911; M. La Rosa, *Phys. Zeitschr.* **13.** p. 1130. 1912.

auf Grund des Huyghensschen Prinzips gewinnen, wie Verfasser kürzlich nachgewiesen hat.¹⁾ Der Übersichtlichkeit wegen seien die in Betracht kommenden Gleichungen vollständig hierher gesetzt: Ist ϑ der Einfallswinkel und ϑ' der Reflexionswinkel, so gilt, falls $v = c \cdot \beta$ die normale Spiegelgeschwindigkeit ist (positiv gerechnet in der Richtung auf die Lichtquelle zu)

$$(1) \quad \cos \vartheta' = \frac{2\beta + (1 + \beta^2) \cos \vartheta}{1 + 2\beta \cos \vartheta + \beta^2},$$

$$(1a) \quad \sin \vartheta' = \frac{(1 - \beta^2) \sin \vartheta}{1 + 2\beta \cos \vartheta + \beta^2}.$$

Die Frequenz des reflektierten Lichtes ergibt sich zu:

$$(2) \quad \nu' = \nu \cdot \frac{1 + 2\beta \cos \vartheta + \beta^2}{1 - \beta^2}.$$

Stellt man nun ganz allgemein die Frage nach dem Vorhandensein eines Spiegelbildes für den Fall des bewegten Spiegels (in Analogie zu dem des ruhenden), so heißt das Können die von einer in endlicher Entfernung vom bewegten Spiegel befindlichen ruhenden Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlen nach der Reflexion angesehen werden als herkommend von einer hinter dem Spiegel befindlichen fingierten Lichtquelle?

Diese Frage ist nun nicht damit beantwortet, daß man lediglich den Schnittpunkt der rückwärtigen Verlängerungen gewisser reflektierter Strahlen aufsucht.²⁾ Die Verhältnisse lassen sich am einfachsten an Hand der Figur darlegen (Fig. 1)

Von vornherein kann man sagen: Aus Symmetriegründen muß der gemeinsame Schnittpunkt der rückwärtigen Verlängerungen aller reflektierten Strahlen — falls ein solcher überhaupt vorhanden ist — auf der Symmetrieachse LL' liegen. Geht nun von der Lichtquelle L zur Zeit $t = 0$ eine Kugelwelle aus, so trifft diese zur Zeit $t = s_0/c$ zunächst im Punkte P_0 , zur Zeit $t = s_1/c$ im Punkte P_1 , zur Zeit $t = s_2/c$ im Punkte P_2 auf den Spiegel, der zu den entsprechenden Zeiten die bezüglichen Lagen S_0, S_1, S_2 innehat. Die von $P_0, P_1, P_2 \dots$ ausgehenden reflektierten Strahlen sind als zusammengehörige anzusehen. Soll ein gemeinsamer Schnitt-

1) A. Harnack, Ann. d. Phys. 39. p. 1053. 1912.

2) E. Kohl, Ann. d. Phys. 28. p. 284. 1909.

punkt ihrer rückwärtigen Verlängerungen vorhanden sein, so müssen die entsprechenden Achsenabschnitte (unter Berücksichtigung der jeweiligen Spiegellage) gleich sein, d. h.:

$$a_2' = a_1' + v t.$$

Nun ist

$$a_2 = a_1 - v t \quad \text{und} \quad a_1' = a_1 \frac{\operatorname{tg} \vartheta_1'}{\operatorname{tg} \vartheta_1}; \quad a_2' = a_2 \frac{\operatorname{tg} \vartheta_2'}{\operatorname{tg} \vartheta_2},$$

ferner

$$t = \frac{s_2 - s_1}{c} = \frac{1}{c} \left(\frac{a_2}{\cos \vartheta_2} - \frac{a_1}{\cos \vartheta_1} \right),$$

woraus folgt

$$v t = - \frac{a_1 \beta \cdot \left(\frac{1}{\cos \vartheta_2} - \frac{1}{\cos \vartheta_1} \right)}{1 + \frac{\beta}{\cos \vartheta_2}}.$$

$$L Q_1 = a_1; \quad L' Q_1 = a_1'; \quad L Q_2 = a_2; \\ L' Q_2 = a_2'.$$

Fig. 1.

