ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o 2620-21.

Ueber die säcularen Störungen in dem Problem der drei Körper, an einen Aufsatz in Nr. 2515-16 anknüpfend.

Von A. Weiler.

§ 1. Eine Correction der Störungsfunction.

Man erhält die Bahn der gestörten Masse, indem man die Störungen bestimmt, welche die Kepler'sche Bahn erleidet. Die Störungsfunction umfasst dann alle diejenigen Glieder der Differentialgleichungen, welche mit der störenden Masse multiplicirt sind. Wird aus dieser Störungsfunction ein Theilsatz ausgeschieden, und die neue Störungsfunction alsdann gleich Null gesetzt, so erhält man durch die Integration der Differentialgleichungen die intermediäre Bahn. Durch die Correction der Störungsfunction kann man bewirken, dass die Entwicklung der Störungsausdrücke für die intermediäre Bahn stärker convergirt als für die Kepler'sche. Bekanntlich ist die Störungsfunction von drei Veränderlichen abhängig, von den Leitstrahlen r und r_1 der gestörten Massen und von s , oder dem Cosinus des Winkels, welchen die Leitstrahlen mit einander bilden. In Nr. 2383 hat Herr Gylden die Correction der Störungsfunction als eine Function von r allein dargestellt, und die intermediäre Bahn nimmt die Gestalt einer Curve an, in welcher der Leitstrahl durch eine elliptische Function der Zeit ausgedrückt ist. Es scheint aber nicht, dass die Störungen der zweiten Ordnung, zu welchen diese intermediäre Bahn führt, numerisch kleiner sind als die Störungen der zweiten Ordnung einer elliptischen Bahn. Wenn aber eine stärkere Convergenz in der Entwicklung der Störungsausdrücke nicht gewonnen wird, so möchte auch ein Grund nicht vorhanden sein, diese verwickeltere Curve an die Stelle einer so einfachen zu setzen, wie es die Ellipse ist.

Soll der aus der Störungsfunction auszuschneidende Theilsatz eine Function von r allein sein, so kann man diese Function so wählen, dass die intermediäre Bahn, ungeachtet einer von der Kepler'schen Bahn abweichenden Gestalt doch eine Ellipse ist. Dies soll in dem vorliegenden § gezeigt werden.

Nimmt man den gemeinsamen Schwerpunkt des Centralkörpers, dessen Masse als Einheit gedacht wird, und der in der inneren Bahn sich bewegenden Masse, welche mit

$$V = \frac{\kappa m}{(1+m)^2} \frac{1}{r} + \frac{\kappa m m_1}{1+m} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2 r_1 r s + r^2}} + \frac{\kappa m_1}{1+m} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + 2 m r_1 r s + m^2 r^2}},$$

wo $\kappa = k : l^2$ gesetzt ist, und k den bekannten positiven Zahlenwerth ausdrückt, welcher lediglich von der Wahl der Maasseinheiten abhängt.

Nimmt man an, die Masse m_1 sei verschwindend, so geht die Kräftefunction über in:

Bd. II.

m bezeichnet ist, als Nullpunkt der Coordinaten an, so hat man zur Bestimmung der Leitstrahlen die beiden Gleichungen:

$$(1) \quad r r'' = \frac{n^2}{r^2} + \frac{r}{m} \frac{dV}{dr}, \quad r_1 r_1'' = \frac{n_1^2}{r_1^2} + \frac{r_1}{m_0} \frac{dV}{dr_1},$$

wo zur Abkürzung $m_0 = \frac{m_1}{1+m+m_1}$ gesetzt ist. Die Veränderlichen n und n_1 bezeichnen die Winkelgeschwindigkeiten der Leitstrahlen in den Ebenen der Bahnen. (Vergl. Nr. 2311 § 1, Nr. 2510 unter 2).

Um aus diesen Gleichungen die Leitstrahlen zu bestimmen, habe ich

$$(2) \quad \frac{\rho}{r} = 1 + e \cos v, \quad \frac{\rho_1}{r_1} = 1 + e_1 \cos v_1$$

gesetzt, und angenommen, dass e und e_1 beständig, dagegen ρ und ρ_1 veränderliche Grössen seien. Ferner habe ich zur Bestimmung von v und v_1 die Gleichungen angeschrieben:

$$(3) \quad v' = l(1 + e \cos v)^2, \quad v_1' = l_1(1 + e_1 \cos v_1)^2,$$

in welchen l und l_1 gleichfalls beständige Grössen sein sollen. Alsdann habe ich, um die Zahl der in den Gleichungen vorkommenden unbestimmten Beständigen um eine zu vermindern, eine reducirte Zeit eingeführt. Ich habe t an die Stelle des Productes lt gesetzt, und die Gleichungen (3) hiermit übergeführt in:

$$v' = (1 + e \cos v)^2, \quad v_1' = \lambda(1 + e_1 \cos v_1)^2,$$

wo zur Abkürzung $\lambda = \frac{l_1}{l}$ gesetzt ist. Damit den Veränderlichen n und n_1 die obige Bedeutung gewahrt bleibe, musste ich noch ln und ln_1 an die Stelle von n und n_1 setzen. Bezeichnet man ferner die Kräftefunction nicht mehr mit V , sondern mit $l^2 V$, so bleiben die Gleichungen (1) in ihrer Gestalt ungeändert, und die Kräftefunction ist:

$$V = \frac{\kappa m}{(1+m)^2} \frac{1}{r}.$$

In diesem Falle ist die innere Bahn eine ungestörte Ellipse, daher $\rho = \rho_0$. Die Gleichung zur Bestimmung des Leitstrahls geht dann über in:

$$r r'' = \frac{n_0^2}{r^2} - \frac{\kappa}{(1+m)^2} \frac{1}{r}.$$

Andererseits erhält man aus der Gleichung der Ellipse $\frac{p_0}{r} = 1 + e \cos v$ mit Rücksicht auf den oben gegebenen Werth v' die Differentialgleichungen:

$$r' = p_0 e \sin v, \quad r'' = p_0 e \cos v (1 + e \cos v)^2.$$

Durch die Elimination von v entsteht die Gleichung:

$$r r'' = \frac{p_0^4}{r^2} - \frac{p_0^3}{r},$$

welche identisch sein muss mit der vorstehenden. Aus der Identität folgt aber die weitere Gleichung:

$$\frac{\kappa}{(1+m)^2} = p_0^3,$$

durch welche der Coefficient l bestimmt ist, weil $l^2 \kappa = k$ ein gegebener Zahlenwerth ist.

Setzt man dagegen die Masse m als verschwindend voraus, so ist die Kräftefunction:

$$V = \frac{\kappa m_1}{r_1}.$$

In diesem Falle ist die äussere Bahn eine ungestörte Ellipse, daher $p_1 = p_{01}$. Die Gleichung zur Bestimmung des Leitstrahles r_1 geht über in:

$$r_1 r_1'' = \frac{n_{01}^2}{r_1^2} - \frac{\kappa m_1}{m_0 r_1}.$$

Andererseits ergeben sich aus der Gleichung der Ellipse die Differentialgleichungen:

$$r_1' = \lambda p_{01} e_1 \sin v_1, \quad r_1'' = \lambda^2 p_{01} e_1 \cos v_1 (1 + e_1 \cos v_1)^2,$$

und durch die Elimination von v_1 entsteht die Gleichung:

$$r_1 r_1'' = \frac{\lambda^2 p_{01}^4}{r_1^2} - \frac{\lambda^2 p_{01}^3}{r_1},$$

welche identisch sein muss mit der vorausgehenden. Aus der Identität folgt die weitere Gleichung:

$$\frac{m_1 \kappa}{m_0} = \lambda^2 p_{01}^3,$$

aus welcher der Coefficient $l_1 = \lambda l$ zu bestimmen ist.

