Ableitung einer analytischen Darstellung der Epiellipside.

Von Otto Biermann in Brunn.

In den folgenden Zeilen soll die in der Maschinenlehre vorkommende Epiellipside kurz behandelt werden, die durch einen festen Punkt A auf der Peripherie einer Ellipse E'' erzeugt wird, wenn diese ohne zu gleiten auf einer festen, der ersten Ellipse ähnlichen Ellipse E abrollt.

Die feste Ellipse E mit den Halbachsen a und b ($a > b$) besitze gegenüber gewählten rechtwinkligen Coordinatenachsen die Gleichung

$$x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2;$$

die Ellipse E' mit den Halbachsen ma und mb habe eine solche Anfangslage, dass ihre Achsen den gleichnamigen Achsen von E parallel laufen und der Punkt $(0, b)$ Berührungspunkt sei. — Es soll die Bahn dieses Punktes A von E' verfolgt werden, wenn das Abrollen im Sinne der Uhrzeigerbewegung stattfindet.

Gelangt A in dem Augenblicke, als der gemeinsame Berührungspunkt von E und E' etwa $B'(x', y')$ ist, nach A' , so lässt sich die Lage von A' am einfachsten in Beziehung setzen zu der Stelle B' , zu dem Winkel α' , um den man den positiven Theil der y Achse im Sinne der Uhrzeigerbewegung um O drehen muss, damit man eine Parallele zu der in B' zu verzeichnenden Normalen N' an E und E' erhält, zu dem Winkel φ' , um den man die kleine Achse von E' aus ihrer neuen Lage um den Schnittpunkt C' derselben mit N' im Sinne verkehrt der Uhrzeigerbewegung drehen muss, dass sie in die Normale N' fällt, und endlich zu der Entfernung $\overline{A'C'}$.

Nennt man die Coordinaten von C' (x_1, y_1) und die Entfernung $\overline{A'C'}$ r , so sind die Coordinaten von A' :

$$x = x_1 - r \sin(\alpha' + \varphi'),$$

$$y = y_1 - r \cos(\alpha' + \varphi').$$

Die Winkel α' und φ' stehen dadurch in Zusammenhang, dass der von der Stelle (o, b) bis (x', y') reichende Ellipsenbogen von E gleich sein soll dem Ellipsenbogen $A'B'$ von E' .

Wenn man die feste Ellipse durch die Gleichungen

$$x = a \sin \omega, \quad y = b \cos \omega \quad (\omega = 0 \dots 2\pi)$$

darstellt und

$$x' = a \sin \omega', \quad y = b \cos \omega'$$

ist, so wird der erste Ellipsenbogen von E durch das a fache des Integrales

$$u = \int_0^{\omega'} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega} \, d\omega$$

dargestellt, wo $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ ist. — Doch weil $\operatorname{tg} \omega' = \frac{x' b}{y' a}$ ist und die Tangente des Neigungswinkels $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$ der Normale N' gegenüber der positiven Richtung der x Achse gleich $\frac{a^2 y'}{b^2 x'}$ ist, wird

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \operatorname{am} u,$$

und man weiß denselben Bogen darzustellen, wenn α' gegeben ist. Die Ellipse E hat die Parameterdarstellung:

$$x = a^2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad y = b^2 \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Für eine der ersten Ellipse ähnliche Ellipse $m^2 b^2 x^2 + m^2 a^2 y^2 = m^4 a^2 b^2$ mit den Halbachsen ma und mb ist der von einem Endpunkte des kleinsten Durchmessers bis zu einer Stelle $x = ma \sin \omega, y = mb \sin \omega$ verlaufende Bogen durch

$$ma \int_0^{\omega} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega} \, d\omega$$

ausgedrückt. Soll dieser Bogen dieselbe Länge haben wie der erste auf E , so muss man

$$\bar{\omega} = am \frac{u}{m}$$

setzen; und dann ist

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{mb}{ma} \operatorname{tg} \bar{\omega} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \operatorname{am} \frac{u}{m}.$$

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, die Coordinaten x_1, y_1 und die Entfernung r zu bestimmen. Doch das gelingt, wenn man die Gleichung der die feste Ellipse im Punkte (x', y') von außen berührenden Ellipse mit den Halbachsen ma und mb angeben kann, deren kleine Achse gegenüber der Normalen N' in (x', y') die Neigung φ' hat.

Die Gleichung der Ellipse E' in der neuen Lage ist von der Form

$$(\alpha) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0;$$

und zunächst ist zu bemerken, dass diese Gleichung nur dann eine der Ellipse E ähnliche Ellipse mit den Halbachsen ma und mb darstellt, wenn

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = m^4 a^2 b^2 \text{ und } a_{11} + a_{22} = m^2(a^2 + b^2)$$

ist, also

$$\begin{aligned} a_{11} - a_{22} &= \pm \sqrt{m^4(a^2 - b^2)^2 + 4a_{12}^2}, \\ a_{11} &= \frac{1}{2}(m^2(a^2 + b^2) \pm \sqrt{m^4(a^2 - b^2)^2 + 4a_{12}^2}), \\ a_{22} &= \frac{1}{2}(m^2(a^2 + b^2) \mp \sqrt{m^4(a^2 - b^2)^2 + 4a_{12}^2}) \end{aligned}$$

ist.