Setzen wir nun $\vartheta_2 = \vartheta_1 + d\vartheta$ und gehen zur Grenze über, so erhalten wir (nach Fortlassung des Index) die Differentialgleichung

$$(3) \quad \frac{dF}{d\vartheta} - \frac{\beta \operatorname{tg} \vartheta}{\cos \vartheta + \beta} (1 + F) = 0,$$

wobei

$$F(\vartheta) = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta'}.$$

Diese Differentialgleichung spricht ganz allgemein die Forderung aus, daß alle *zusammengehörigen* reflektierten Strahlen mit ihren rückwärtigen Verlängerungen sich in einem Punkte schneiden, ohne daß schon auf irgendeine spezielle

Formulierung des Reflexionsgesetzes Bezug genommen worden ist. Jedes Reflexionsgesetz $\operatorname{tg} \vartheta' = \varphi(\vartheta)$ ergibt eine bestimmte Funktion

$$F = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\varphi(\vartheta)}$$

und nur wenn diese der gefundenen Differentialgleichung genügt, ist ein in obiger Weise definierter Schnittpunkt vorhanden.

Indessen ist diese Bedingung (obgleich notwendig) noch keineswegs hinreichend dafür, daß ein Spiegelbild existiert. Wir müssen weiterhin noch verlangen: auch in der Phase soll bei den reflektierten Strahlen alles so sein, als käme das Licht von dem Spiegelbilde L' . Es muß sonach noch die Relation erfüllt sein

$$s_2' - s_1' = c t.$$

Da nun

$$s_2' = \frac{a_2'}{\cos \vartheta_2'}, \quad s_1' = \frac{a_1'}{\cos \vartheta_1'},$$

so kommt nach einigen leichten Rechnungen und Übergang zur Grenze ($\vartheta_2 = \vartheta_1 + d\vartheta$)

$$(4) \quad \frac{d\chi}{d\vartheta} - \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\cos \vartheta + \beta}(1 + \beta\chi) = 0,$$

wobei

$$\chi(\vartheta) = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sin \vartheta'}.$$

Erst wenn auch diese Differentialgleichung erfüllt ist, können wir sagen, daß ein Spiegelbild im wahren Sinne des Wortes vorhanden ist.

Gehen wir nun zu dem speziellen Reflexionsgesetze über, wie es die Gleichungen (1) und (1a) aussprechen. Durch Einsetzen erhält man

$$(5) \quad F(\vartheta) = \frac{2\beta + (1 + \beta^2) \cos \vartheta}{(1 - \beta^2) \cos \vartheta},$$

$$(6) \quad \chi(\vartheta) = \frac{1 + 2\beta \cos \vartheta + \beta^2}{(1 - \beta^2) \cos \vartheta}.$$

Es läßt sich unschwer verifizieren, daß in der Tat diese beiden Funktionen F und χ den Differentialgleichungen (3) bzw. (4) genügen. Wir kommen also zu dem Schluß:

In der gewöhnlichen Lichttheorie ist auch im Falle des bewegten Spiegels ein Spiegelbild vorhanden.

Von Interesse ist die Lage des Spiegelbildes hinter dem Spiegel. Wir fassen einen Lichtstrahl von bestimmter Richtung ϑ ins Auge (Fig. 2), der von L

Fig. 2.

ausgehend zur Zeit $t=0$ in P_0 reflektiert wird. Seine rückwärtige Verlängerung schneidet die Achse in L' . Hier befand sich das Spiegelbild zu einer Zeit, die um s'_0/c zurückliegt. Sind also a und b die *gleichzeitigen* Abstände der Lichtquelle bzw. des Spiegelbildes vom Spiegel, so haben wir

$$a = a_0 + \beta s'_0 = a_0 \left(1 + \frac{\beta \operatorname{tg} \vartheta}{\sin \vartheta'} \right),$$

$$b = a'_0 - \beta s'_0 = a_0 \left(\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta'} - \frac{\beta \operatorname{tg} \vartheta}{\sin \vartheta'} \right).$$

Mittels (1) und (1a) erhält man dann

$$(7) \quad b = a \cdot \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}.$$

Der Abstand des Spiegelbildes vom Spiegel ist also stets kleiner als der entsprechende Abstand der Lichtquelle.

Fragen wir nun noch nach der Geschwindigkeit u , mit der das Spiegelbild sich relativ zur ruhenden Lichtquelle bewegt.