Unter der Störungfunction kann man sich das Aggregat aller derjenigen Glieder der Kräftefunction denken, welche sowohl für $m_1 = 0$ als auch für $m = 0$ verschwinden. Um die Störungfunction Ω festzustellen, habe ich die folgende Gleichung angeschrieben:

$$V = \frac{\kappa m}{(1+m)^2} \frac{1}{r} + \frac{\kappa m_1}{r_1} + \Omega.$$

Ich erhalte demgemäss die Störungfunction:

$$\Omega = \frac{\kappa m m_1}{1+m} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2 r_1 r s + r^2}} + \frac{\kappa m_1}{1+m} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + 2 m r_1 r s + m^2 r^2}} - \frac{\kappa m_1}{r_1}.$$

Es sind vorhin die Gleichungen aufgestellt worden, aus welchen sich die Coefficienten l und l_1 für die ungestörten Ellipsen bestimmen. Geht man von der Voraussetzung aus, die Gleichungen zur Bestimmung dieser Coefficienten haben für die gestörten Ellipsen dieselbe Gestalt wie für die ungestörten, so ist damit nicht gesagt, dass in diesen Gleichungen die Grössen p_0 und p_{01} identisch seien mit den Parametern der ungestörten Ellipsen. Man hat sich vielmehr unter p_0 und p_{01} Functionen der Massen zu denken, welche erst dann mit den Parametern der ungestörten Ellipsen zusammenfallen, wenn die störenden Massen gleich Null gesetzt werden. Uebrigens schreibt sich nun die Kräftefunction in der folgenden Form:

$$V = \frac{m p_0^3}{r} + \frac{\lambda^2 m_0 p_{01}^3}{r_1} + \Omega,$$

worin die Störungfunction Ω den obigen Werth hat.

Bei weiterem Eingehen erweist sich indessen die obige Voraussetzung als eine zweckwidrige Beschränkung in der

Lösung des Problems. Denn für die gestörten Ellipsen darf man zur Bestimmung der Coefficienten l und l_1 auch die folgenden Gleichungen anschreiben:

$$\frac{\kappa}{(1+m)^2} = p_0^3 + f \frac{p_0}{m}, \quad \frac{\kappa m_1}{m_0} = \lambda^2 p_{01}^3 + f_1 \frac{p_{01}}{m_0},$$

in welchen f und f_1 unbestimmte Beständige sind. Denkt man sich, die Beständigen f und f_1 haben den Factor $m m_0$, so sind diese Gleichungen, wie es sein soll, identisch mit den oben für die ungestörten Ellipsen aufgestellten, sobald die störenden Massen gleich Null gesetzt werden. Bedient man sich zur Bestimmung von l und l_1 dieser allgemeinen Gleichungen, so hat man die Kräftefunction überzuführen in:

$$V = \frac{m p_0^3}{r} + \frac{\lambda^2 m_0 p_{01}^3}{r_1} + \Omega_1,$$

und die Störungfunction hat nun die folgende Gestalt:

$$\Omega_1 = f \frac{p_0}{r} + f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + \frac{\kappa m m_1}{1+m} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2 r_1 r s + r^2}} + \frac{\kappa m_1}{1+m} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + 2 m r_1 r s + m^2 r^2}} - \frac{\kappa m_1}{r_1}.$$

Die in Vorschlag gebrachte Correction der Störungsfunction ist also durch die folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\Omega_1 = f \frac{p_0}{r} + f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + \Omega.$$

Die neue Störungsfunction ist zwar weniger einfach als die ursprüngliche; aber sie enthält zwei unbestimmte Beständige, welche sich in solcher Art verwenden lassen, dass die ungestörte Ellipse einen engeren Anschluss an die gestörte Bahn ermöglicht als anfänglich.

Im Hinweis auf diese Correction der Störungsfunction ist in Nr. 2433 S. 135-137 ein Vorschlag gemacht worden zur Bestimmung der Beständigen f und f_1 . Es werden dort nur die von der Neigung der gestörten Bahnen zu einander unabhängigen Glieder der Störungsfunction in Betracht gezogen, und daher $-s = \cos(u-u_1)$ gesetzt. Die Beständigen f und f_1 haben sich dann so bestimmen lassen, dass in den drei Ausdrücken $\Omega \ r \frac{d\Omega}{dr} \ r_1 \frac{d\Omega}{dr_1}$ alle die nicht mit einer Excentricität multiplicirten Glieder verschwinden, wenn sie unabhängig sind von den Vielfachen des Winkels $u-u_1$. Hiermit ist nun zwar eine Vereinfachung der Störungsgleichungen gegeben; allein die Beständigen f und f_1 lassen eine andere Verwendung zu, welche der Entwicklung der Störungen dienlicher ist als die erwähnte. Zur Bestimmung der veränderlichen Parameter der Ellipsen sind bekanntlich die Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{p_0^2} - 1 &= 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v) \\ \frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 &= 2 \frac{p_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1). \end{aligned}$$

Nun kann man aber die Beständigen f und f_1 so angeben, dass alle die nicht mit einer Excentricität multiplicirten Glieder der Veränderlichen $k \ h \ k_1 \ h_1$ verschwinden, wenn dieselben aus den von den Vielfachen der Winkel u und u_1 unabhängigen Gliedern der Störungsfunction ihren Ursprung nehmen.

§ 2.

Bestimmung der Beständigen $f \ f_1 \ q_0 \ q_{01}$.

Man erhält die neuen Störungsgleichungen, welche durch die Correction der Störungsfunction entstehen, indem man in die ursprünglichen Störungsgleichungen Ω_1 an die Stelle von Ω setzt. Denn in den beiden Fällen ist die Störungsfunction gleichbedeutend mit der Differenz:

$$V - \frac{m p_0^2}{r} - \frac{\lambda^2 m_0 p_{01}^3}{r_1},$$

in welcher V die Kräftefunction bezeichnet. Was sich neben der Störungsfunction in den Störungsgleichungen sonst noch geändert hat, das ist die Bedeutung der Coefficienten l und l_1 , über welche der § 1 Aufschluss giebt.

Den Parameter der inneren Bahn erhält man aus der Gleichung:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v),$$

und zur Bestimmung von k und h hat man die Störungsgleichungen:

$$(2) \quad -m p_0^2 k' = \frac{r}{\rho} \sin v \left(r \frac{d\Omega_1}{dr} + q + P \right)$$

$$(3) \quad m p_0^2 h' = \frac{r}{\rho} \cos v \left(r \frac{d\Omega_1}{dr} + q + P \right)$$

In denselben ist P ein Glied der zweiten Ordnung, q dagegen ein Glied der ersten Ordnung, zu dessen Bestimmung die Störungsgleichung:

$$(1) \quad \frac{1}{2} q' = \frac{d\Omega_1}{dr} r' + \frac{d\Omega_1}{ds} \frac{ds}{du} \frac{n}{r^2}$$

vorliegt. Man kann sich zur Bestimmung von q auch des Integrals der lebendigen Kraft bedienen:

$$q + q_1 = 2\Omega_1 - 2b,$$

worin $2b$ die Integrationsbeständige ist. Man muss dann aber die Veränderliche q_1 aus der Störungsgleichung:

$$(1') \quad \frac{1}{2} q_1' = \frac{d\Omega_1}{dr_1} r_1' + \frac{d\Omega_1}{ds} \frac{ds}{du_1} \frac{n_1}{r_1^2}$$

bestimmen. Die Störungsgleichung (1') hat einen Vorzug vor der Störungsgleichung (1), weil in der ersteren alle Glieder den Factor λ haben, welcher stets < 1 ist, während die Glieder der Gleichung (1) diesen Factor nicht haben.