Zweitens sind die Coefficienten der Gleichung (α) so zu wählen, dass (x', y') ein der Gleichung genügendes Wertesystem ist und dass die Tangente an die Curve (α) in diesem Punkte mit der Tangente:

$$b^2xx' + a^2yy' - a^2b^2 = 0$$

übereinstimmt.

Zu diesem Zwecke muss

$$\begin{aligned} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13} &= -\lambda b^2x', \\ a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23} &= -\lambda a^2y', \\ a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33} &= \lambda a^2b^2 \end{aligned}$$

sein, wo λ einen Proportionalitätsfactor bedeutet; und nun ist die Gleichung jeder Curve II. Ordnung, welche die Ellipse E in (x', y') berührt, von der Form

$$\begin{aligned} (\beta) \quad & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 2(\lambda b^2x' + a_{11}x' + a_{12}y')x - \\ & - 2(\lambda a^2y' + a_{12}x' + a_{22}y')y + \\ & + (2\lambda a^2b^2 + a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2) = 0. \end{aligned}$$

Soll die Berührung von außen stattfinden und die Curve (α) ihre convexe Seite zur x Achse kehren, so muss

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x'y'} = \frac{a_{11}(a^2y')^2 - a_{12}(b^2x')(a^2y') + a_{22}(b^2x')^2}{\lambda(a^2y')^3}$$

dasselbe Zeichen haben wie y' , oder λ muss dasselbe Zeichen wie der Zähler haben.

Da die Determinante der Gleichung (β) lautet:

$$\Delta = -\lambda^2[a_{11}(a^2y')^2 - a_{12}(b^2x')(a^2y') + a_{22}(b^2x')^2],$$

kann man schreiben:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x'y'} = -\frac{\Delta}{(a^2\lambda y')^3}.$$

Und beachtet man, dass die in der Gleichung (β) enthaltene Curve, wenn sie auf ihre Achsen bezogen wird, durch eine der Gleichungen

$$\begin{aligned} m^2b^2\xi^2 + m^2a^2\eta^2 &= m^4a^2b^2, \\ m^2a^2\xi^2 + m^2b^2\eta^2 &= m^4a^2b^2 \end{aligned}$$

darzustellen sein soll, so muss

$$\frac{\Delta}{A_{33}} = -m^4a^2b^2$$

sein und somit

$$\lambda^2 = \frac{(m^4a^2b^2)^2}{a_{11}(a^2y')^2 - a_{12}(b^2x')(a^2y') + a_{22}(b^2x')^2}.$$

Hier aber schließt man, dass der Nenner positiv sein muss, weil $\lambda^2 > 0$ ist; daher muss nach dem Früheren λ selbst > 0 sein und zwar:

$$\lambda = \frac{m^4a^2b^2}{+ \sqrt{a_{11}(a^2y')^2 - a_{12}(b^2x')(a^2y') + a_{22}(b^2x')^2}}.$$

Unterwirft man also die Coefficienten der Gleichung (β), welche, im Falle (x', y') mit (a, b) zusammentrifft, in die Gleichung

$$m^2b^2x^2 + m^2a^2y^2 - 2ym^2a^2b^2(m+1)^2 + m^2a^2b^2(2m+1) = 0$$

übergehen soll, den drei Bedingungen:

$$\begin{aligned}
2a_{11} &= m^2(a^2 + b^2) - \sqrt{m^4(a^2 - b^2)^2 + 4a_{12}^2}, \\
2a_{22} &= m^2(a^2 + b^2) + \sqrt{m^4(a^2 - b^2)^2 + 4a_{12}^2}, \\
\lambda^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2m^4a^2b^2}} \left[m^2(a^2 + b^2) \left((a^2y')^2 + (b^2x')^2 \right) - 2a_{12}(a^2y')(b^2x') + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{m^4(a^2 - b^2)^2 + 4a_{12}^2} \left(-(a^2y')^2 + (b^2x')^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

so ist nur noch diejenige Bedingung aufzustellen, unter welcher die kleine Achse der durch die Gleichung (β) dargestellten Ellipse E' mit der Normale:

$$\eta - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(\xi - x')$$

den Winkel φ' einschließt. Nun sind die Tangenten der Neigungswinkel der Achsen unserer Ellipse durch die Gleichung

$$a_{12} \operatorname{tg}^2 \vartheta + (a_{11} - a_{22}) \operatorname{tg} \vartheta - a_{12} = 0$$

definiert; also

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \vartheta &= \frac{-(a_{11} - a_{22}) \pm m^2(a^2 - b^2)}{2a_{12}} = \\
&= \frac{+ \sqrt{m^4(a^2 - b^2)^2 + 4a_{12}^2} \pm m^2(a^2 - b^2)}{2a_{12}}.
\end{aligned}$$