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß

$$-\frac{da}{dt} = v \quad \text{und} \quad u = -\frac{db}{dt} + v,$$

so daß aus (7) folgt

$$(7a) \quad u = \frac{2v}{1 + \beta^2}.$$

Ziehen wir nun noch die Frequenz des Lichtes in den Kreis der Betrachtung. Da sich das Spiegelbild bewegt, so können wir das Dopplersche Prinzip anwenden. Dieses ergibt für den Fall, daß eine Lichtquelle von der Frequenz ν^* sich mit einer Geschwindigkeit w auf den ruhenden Beobachter zu bewegt, als wahrgenommene Frequenz:

$$\nu' = \frac{\nu^*}{1 - \frac{w}{c}}.$$

Für einen in der Richtung ϑ' reflektierten Strahl haben wir demnach zu setzen

$$w = u \cos \vartheta' = \frac{2v \cos \vartheta'}{1 + \beta^2}.$$

Die wahrgenommene Frequenz ist also

$$\nu' = \nu^* \cdot \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \cdot \frac{1 + 2\beta \cos \vartheta + \beta^2}{1 - \beta^2}.$$

Soll diese Gleichung in Übereinstimmung sein mit (2), so ist anzunehmen

$$(8) \quad \nu^* = \nu \cdot \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}.$$

Dies ist die Frequenz, die der fingierten Lichtquelle zugeschrieben werden muß.

Die Resultate dieses Paragraphen lassen sich zusammenfassen in dem Satz: In der gewöhnlichen Lichttheorie ist auch im Falle des bewegten Spiegels ein Spiegelbild der Lichtquelle vorhanden; jedoch muß man ihm eine andere Frequenz (und zwar eine kleinere) zuschreiben, als die Lichtquelle selbst besitzt. Das Spiegelbild, das sich mit einer Geschwindigkeit kleiner als $2v$ bewegt, liegt dem Spiegel jederzeit näher als die Lichtquelle.

§ 3. Die verschiedenen Annahmen über eine Beeinflussung der Lichtgeschwindigkeit durch den bewegten Spiegel.

Wir verallgemeinern nun das Problem dahin, daß wir annehmen, ein Lichtstrahl habe infolge der Einwirkung des bewegten Spiegels nach der Reflexion eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c' = c \cdot f(\vartheta, \beta)$ als vorher.

Als Ausgangspunkt der nachfolgenden Betrachtungen wählen wir zwei sehr allgemeine Voraussetzungen über den Vorgang der Reflexion am bewegten Spiegel.

Voraussetzung I. Die Geschwindigkeit, mit der die Schnittgeraden der Wellenebenen und des Spiegels auf diesem fort-eilen, muß für das einfallende und für das reflektierte Licht die gleiche sein. Nur dann, wenn diese Gleichheit besteht, ist überhaupt die Reflexion am bewegten Spiegel ein stationärer Vorgang. Dies gibt uns auch die Berechtigung, an dieser Voraussetzung festzuhalten (die für den einfachen Fall, wo $c' = c$ ist, mit dem Huyghensschen Prinzip zusammenfällt).

Ist also V die Geschwindigkeit des Spiegels (sie falle in die Einfallsebene), deren Richtung gegen die innere Spiegelnormale den Winkel α bildet, so besagt die Voraussetzung I:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{oder} \\ \frac{c + V \cos(\vartheta + \alpha)}{\sin \vartheta} = \frac{c' - V \cos(\vartheta' - \alpha)}{\sin \vartheta'} \\ \frac{c + v \cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{c' - v \cos \vartheta'}{\sin \vartheta'}, \end{array} \right.$$

wenn v die Normalkomponente der Spiegelgeschwindigkeit bezeichnet.

Voraussetzung II. In Rücksicht auf die Stetigkeit ist zu verlangen: Die Gleichungen für den reflektierten Strahl und für die Geschwindigkeit c' müssen für den Grenzfall, daß der einfallende Lichtstrahl den sich von der Lichtquelle entfernenden Spiegel gerade nicht mehr erreicht, die ungestörte Fortpflanzung ergeben.

Ersetzt man also in den Relationen überall β durch $-\beta$, so verlangt Voraussetzung II

$$\text{für } \cos \vartheta = \beta,$$

soll sein

$$(10) \quad \cos \vartheta' = -\beta, \quad \vartheta' = \pi - \vartheta; \quad c' = c.$$

Auf Grund dieser zwei Voraussetzungen seien nun die verschiedenen Annahmen über eine Beeinflussung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes durch den bewegten Spiegel diskutiert.

Stewart¹⁾ nimmt an, die Geschwindigkeit des Lichtes nach der Reflexion sei eine derartige, als käme es von dem sich bewegendem Spiegelbilde. Er setzt also ohne weiteres die Existenz desselben voraus. Wir sahen jedoch oben, daß nur bei Erfüllung gewisser Bedingungen ein solches vorhanden ist.