Die Bewegung der Apsidenlinie habe ich mit w bezeichnet, und erhalte dieselbe aus der Gleichung:

$$w + \left(\frac{p}{r} + 1 \right) (k \sin v - h \cos v) - h e = \omega.$$

Zur Bestimmung der Veränderlichen ω aber ist die folgende Störungsgleichung gegeben:

$$(4) \quad -m p_0^2 (\omega' + \cos i \vartheta') = 2 r \frac{d\Omega_1}{dr} + \frac{3}{2} q + P + N,$$

in welcher P und N vorläufig als Glieder der zweiten Ordnung angesehen werden können. Diese Aufzeichnungen sind einem Aufsatze in Nr. 2510 unter 4, 5, 7 entnommen.

Ich werde nun die Veränderliche Ω_1 in diesen Störungsgleichungen doch wieder durch die Veränderliche Ω ersetzen, weil die letztere eine einfachere Function von $r_1 \ r \ s$ ist als Ω_1 . Aus der Gleichung:

$$\Omega_1 = f \frac{p_0}{r} + f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + \Omega$$

erhält man durch Differentiation:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_1}{dr} r' &= -f \frac{p_0 r'}{r^2} + \frac{d\Omega}{dr} r' \\ \frac{d\Omega_1}{dr_1} r_1' &= -f_1 \frac{p_{01} r_1'}{r_1^2} + \frac{d\Omega}{dr_1} r_1' \\ r \frac{d\Omega_1}{dr} &= -f_1 \frac{p_0}{r} + r \frac{d\Omega}{dr}.\end{aligned}$$

Führt man nun anstatt der Differenzen $q - 2f \frac{p_0}{r}$ und $q_1 - 2f_1 \frac{p_{01}}{r_1}$ zwei neue Veränderliche q und q_1 ein, so geht das Integral der lebendigen Kraft über in:

$$q + q_1 = 2\Omega - 2b.$$

Die neuen Veränderlichen q und q_1 bestimmen sich wieder aus den ursprünglichen Differentialgleichungen, welche der Annahme $f = 0$, $f_1 = 0$ entsprechen. Es ist:

$$(4) \quad -m p_0^2 (\omega' + \cos i \vartheta') = f \frac{p_0}{r} + 2r \frac{d\Omega}{dr} + \frac{3}{2} q + P + N.$$

Zum Behuf der Integration sollen alle Störungsglieder nach den Vielfachen von ε und v_1 entwickelt werden. Ich schreibe daher die Störungsgleichungen:

$$(2) \quad -m p_0^2 k' = \frac{\sin \varepsilon}{\sqrt{1-e^2}} \left(f \frac{p_0}{r} + r \frac{d\Omega}{dr} + q + P \right)$$

$$(3) \quad m p_0^2 h' = \frac{\cos \varepsilon - e}{1-e^2} \left(f \frac{p_0}{r} + r \frac{d\Omega}{dr} + q + P \right)$$

Eliminirt man die Veränderliche q vermittels des Integrals

$$(2) \quad -m p_0^2 k' = \frac{\sin \varepsilon}{(1-e^2)^2} \frac{r}{a} \left(f \frac{p_0}{r} + r \frac{d\Omega}{dr} + 2\Omega - 2b - q_1 + q_{01} + P \right) \varepsilon'$$

$$(3) \quad m p_0^2 h' = \frac{\cos \varepsilon - e}{(1-e^2)^{3/2}} \frac{r}{a} \left(f \frac{p_0}{r} + r \frac{d\Omega}{dr} + 2\Omega - 2b - q_1 + q_{01} + P \right) \varepsilon'.$$

Die überzählige Integrationsbeständige $2b$ soll bekanntlich so bestimmt werden, dass die der Zeit proportionalen Glieder in dem Integral der Gleichung (3) verschwinden. Ferner sollen durch die geeignete Wahl der Beständigen f alle die nicht mit einer Excentricität multiplicirten Glieder der Störungsgleichungen (2) und (3) verschwinden, wenn dieselben unabhängig von den Winkeln u und u_1 sind.

Indem man die Störungsglieder der zweiten Ordnung ausser Acht lässt, erhält man in den Klammern den Ausdruck

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} = (1 + e_1 \cos v_1)^{-2} = 1 - 2e_1 \cos v_1 + 3e_1^2 \cos^2 v_1 - 4e_1^3 \cos^3 v_1 + \dots$$

Die übrigen Glieder sind durch $\frac{p_1^2}{r_1^2}$ theilbar, und ich behalte daher den Ausdruck:

$$\left[f(1-e^2) - 2b \frac{r}{a} \right] (1 + e_1 \cos v_1)^{-2} + \frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r}{a} \left(r \frac{d\Omega}{dr} + 2\Omega - q_1 + q_{01} \right),$$

$$(1) \quad \frac{1}{2} q' = \frac{d\Omega}{dr} r' + \frac{d\Omega}{ds} \frac{ds}{du} \frac{n}{r^2}$$

$$(1') \quad \frac{1}{2} q_1' = \frac{d\Omega}{dr_1} r_1' + \frac{d\Omega}{ds} \frac{ds}{du_1} \frac{n_1}{r_1^2}$$

Mit Rücksicht auf das geänderte q gehen die Störungsgleichungen (2) und (3) über in:

$$(2) \quad -m p_0^2 k' = \frac{r}{p} \sin v \left(f \frac{p_0}{r} + r \frac{d\Omega}{dr} + q + P \right)$$

$$(3) \quad m p_0^2 h' = \frac{r}{p} \cos v \left(f \frac{p_0}{r} + r \frac{d\Omega}{dr} + q + P \right)$$

Die Störungsgleichung (4) aber erhält durch diese Transformationen die folgende Gestalt:

der lebendigen Kraft, welches zweckmässig die folgende Form erhält:

$$q + q_1 - q_{01} = 2\Omega - 2b,$$

indem man $2b - q_{01}$ anstatt $2b$ schreibt, und fügt man mit Rücksicht auf die partielle Integration sogleich den Factor

$$1 = \frac{1 - e \cos \varepsilon}{(1 - e^2)^{3/2}} \varepsilon' = \frac{\varepsilon'}{(1 - e^2)^{3/2}} \frac{r}{a}$$

bei, so hat man die Störungsgleichungen:

$$f(1-e^2) + \frac{r}{a} \left(\frac{d\Omega}{dr} + 2\Omega - 2b - q_1 + q_{01} \right),$$

welcher nach den Cosinus der Vielfachen von ε und v_1 entwickelt werden muss. Weil aber alle Störungsglieder den unentwickelten Factor $\frac{p_1^2}{r_1^2}$ behalten sollen, so theile ich diesen

Ausdruck durch $\frac{p_1^2}{r_1^2}$. Die Beständigen f und b erhalten hiermit den Factor:

in welchem nun alle Glieder die Form

$$A \cos(b w + b_1 w_1 + c \varepsilon + c_1 v_1)$$

haben. Bei der Bestimmung von b und f kommen aber nur diejenigen Glieder in Betracht, welche unabhängig von w und w_1 sind, welche also die Form $A \cos(c \varepsilon + c_1 v_1)$ haben. Man ordne diejenigen Glieder, in welchen $c_1 = 0$ ist, nach den Vielfachen von ε , und setze die beiden ersten Glieder dieser Entwicklung gleich Null. Man erhält hiermit die beiden Gleichungen, aus welchen die Beständigen b und f bestimmt werden müssen. Denn unter den Gliedern der Störungsgleichung (3) giebt es nun keine beständigen Glieder mehr. Es ist auch leicht ersichtlich, dass die von w und w_1 unabhängigen Glieder der Störungsgleichungen (2) und (3) jedenfalls mit einer Excentricität multiplicirt sind. Insbesondere haben dieselben, wenn sie Functionen von ε allein sind, den Factor e^2 . Sind dieselben Functionen von v_1 , so haben sie mindestens den Factor e_1 .