Zunächst muß, ebenso wie in § 2, die Differentialgleichung (3) erfüllt sein:

$$(3) \quad \frac{dF}{d\vartheta} - \frac{\beta \operatorname{tg} \vartheta}{\cos \vartheta + \beta} (1 + F) = 0, \quad F(\vartheta) = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta'}.$$

Die Trennung der Variablen ist möglich und die Integration liefert als allgemeine Lösung:

1) l. c.

$$(11) \quad F(\vartheta) = \frac{2k(\cos \vartheta + \beta)}{(1 - \beta^2) \cos \vartheta} - 1 = \frac{2k\beta + (2k - 1 + \beta^2) \cos \vartheta}{(1 - \beta^2) \cos \vartheta},$$

wobei k die Integrationskonstante bezeichnet, die aber noch von β abhängen kann. An die Stelle der Gleichung (4) des § 2 würde hier in dem allgemeineren Falle, wo die Lichtgeschwindigkeit nach der Reflexion eine andere ist, eine wesentlich kompliziertere Gleichung zu treten haben. Wir wählen daher für unsere Beweisführung einen etwas anderen Weg. Setzen wir voraus, daß ein Spiegelbild vorhanden ist, so berechnet sich — ganz analog den Überlegungen des § 2 — mittels eines Strahles der Richtung ϑ der Abstand b des Spiegelbildes vom Spiegel gemäß Fig. 2:

$$(A) \quad a = a_0 + \frac{v}{c} s_0'; \quad b = a_0' - \frac{v}{c'} s_0',$$

also

$$(B) \quad \frac{b}{a} = \frac{\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta'} - \frac{v}{c'} \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sin \vartheta'}}{1 + \frac{v}{c'} \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sin \vartheta'}}.$$

Die Größe b/a muß aber gänzlich unabhängig davon sein, welchen Strahl wir zur Berechnung benutzen, ein jeder solcher muß den gleichen Wert liefern, d. h. es muß sein $b/a = \varphi(\beta)$ nur eine Funktion von β .

Nun haben wir aber

$$(C) \quad \operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{F(\vartheta)}$$

und nach Voraussetzung I (Gleichung (9))

$$(D) \quad \frac{c + v \cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{c' - v \cos \vartheta'}{\sin \vartheta'}$$

oder mittelst (C)

$$(E) \quad c' = c \cdot \frac{1 + \beta(1 + F) \cos \vartheta}{\sqrt{F^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}},$$

ferner ist die Funktion F in Gleichung (11) gegeben. Eliminieren wir nun mit Hilfe der Gleichungen (11), (C) und (E) die Größen ϑ' und c' in der Gleichung (B), so erhalten wir (die Rechnung, die ohne prinzipielle Schwierigkeiten ist, darf hier übergangen werden):

$$\varphi(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{p_0 + p_1 \cos \vartheta + p_2 \cos^2 \vartheta}{q_0 + q_1 \cos \vartheta + q_2 \cos^2 \vartheta},$$

also

$$(\varphi q_0 - p_0) + (\varphi q_1 - p_1) \cos \vartheta + (\varphi q_2 - p_2) \cos^2 \vartheta = 0.$$

Da nun diese Gleichung für jeden Wert von $\cos \vartheta$ identisch erfüllt sein muß, so sind die Koeffizienten gleich Null zu setzen, woraus sich (nach Elimination von $\varphi(\beta)$) *k* eindeutig bestimmt zu

$$k = 1.$$

Demzufolge wird Gleichung (11)

$$F(\vartheta) = \frac{2\beta + (1 + \beta^2) \cos \vartheta}{(1 - \beta^2) \cos \vartheta}.$$

Dies in Gleichung (E) eingeführt, ergibt $c' = c$, für jeden Wert von ϑ bzw. ϑ' .

Wir gelangen also zum Schlusse: Setzt man das Vorhandensein eines Spiegelbildes voraus, so macht man *damit* schon die endgültige Annahme, daß die Lichtgeschwindigkeit nach der Reflexion unbeeinflusst ist. Ganz allgemein kann man somit sagen: eine Hypothese über die „Mitführung“ des Lichtes durch den bewegten Spiegel darf nicht auf die Bewegung eines vermeintlichen Spiegelbildes basiert werden.