Den Parameter der äusseren Ellipse erhält man aus der Gleichung:

$$\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 = 2 \frac{p_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1).$$

$$(4') \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 (\omega_1' + \cos i_1 \vartheta') = 2 r_1 \frac{d\Omega_1}{dr_1} + \frac{3}{2} q_1 + P_1 + N_1,$$

in welcher P_1 und N_1 vorläufig als Glieder der zweiten Ordnung angesehen werden dürfen.

An die Stelle von Ω_1 setze ich nun wieder die Veränderliche Ω , mittelst der Gleichung:

$$\Omega_1 = f \frac{p_0}{r} + f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + \Omega.$$

Schon oben ist die Störungsgleichung (1') übergeführt worden in:

$$(2') \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 k_1' = \frac{r_1}{p_1} \sin v_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 + P_1 \right)$$

$$(3') \quad \lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = \frac{r_1}{p_1} \cos v_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 + P_1 \right).$$

Die Störungsgleichung (4') aber erhält durch diese Transformation die folgende Gestalt:

$$(4') \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 (\omega_1' + \cos i_1 \vartheta') = f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + 2 r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + \frac{3}{2} q_1 + P_1 + N_1.$$

Zum Behuf der Integration sollen alle Störungsglieder nach den Vielfachen von ε und v_1 entwickelt werden. Mit Rücksicht auf die partielle Integration nach ε schreibe ich daher die Störungsgleichungen (2') und (3') in der Form:

$$(2') \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 k_1' = \frac{\varepsilon'}{(1-e^2)^{3/2}} \frac{r}{a} \frac{r_1}{p_1} \sin v_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 + P_1 \right)$$

$$(3') \quad \lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = \frac{\varepsilon'}{(1-e^2)^{3/2}} \frac{r}{a} \frac{r_1}{p_1} \cos v_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 + P_1 \right).$$

und zur Bestimmung von k_1 und h_1 hat man die Störungsgleichungen:

$$(2') \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 k_1' = \frac{r_1}{p_1} \sin v_1 \left(r_1 \frac{d\Omega_1}{dr_1} + q_1 + P_1 \right)$$

$$(3') \quad \lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = \frac{r_1}{p_1} \cos v_1 \left(r_1 \frac{d\Omega_1}{dr_1} + q_1 + P_1 \right)$$

In denselben ist P_1 ein Glied der zweiten Ordnung; q_1 dagegen ein Glied der ersten Ordnung, zu dessen Bestimmung die Störungsgleichung:

$$(1') \quad \frac{1}{2} q_1' = \frac{d\Omega_1}{dr_1} r_1' + \frac{d\Omega_1}{ds} \frac{ds}{du} \frac{n_1}{r_1^2}$$

vorliegt. Die Bewegung des Perihels habe ich mit w_1 bezeichnet, und erhalte dieselbe aus der Gleichung:

$$w_1 + \left(\frac{p_1}{r_1} + 1 \right) (k_1 \sin v_1 - h_1 \cos v_1) - e_1 h_1 = \omega_1.$$

Zur Bestimmung von ω_1 aber hat sich die folgende Störungsgleichung ergeben:

$$(1') \quad \frac{1}{2} q_1' = \frac{d\Omega}{dr_1} r_1' + \frac{d\Omega}{ds} \frac{ds}{du} \frac{n_1}{r_1^2},$$

indem man anstatt der Differenz $q_1 - 2f_1 \frac{p_{01}}{r_1}$ eine neue Veränderliche q_1 eingeführt hat. Es ist ferner:

$$r_1 \frac{d\Omega_1}{dr_1} = -f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1}.$$

Die Störungsgleichungen (2') und (3') gehen daher mit Rücksicht auf den geänderten Werth q_1 über in:

Die überzählige Integrationsbeständige q_{01} soll bekanntlich so bestimmt werden, dass die der Zeit proportionalen Glieder in dem Integral der Gleichung (3') verschwinden. Ferner sollen durch die geeignete Wahl der Beständigen f_1 alle die nicht mit einer Excentricität multiplicirten Glieder der Störungsgleichungen (2') und (3') zum Verschwinden gebracht werden, wenn dieselben unabhängig sind von den Winkeln u und u_1 .

Lässt man die Störungsglieder der zweiten Ordnung ausser Acht, so hat man in den Klammern den Ausdruck:

$$(1 + e_1 \cos v_1)^{-2} = 1 - 2e_1 \cos v_1 + 3e_1^2 \cos^2 v_1 - 4e_1^3 \cos^3 v_1 + \dots$$

die Beständige q_{01} den Factor:

$$(1 + e_1 \cos v_1)^{-3} = 1 - 3e_1 \cos v_1 + 6e_1^2 \cos^2 v_1 - 10e_1^3 \cos^3 v_1 + \dots$$

In dem nun vorliegenden Ausdruck:

$$\frac{r}{a} [f_1 (1 + e_1 \cos v_1)^{-2} + q_{01} (1 + e_1 \cos v_1)^{-3}] + \frac{r}{a} \frac{r_1^3}{p_1^3} \left(r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 - q_{01} \right)$$

haben alle Glieder die Form $A \cos(bv + b_1 v_1 + c\varepsilon + c_1 v_1)$. Bei der Bestimmung von q_{01} und f_1 kommen aber nur diejenigen Glieder in Betracht, welche unabhängig von v und v_1 sind, welche also die Form $A \cos(c\varepsilon + c_1 v_1)$ haben. Man ordne diejenigen Glieder, in welchen $c = 0$ ist, nach den Vielfachen von v_1 , und setze die beiden ersten Glieder dieser Entwicklung gleich Null. Man erhält hiermit die beiden Gleichungen, aus welchen die Beständigen q_{01} und f_1 bestimmt werden müssen. Denn unter den Gliedern der Störungsgleichung (3') finden sich nun keine beständigen Glieder mehr. Ferner findet man, dass die von v und v_1 unabhängigen Glieder der Störungsgleichungen (2') und (3') jedenfalls mit einer Excentricität multiplicirt sind. Insbesondere haben diejenigen Störungsglieder, welche Functionen von v_1 allein sind, den Factor e_1^2 . Sind dieselben Functionen von v , so haben sie mindestens den Factor e .

§ 3.

Ueber die Störungen der zweiten Ordnung.

Ich habe behauptet, dass sich die säcularen Störungen ebenso wie die periodischen durch Quadraturen unmittelbar aus den Störungsgleichungen herleiten. Unter den Störungsgliedern der ersten Ordnung hat man sich diejenigen Glieder der Störungsgleichungen zu denken, welche als gegebene Functionen einer unabhängigen Veränderlichen vorliegen, sobald man von den gestörten Elementen alle diejenigen, welche noch unbekannt sind, als beständige Grössen betrachtet. Durch die Quadratur dieser Glieder gelangt man zu den Störungen der ersten Ordnung. Nachdem man anstatt der gestörten Elemente die Störungen der ersten Ordnung substituirt hat, sind alle diejenigen Glieder, welche auf Grund dieser Substitution als gegebene Functionen der unabhängigen Veränderlichen vorliegen, als Störungsglieder der zweiten Ordnung zu betrachten. Durch deren Quadratur gelangt man zu den Störungen der zweiten Ordnung. Die Behauptung, dass man die allgemeinen Störungen durch

$$f_1 \frac{r}{a} + \frac{r_1}{p_1} \frac{r}{a} \left(r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 \right),$$

welcher nach dem Cosinus der Vielfachen von ε und v_1 entwickelt werden muss. Da aber alle Störungsglieder den unentwickelten Factor $\frac{p_1^2}{r_1^2}$ behalten sollen, so theile ich den Ausdruck durch $\frac{p_1^2}{r_1^2}$. Die Beständige f_1 erhält hiermit den Factor:

Quadraturen aus den Störungsgleichungen erhalte, setzt allerdings voraus, dass die Störungsgleichungen gewisse Eigenschaften haben, deren Vorhandensein des Nachweises bedarf. Jedenfalls müssen die Störungsglieder der zweiten Ordnung kleine Bruchtheile der Störungsglieder erster Ordnung sein. Doch ist das allein nicht ausreichend. Es müssen sich auch die Störungen der zweiten Ordnung als kleine Bruchtheile der Störungen erster Ordnung ergeben.

Betrachtet man die innere Bahn als eine gestörte Ellipse, so ist der Parameter der Ellipse durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v),$$

und zur Bestimmung der Veränderlichen k und h hat man die Störungsgleichungen:

$$(2) \quad -m p_0^2 k' = \frac{r}{p} \sin v \left(f \frac{p_0}{r} + r \frac{d\Omega}{dr} + q + P \right)$$

$$(3) \quad m p_0^2 h' = \frac{r}{p} \cos v \left(f \frac{p_0}{r} + r \frac{d\Omega}{dr} + q + P \right),$$

in welchen P ein Glied der zweiten Ordnung ist. Lässt man diejenigen Glieder von P ausser Acht, in welchen die gestörten Elemente den zweiten Grad übersteigen, so ist:

$$\frac{P}{m p_0^2} = \frac{3}{2} \frac{p^3}{r^3} (k \cos v + h \sin v)^2.$$

Ich nehme an, es sei fraglich, ob die diesem Ausdruck entsprechenden Störungen von k und h einen kleinen Bruchtheil der Störungen erster Ordnung ausdrücken. Dies betreffend ist in Nr. 2515 § 3 gezeigt worden, dass die elementaren Glieder des vorliegenden Ausdrucks, welche bekanntlich das Quadrat eines säcularen Gliedes, oder auch das Product zweier säcularen Glieder von k und h darstellen, weitere säculare Störungen von k und h nicht zur

Folge haben, dass daher die den elementaren Gliedern von P entsprechenden Störungen von k und h in ihrer numerischen Bedeutung beiläufig dem Quadrat der Störungen erster Ordnung gleichgesetzt werden können. Es müssen aber auch diejenigen Glieder des vorliegenden Ausdrucks untersucht werden, in welchen ein säculares Glied als Factor mit einem andern Gliede von k und h verbunden ist. Denn unter den so beschaffenen Gliedern des vorliegenden Ausdrucks finden sich auch solche, aus welchen weitere säculare Störungen von k und h hervorgehen. Die im § 2 dieses Aufsatzes nachgewiesene Eigenschaft der gestörten Elemente k und h bewirkt, dass diese weiteren säcularen Störungen in allen Fällen kleinen Bruchtheilen der säcularen Störungen erster Ordnung entsprechen. Hätten die nicht säcularen Störungen der ersten Ordnung von k und h nicht die Excentricitäten zum Factor, so wären diese weiteren säcularen Störungen nahezu gleichwerthig den aus den Gliedern der ersten Ordnung erhaltenen säcularen Störungen. Es ist aber im § 2 gezeigt worden, dass insbesondere diejenigen Glieder von k und h , welche als Functionen von v allein gegeben sind, den Factor e^2 haben. Hieraus folgt, dass das Verhältniss der säcularen Störungen von k und h , welche aus den hier in Betracht gezogenen Störungsgliedern der zweiten Ordnung hervorgehen, zu den Störungen der ersten Ordnung von k und h als eine quadratische Form der Excentricitäten gedacht werden kann.

Betrachtet man die äussere Bahn als eine gestörte Ellipse, so erhält man den Parameter dieser Ellipse aus der Gleichung:

$$\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 = 2 \frac{p_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1),$$

und zur Bestimmung der Veränderlichen k_1 und h_1 sind die folgenden Störungsgleichungen gegeben:

$$(2') \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 k_1' = \frac{r_1}{p_1} \sin v_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 + P_1 \right)$$

$$(3') \quad \lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = \frac{r_1}{p_1} \cos v_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 + P_1 \right)$$

In denselben ist P_1 ein Glied der zweiten Ordnung. Lässt man diejenigen Glieder von P_1 ausser Acht, in welchen die gestörten Elemente den zweiten Grad übersteigen, so ist:

$$\lambda^2 m_0 p_{01}^2 \frac{P_1}{p_1^2} = \frac{3}{2} \frac{p_1^3}{r_1^3} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1)^2.$$

Die elementaren Glieder dieses Ausdrucks führen nicht zu säcularen Störungen von k_1 und h_1 . Es kommen daher nur diejenigen Glieder des vorliegenden Ausdrucks in Betracht, in welchen die säcularen Störungen von k_1 und h_1 als Factoren mit anderen Gliedern von k_1 und h_1 verbunden sind. Denn unter diesen Gliedern finden sich auch solche, aus welchen weitere säculare Störungen von k_1 und h_1 hervorgehen. Dass diese weiteren säcularen Störungen immer nur kleine Bruchtheile derjenigen säcularen Störungen sind, welche aus den Störungsgliedern der ersten Ordnung hergeleitet worden sind, folgt aus jener Eigenschaft der ge-

störten Elemente k_1 und h_1 , welche im § 2 dieses Aufsatzes nachgewiesen worden ist. Es ist dort gezeigt worden, dass die nicht säcularen Störungen von k_1 und h_1 , insofern sie sich als Functionen von v_1 allein darstellen, jedesmal den Factor e_1^2 haben. Das Verhältniss der hier betrachteten säcularen Störungen von k_1 und h_1 zu den Störungen der ersten Ordnung von k_1 und h_1 kann daher als eine quadratische Form der Excentricitäten angesehen werden.

Die Forderung, dass alle Störungen der zweiten Ordnung kleine Bruchtheile der Störungen erster Ordnung sein sollen, führt zu einer wesentlichen Vereinfachung der Störungstheorie. Dass sich diese Forderung erfüllt, wenn die Bahn der gestörten Masse durch die Störungen einer elliptischen Bahn bestimmt wird, beruht offenbar auf dem Erfolg jener Correction, welche ich im § 1 an der Störungsfunktion vorgenommen habe.