Wir lassen demnach die Annahme, daß ein Spiegelbild existiert, fallen, und können nunmehr nur an die Bewegung des Spiegels selbst anknüpfen. Es liegt nahe anzunehmen, der Spiegel teile dem reflektierten Lichte seine gesamte Bewegung mit. Die mathematische Formulierung hiervon würde sein (falls $\angle \alpha$ auf der entgegengesetzten Seite der Normalen liegt wie ϑ):

$$c' \sin \vartheta' = c \sin \vartheta + V \sin \alpha,$$

$$c' \cos \vartheta' = c \cos \vartheta + V \cos \alpha.$$

Wir wollen jedoch eine wesentlich allgemeinere Fassung wählen, die die vorstehende als Spezialfall umfaßt, und setzen:

$$(12) \quad c' \sin \vartheta' = c \sin \vartheta + \varepsilon V \sin \alpha,$$

$$(13) \quad c' \cos \vartheta' = c \cos \vartheta + \zeta V \cos \alpha.$$

Die Konstanten ε und ζ charakterisieren eine wesentlich verschiedene Wirkung der Normalkomponente und der Tangentialkomponente der Geschwindigkeit des Spiegels.

Die Größe ε bestimmt sich nun leicht aus folgender Überlegung:

Ist $\alpha = \pi/2$ d. h. nur eine Tangentialkomponente vorhanden, so ergibt Voraussetzung I (Gleichung (9), $v = 0$ zu setzen):

$$(14) \quad \frac{\sin \vartheta'}{\sin \vartheta} = \frac{c'}{c}$$

für den Einfallswinkel $\vartheta = \pi/2$ liefern die Gleichung (12) und (13) aber

$$(15) \quad \begin{cases} c' \sin \vartheta' = c + \varepsilon V \\ c' \cos \vartheta' = 0 \end{cases}$$

also $\vartheta' = \pi/2$, aus (14) folgt dann $c' = c$, aus (15) aber $c' = c + \varepsilon V$ danach muß sein $\varepsilon = 0$. Die Gleichungen (12) und (13) gehen dann über in

$$(12a) \quad c' \sin \vartheta' = c \sin \vartheta$$

$$(13a) \quad c' \cos \vartheta' = c \cos \vartheta + \zeta v.$$

Es bleibt noch die Bestimmung von ζ . Voraussetzung I ergibt nach Elimination von ϑ' mittels (12a) und (13a)

$$1 + \beta \cos \vartheta = \left(\frac{c'}{c}\right)^2 - \beta(\cos \vartheta + \zeta \beta)$$

eliminiert man auch noch c' so kommt:

$$(1 - \zeta)(2 \cos \vartheta + \zeta \beta) = 0$$

eine Gleichung die für jeden Wert von ϑ nur erfüllt ist, wenn $\zeta = 1$ so daß Gleichung (12a) und (13a) übergehen in

$$(12b) \quad c' \sin \vartheta' = c \sin \vartheta$$

$$(13b) \quad c' \cos \vartheta' = c \cos \vartheta + v.$$

Hiernach würde sich die Wirkung des Spiegels derart äußern, daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit dem Licht mitgeteilt wird, während die Tangentialkomponente ohne Einfluß bleibt. Eine solche Wirkungsweise würde z. B. das Resultat des von Tolman¹⁾ angestellten Versuches erklären können.

1) R. C. Tolman, Phys. Rev. 31. p. 34. 1910.

Es gilt aber noch die Voraussetzung II mit heranzuziehen. Aus (12b) und (13b) folgt (nachdem β durch $-\beta$ ersetzt ist)

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta - \beta} \quad \text{oder} \quad \cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta - \beta}{\sqrt{1 - 2\beta \cos \vartheta + \beta^2}}$$

für $\cos \vartheta = \beta$ ergibt sich so:

$$\cos \vartheta' = 0; \quad \vartheta' = \frac{\pi}{2}$$

was der Voraussetzung II widerspricht, die verlangt $\cos \vartheta' = -\beta$. Mithin ist auch der Wert $\zeta = 1$ nicht verträglich mit unseren Voraussetzungen.

Unser endgültiges Resultat lautet also:

Unter den anfangs hier eingeführten Bedingungen ist eine Beeinflussung der Lichtgeschwindigkeit durch den bewegten Spiegel unmöglich.

Hier sei nochmals auf den äußerst allgemeinen Charakter der Voraussetzungen I und II hingewiesen. Sie sprechen nur aus, daß die Reflexion am bewegten Spiegel ein stationärer Vorgang ist und nirgends Unstetigkeiten in der Verteilung der Strahlen auftreten, zwei Annahmen, die aufzugeben man sich wohl nur schwer entschließen dürfte.

Leipzig, Theoretisch-physikal. Institut der Universität,
30. Okt. 1913.

(Eingegangen 31. Oktober 1913.)