§ 4.

Ueber diejenigen Störungsglieder, in welchen die gestörten Elemente linear vorkommen.

Wenn die Störungen für einen langen Zeitraum bestimmt werden sollen, so ist man genöthigt, das der Zeit proportionale Glied, welches in dem Ausdruck für die Bewegung des Perihels enthalten ist, zu den Störungsgliedern der ersten Ordnung hereinzunehmen. Man darf also in den Störungsgliedern der ersten Ordnung die Bewegung des Perihels nicht als eine Beständige ansehen, sondern muss neben der Beständigen noch das der Zeit proportionale Glied berücksichtigen. Die Störungsglieder der ersten Ordnung sind nach wie vor gegebene Functionen einer unabhängigen Veränderlichen. Denn die Anwesenheit jener unbestimmten Beständigen in dem der Zeit proportionalen Gliede des Perihels verhindert nicht die Ausführung einer unmittelbaren Quadratur der vorliegenden Störungsglieder.

In gleicher Weise, könnte man sagen, sollen auch die elementaren Glieder, welche in den allgemeinen Werthen der gestörten Elemente enthalten sind, zu den Störungsgliedern der ersten Ordnung hereingenommen werden. Betrachtet man die innere Bahn als die gestörte Ellipse, so findet man die säcularen Störungen $k = A \cos \eta$, $h = -A \sin \eta$ und $\omega = B \sin \eta$, worin $\eta = \alpha + \beta v_1$ ist, A und B ebenso wie α und β beständige Grössen sind. Den Parameter und das Perihel der gestörten Ellipse erhält man aus den folgenden Gleichungen:

$$(I) \quad \frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v)$$

$$(II) \quad w + \left(\frac{p}{r} + 1 \right) (k \sin v - h \cos v) - h e = \omega.$$

Setzt man anstatt k h ω die säcularen Störungen dieser Veränderlichen, so sind den Gleichungen (I) und (II) zufolge auch die elementaren Glieder von p und w gegeben. Dem Vorschlag, die elementaren Glieder der gestörten Elemente

zu den Störungsgliedern der ersten Ordnung hereinzunehmen, steht nichts entgegen. Denn die Störungsglieder der ersten Ordnung sind auch jetzt wieder, ungeachtet des weiteren Umfangs, welcher denselben eingeräumt werden soll, gegebene Functionen der unabhängigen Veränderlichen. Das Unbestimmte, welches in dieselbe aufgenommen ist, beschränkt sich auf beständige Coefficienten, und die Ausführung der vorgeschriebenen Quadraturen wird hiermit nicht beeinträchtigt.

Zur Bestimmung der Veränderlichen k und h hat man die Störungsgleichungen:

$$(2) \quad -m p_0^2 k' = \frac{r}{p} \sin v \left(f \frac{p_0}{r} + r \frac{d\Omega}{dr} + q + P \right)$$

$$(3) \quad m p_0^2 h' = \frac{p}{r} \cos v \left(f \frac{p_0}{r} + r \frac{d\Omega}{dr} + q + P \right)$$

Die Glieder von P sind nach den gestörten Elementen k und h quadratisch, und es ist im § 3 gezeigt worden, dass die aus denselben folgenden Störungen der zweiten Ordnung als kleine Bruchtheile der Störungen erster Ordnung angesehen werden dürfen. Es bleibt aber noch fraglich, ob auch die übrigen Störungen der zweiten Ordnung, zu welchen die vorliegenden Gleichungen führen, als kleine Bruchtheile der Störungen erster Ordnung sich darstellen. Wenigstens ist dies für den Fall noch fraglich, wo es sich um säculare Störungen handelt.

Es ist übrigens einleuchtend, dass sich die Untersuchung auf diejenigen Störungsglieder beschränken darf, in welchen die gestörten Elemente linear vorkommen. In diese Störungsglieder setze ich die als Störungen der ersten Ordnung gegebenen elementaren Glieder des Parameters ein. Aus der Gleichung (1) folgt:

$$\frac{p^i}{p_0^i} - 1 = i \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v),$$

wenn i irgend einen ganzzahligen Werth bezeichnet. Man erhält die säcularen Glieder $k = A \cos \eta$ und $h = -A \sin \eta$. Die elementaren Glieder des Parameters sind daher:

$$\frac{p^i}{p_0^i} - 1 = i A \frac{p}{r} \cos(\eta + v).$$

Sind nun die durch die Substitution von p^i entstehenden Störungsglieder periodisch, so kommen sie hier nicht weiter in Betracht. Sind dieselben aber säcular, so fragt es sich, ob die daraus hervorgehenden Störungen kleine Bruchtheile der Störungen erster Ordnung sind. In den Störungsgleichungen (2) und (3) führt die Substitution der elementaren Glieder von p zu säcularen Störungen von k und h , deren Coefficienten beiläufig gleichwerthig sind dem Coefficienten A , welcher den anderweitig erlangten säcularen Störungen beifügt ist. Hiernach dürfen die elementaren Glieder des Parameters in den Störungsgliedern nicht unbeachtet bleiben, weil die Störungen der ersten Ordnung hiermit vervollständigt werden sollen.

Die Substitution der elementaren Glieder des Parameters darf sich übrigens auf diejenigen Störungsglieder beschränken, welche unabhängig sind von den Vielfachen des Winkels $u - u_1$. Die Substitution in die von den Vielfachen des Winkels $u - u_1$ abhängigen Störungsglieder führt zu säcularen Störungen von k und h , in deren Coefficienten zu jenem Coefficient A ein kleiner Factor hinzukommt, welcher nach den Excentricitäten vom zweiten Grade ist. Man darf daher die in dem letzteren Falle entstehenden säcularen Störungen von k und h als Störungen der zweiten Ordnung betrachten.

Ich habe hiermit den Einfluss der elementaren Glieder des Parameters auf die säcularen Störungen von k und h erörtert. Was über diesen Einfluss für den zuletzt besprochenen Fall gesagt ist, wo die Störungsglieder von den Vielfachen des Winkels $u - u_1$ abhängig sind, zeigt sich ebenso, wenn die elementaren Glieder des Perihels in die Störungsglieder eingesetzt werden. In den Coefficienten der daraus hervorgehenden säcularen Störungen von k und h verbindet sich mit jenem Coefficienten A jedesmal ein Factor, welcher in Bezug auf die Excentricitäten quadratisch ist. Es folgt daraus, dass die Substitution der elementaren Glieder der gestörten Elemente auf die des Parameters beschränkt bleiben darf, so lange nur die Störungen der ersten Ordnung bestimmt werden sollen.

Die Veränderliche q betreffend, soll bekanntlich der Werth $q = 2\Omega - 2b - q_1$ in die Störungsgleichungen (2) und (3) eingesetzt werden. Es ist bekannt, dass es in der Veränderlichen q_1 säculare Störungen nicht giebt, welche die störende Masse nicht zum Factor haben. Wohl aber hat die Veränderliche q_1 , nachdem sie in die Störungsgleichungen (2) und (3) eingesetzt worden ist, säculare Störungen dieser Art von k und h zur Folge. Die Veränderliche q_1 bestimmt sich aus der Störungsgleichung:

$$(1') \quad \frac{1}{2} q_1' = \frac{d\Omega}{dv_1} v_1',$$

und es ist wohl zu beachten, dass bei der partiellen Differentiation von Ω nach v_1 der Parameter p als eine Beständige zu betrachten ist. Aus diesem Umstande folgt, dass die Substitution der elementaren Glieder des Parameters in die Störungsgleichung (1') nur solche Glieder von q_1 hervorbringt, welche die denselben entsprechenden säcularen Störungen von k und h zu Störungen der zweiten Ordnung machen.

Betrachtet man die äussere Bahn als die gestörte, so erhält man den Parameter aus der Gleichung:

$$\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 = 2 \frac{p_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1),$$

und zur Bestimmung der Veränderlichen k_1 und h_1 sind die folgenden Störungsgleichungen gegeben:

$$(2') \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 k_1' = \frac{r_1}{p_1} \sin v_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 + P_1 \right)$$

$$(3') \quad \lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = \frac{r_1}{p_1} \cos v_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 + P_1 \right)$$

Die elementaren Glieder des Parameters sollen in die Störungsgleichungen eingesetzt werden, weil sie zu säcularen Störungen von k_1 und h_1 führen, welche einzeln genommen nicht vernachlässigt werden dürfen. Man findet hier die säcularen Störungen $k_1 = -A_1 \cos \eta$ und $h_1 = -A_1 \sin \eta$. Die elementaren Glieder des Parameters ergeben sich daher aus der Gleichung:

$$\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 = -2A_1 \frac{p_1}{r_1} \cos(\eta - v_1),$$

aus deren Form zu ersehen ist, dass die Substitution nicht auf diejenigen Störungsglieder ausgedehnt zu werden braucht, welche von den Vielfachen des Winkels $u - u_1$ abhängig sind.

In Betreff der Veränderlichen q_1 nimmt die Untersuchung hier eine andere Gestalt an, als für die innere Bahn. Man giebt der Störungsgleichung (1') bekanntlich jene einfache Form:

$$\frac{1}{2} q_1' = \frac{d\Omega}{dv_1} v_1',$$

indem man die Grössen p_1 und w_1 als Beständige ansieht. Nun sollen aber die elementaren Glieder von p_1 als veränderliche Grössen in die Störungsgleichung eingesetzt werden. Wenn man darauf achtet, dass die elementaren Glieder von p_1 unabhängig von ε , also Functionen der Veränderlichen v_1 allein sind, so ist es unzweifelhaft, dass die Störungsgleichung (1') auch jetzt wieder die einfache Gestalt:

$$\frac{1}{2} q_1' = \frac{d\Omega}{dv_1} v_1'$$

annimmt. Es kommt nur darauf an, dass man die elementaren Glieder von p_1 in die Störungsfunktion einsetzt, bevor man zu der partiellen Differentiation von Ω nach v_1 schreitet. Es zeigt sich aber, dass die in Rede stehende Correction von q_1 einen wesentlichen Beitrag zu den säcularen Störungen von k_1 und h_1 liefert. Uebrigens ist die durch die elementaren Glieder des Parameters bewirkte Correction von q_1 , so weit sie hier in Betracht kommt, durch die Störungsfunktion unmittelbar gegeben. Ich habe in Nr. 2611 unter 5. darauf hingewiesen, dass alle diejenigen Glieder

der Störungsfunktion, welche sich als Functionen von v_1 allein darstellen, unmittelbar als Glieder der Veränderlichen q_1 angesehen werden dürfen.

Setzt man die elementaren Glieder von p in die von den Vielfachen des Winkels $u - u_1$ unabhängigen Glieder des Ausdrucks:

$$f \frac{p_0}{r} + r \frac{d\Omega}{dr} + 2\Omega - 2b - q_1 + q_{01}$$

ein, ferner die elementaren Glieder von p_1 in die von den Vielfachen des Winkels $u - u_1$ unabhängigen Glieder des Ausdrucks:

$$f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1,$$

so findet man leicht, dass sich alle die aus dieser Correction der Parameter hervorgehenden säcularen Glieder der vorliegenden Ausdrücke gegenseitig aufheben, sobald man die im § 2 erhaltenen Werthe f und f_1 eingesetzt hat. Diese säcularen Glieder heben sich wenigstens in so weit gegen einander auf, als sie nicht mit den Quadraten der Excentricitäten multiplicirt sind. Das Ergebniss der in diesem § enthaltenen Untersuchung besteht also darin, dass man bei der Bestimmung der Störungen erster Ordnung in den Störungsgleichungen (2), (3), (2'), (3') die elementaren Glieder der gestörten Elemente ausser Acht lassen darf, weil die denselben entsprechenden säcularen Störungen von k h k_1 h_1 nicht grösser sind als Störungen der zweiten Ordnung.

§ 5.

Ueber die säcularen Störungen des Perihels.

Man erhält das Perihel der inneren Bahn aus der Gleichung:

$$w + \left(\frac{p}{r} + 1 \right) (k \sin v - h \cos v) - h e = \omega,$$

und zur Bestimmung der Veränderlichen ω hat man die Störungsgleichung:

$$(4) \quad -m p_0^2 (\omega' + \cos i \vartheta') = f \frac{p_0}{r} + 2r \frac{d\Omega}{dr} + \frac{1}{2} q + P + N.$$

Ich habe die Grösse $P + N$ vorläufig zu den Störungsgliedern der zweiten Ordnung gerechnet, weil sie nach den gestörten Elementen k h q quadratisch ist. In Nr. 2516 § 4 habe ich gezeigt, dass die elementaren Glieder von $P + N$ säculare Störungen von ω nicht zur Folge haben, dass also die den elementaren Gliedern von $P + N$ entsprechenden Störungen von ω als nahezu gleichwerthig dem Quadrate einer Störung der ersten Ordnung von k und h angesehen werden können. Die übrigen Glieder von $P + N$ sind mit der störenden Masse multiplicirt; aber säculare Glieder sind hier nicht ausgeschlossen. Wenn etwa die diesen säcularen Gliedern von $P + N$ entsprechenden

Störungen von ω wegen ihrer numerischen Bedeutung zu den Störungen der ersten Ordnung genommen werden müssen, so kann dies nicht zu Widersprüchen führen. Denn man ist berechtigt, auch die Grösse $P + N$ als ein Störungsglied der ersten Ordnung zu betrachten, weil dieselbe eine gegebene Function der gestörten Elemente k h q ist, die letzteren aber gleichfalls gegeben sind, nachdem man die Störungsgleichungen (1), (2), (3) integrirt hat.

Indem man die Untersuchung auf diejenigen Glieder von $P + N$ einschränkt, welche nach den gestörten Elementen quadratisch sind, erhält man:

$$\frac{P+N}{m p_0^2} = \frac{1}{2} \frac{r^2}{p^2} \frac{p'^2}{p_0^2} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{r^2} \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{r^2} \xi^2 + \frac{3}{8} \frac{p}{r} \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 \right)^2.$$

Vergl. Nr. 2510 unter 7. Man hat hier einzusetzen:

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{p_0^2} - 1 &= 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v) \cdot \\ - \frac{r^2}{p^2} \frac{p'}{p} &= \frac{p}{r} (k \sin v - h \cos v) + e \sin v (k \cos v + h \sin v) \\ &= k \sin v - h \cos v + e (k \sin 2v - h \cos 2v). \end{aligned}$$

Ferner ist, mit Rücksicht auf jene Aenderung, welche die im § 1 gegebene Correction der Störungfunction in dem Werthe q bewirkt hat, einzusetzen:

$$\xi = ek + \frac{1}{m p_0^2} \frac{r^2}{p^2} \left(f \frac{p_0}{r} + \frac{1}{2} q \right).$$

Es ist auch leicht zu sehen, dass in Folge der im § 2 nachgewiesenen Eigenschaft der gestörten Elemente k und h alle säcularen Glieder von $P+N$ vernachlässigt werden dürfen, ausgenommen die mit ek multiplicirten Glieder von ξ^2 . Man behält daher den einfachen Werth:

$$P+N = ek \left(f \frac{p_0}{r} + \frac{1}{2} q \right),$$

wo nun in dem Factor ek nur die säcularen, in dem andern Factor des Productes nur die beständigen Glieder in Betracht kommen.

Um die Störungen der ersten Ordnung von ω zu vervollständigen, muss man ferner die elementaren Glieder des Parameters in die von den Vielfachen des Winkels $u-u_1$ unabhängigen Störungsglieder einsetzen. Im § 4 haben sich die elementaren Glieder des Parameters in der folgenden Form ergeben:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2A \frac{p}{r} \cos(\eta+v).$$

Setzt man dieselben ein, so zeigt es sich, dass die daraus hervorgehenden säcularen Störungen von ω nicht vernachlässigt werden dürfen. Denn in den Coefficienten dieser säcularen Störungen ist der obige Coefficient A nicht mit dem Quadrat, sondern nur mit der ersten Potenz der Excentricität multiplicirt.

Demgemäss hat man in der Störungsgleichung (4) zu schreiben:

$$f \frac{p_0}{r} = f \frac{p}{r} + f \frac{p}{r} \left(\frac{p_0}{p} - 1 \right) = f \frac{p}{r} - f \frac{p^2}{r^2} (k \cos v + h \sin v).$$

Die Integration der Störungsgleichung erhält einen Vorschub, wenn man den ersten Theil des vorliegenden Ausdrucks:

$$f \frac{p}{r} = f(1-e^2) + fe(\cos v + e) = f(1-e^2) + \frac{fe}{\sqrt{1-e^2}} (\sin \epsilon),$$

setzt. In dem andern Theil kommen nur die säcularen Glieder in Betracht, und es ist daher:

$$f \frac{p_0}{r} = f(1-e^2) + \frac{fe}{\sqrt{1-e^2}} (\sin \epsilon) - fe k.$$

Verbindet man dies mit dem obigen Werthe $P+N$, so ist:

$$f \frac{p_0}{r} + P+N = f(1-e^2) + \frac{fe}{\sqrt{1-e^2}} (\sin \epsilon) + ek \cdot \frac{1}{2} q.$$

Um die Störungen der ersten Ordnung von ω zu erhalten, hat man die Störungsgleichung (4) in der folgenden Form zu schreiben:

$$(4) \quad -m p_0 (\omega' + \cos i \vartheta') = f(1-e^2) + \frac{fe}{\sqrt{1-e^2}} (\sin \epsilon)' + 2r \frac{d\Omega}{dr} + \frac{3}{2} q + ek \cdot \frac{1}{2} q,$$

wo noch $q = 2\Omega - 2b - q_1 + q_{01}$ einzusetzen ist.

Das Perihel der äusseren Bahn ergibt sich aus der Gleichung:

$$w_1 + \left(\frac{p_1}{r_1} + 1 \right) (k_1 \sin v_1 - h_1 \cos v_1) - h_1 e_1 = \omega_1,$$

und zur Bestimmung von ω_1 hat man die Störungsgleichung:

$$(4') \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 (\omega_1' + \cos i_1 \vartheta') = f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + 2 r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + \frac{3}{2} q_1 + P_1 + N_1.$$

Die Grösse $P_1 + N_1$ darf zu den Störungsgliedern der ersten Ordnung gerechnet werden, weil sie eine gegebene Function der gestörten Elemente $k_1 h_1 q_1$ ist, die letzteren aber selbst gegeben sind, nachdem man die Störungsgleichungen (1') (2') (3') integrirt hat. Lässt man diejenigen Glieder von $P_1 + N_1$ fort, deren Integral nicht grösser ist als die Störungen der zweiten Ordnung, so behält man den einfacheren Ausdruck:

$$P_1 + N_1 = e_1 k_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + \frac{1}{2} q_1 \right),$$

wo in dem Factor $e_1 k_1$ nur die säcularen Glieder, in dem andern Factor nur die beständigen Glieder in Betracht kommen.

Um die Störungen der ersten Ordnung zu vervollständigen, müssen ferner in die von den Vielfachen des Winkels $u - u_1$ unabhängigen Glieder der Störungsgleichung

$$f_1 \frac{p_1}{r_1} \left(\frac{p_{01}}{p_1} - 1 \right) = -f_1 \frac{p_1^2}{r_1^2} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1) = -f_1 e_1 k_1.$$

In dem ersten Theil ist zu setzen:

$$\frac{p_1}{r_1} = 1 - e_1^2 + e_1 (\cos v_1 + e_1) = 1 - e_1^2 + \frac{e_1}{\lambda} \left(\frac{r_1}{p_1} \sin v_1 \right)'$$

Aus der Vereinigung der vorliegenden Werthe ergibt sich:

$$f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + P_1 + N_1 = f_1 (1 - e_1^2) + \frac{f_1 e_1}{\lambda} \left(\frac{r_1}{p_1} \sin v_1 \right)' + e_1 k_1 \cdot \frac{1}{2} q_1.$$

Um zu den Störungen der ersten Ordnung von ω_1 zu gelangen, muss man die Störungsgleichung (4') in der folgenden Form schreiben:

$$(4') \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 (\omega_1' + \cos i_1 \vartheta') = f_1 (1 - e_1^2) + \frac{f_1 e_1}{\lambda} \left(\frac{r_1}{p_1} \sin v_1 \right)' + 2 r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + \frac{3}{2} q_1 + e_1 k_1 \cdot \frac{1}{2} q_1.$$

Karlsruhe 1884 im Mai.

August Weiler.

Ueber den Einfluss der Zahl der Beobachter auf die Zahl der für sie sichtbaren Sternschnuppen.

Aus den Beobachtungen einzelner Astronomen und Meteorologen, namentlich Coulvier-Gravier und J. Schmidt, lässt sich mit genügender Sicherheit die mittlere Zahl der für einen Beobachter (mit unbewaffnetem Auge) sichtbaren Sternschnuppen zu 10 per Stunde fixiren. Will man nun daraus einen Schluss auf die wirklich in dem von der Erde durchlaufenen Theil des Sonnensystems enthaltene Menge der kosmischen Körper ziehen, so muss noch der Einfluss der Zahl der für sie sichtbaren Sternschnuppen untersucht werden, denn es leuchtet ein, dass ein Beobachter, da sein Gesichtsfeld nicht den ganzen Himmel umfassen kann, auch

nicht alle Meteore sehen wird, die über seinem Horizonte verbrennen.

Man nimmt gewöhnlich an, dass das Gesichtsfeld eines normalen Auges einen Winkel von 60 bis 90 Grad einschliesst. Die Fläche des Kegelsegmentes, welche diesen Winkeln entspricht, ist 0.134 bis 0.293, im Mittel 0.214. Darnach würde also ein Beobachter nahezu den fünften Theil (1 : 4.7) der Sternschnuppen seines Horizontes sehen.

Um dieses Verhältniss empirisch zu bestimmen, stellte ich den 10. August d. J. folgende Beobachtungen an.