Weil die Gleichung der Ellipse E' in der Anfangslage, wo für die kleine Achse $\operatorname{tg} \vartheta = \infty$ gilt, den Coefficienten $a_{12} = 0$ hat, so gibt die Formel

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{m^4(a^2 - b^2)^2 + 4a_{12}^2} + m^2(a^2 - b^2)}{2a_{12}}$$

die Tangente des Neigungswinkels der kleinen Achse; und es ist nun

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \varphi' &= \frac{\frac{a^2y'}{b^2x'} - \frac{1}{2a_{12}} \left(m^2(a^2 - b^2) + \sqrt{m^4(a^2 - b^2)^2 + 4a_{12}^2} \right)}{1 + \frac{a^2y'}{b^2x'} \frac{1}{2a_{12}} \left(m^2(a^2 - b^2) + \sqrt{m^4(a^2 - b^2)^2 + 4a_{12}^2} \right)} = \\
&= \operatorname{tg} \left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha' \right) - \vartheta \right)
\end{aligned}$$

zu setzen, so dass die Gleichung, welche zur Bestimmung von a_{12} dient, nunmehr lautet:

$$a_{12} [a_{12} \{(\operatorname{tg}^2 \varphi' - 1) ((b^2 x')^2 - (a^2 y')^2) - 4(a^2 y') (b^2 x') \operatorname{tg} \varphi'\} + \\ + m^2(a^2 - b^2) \{ (b^2 x') + (a^2 y') \operatorname{tg} \varphi' \} \{ (b^2 y') \operatorname{tg} \varphi' - (a^2 y') \}] = 0.$$

Die Lösung $a_{12} = 0$ ist nicht brauchbar, denn da würde ja die Ellipse E' aus der Anfangslage nicht gedreht werden; und man erhält

$$a_{12} = \frac{m^2(a^2 - b^2) \{ (a^2 y') \operatorname{tg} \varphi' + (b^2 x') \} \{ (a^2 y') - (b^2 x') \operatorname{tg} \varphi' \}}{\{ (a^2 y') - (b^2 x') \operatorname{tg} \varphi' \}^2 - \{ (a^2 y') \operatorname{tg} \varphi' + (b^2 x') \}^2} = \\ = \frac{m^2(a^2 - b^2)}{2} \operatorname{tg} 2(\alpha' + \varphi').$$

Jetzt ist die Gleichung der Ellipse E' bei beliebiger Lage während der Bewegung bekannt und man hat zur Ermittlung der Coordinaten (x_1, y_1) und der Entfernung r nur mehr den Schnittpunkt der Geraden

$$y - \eta = \operatorname{tg} \vartheta (x - \xi) \quad \text{und} \quad y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x')$$

zu berechnen, wo ξ und η die Coordinaten des Centrums der Ellipse E' sind, und hat zu beachten, dass r der Summe von mb und der Entfernung der Punkte (ξ, η) und (x_1, y_1) gleichkommt.

Die Coordinaten ξ und η lauten:

$$\xi = x' - \frac{\lambda}{A_{33}} (a_{12} (a^2 y') - a_{22} (b^2 x')), \\ \eta = y' + \frac{\lambda}{A_{33}} (a_{11} (a^2 y') - a_{12} (b^2 x')).$$

Man hat also alle Mittel zur Berechnung der Coordinaten von A' als Functionen von ω' oder von α' .

Es ergibt sich unmittelbar, dass

$$2a_{11} = m^2(a^2 + b^2) - \frac{m^2(a^2 - b^2)}{\cos 2(\alpha' + \varphi')}, \\ 2a_{12} = m^2(a^2 - b^2) \operatorname{tg} 2(\alpha' + \varphi'), \\ 2a_{22} = m^2(a^2 + b^2) + \frac{m^2(a^2 - b^2)}{\cos 2(\alpha' + \varphi')}, \\ \frac{\lambda a^2 y'}{2m^3 a^2 b^2} = \\ = \left\{ \frac{2(a^2 + b^2)}{\cos^2 \alpha'} - \frac{2(a^2 - b^2)}{\cos 2(\alpha' + \varphi')} (\sin 2(\alpha' + \varphi') + 2 \operatorname{tg} \alpha' \cotg 2\alpha') \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

ist, und man kann die Curve, welche das Centrum der rollenden Ellipse beschreibt, durch die Gleichungen definieren:

$$\xi = x' + m \left(\frac{\lambda a^2 y'}{2 m^3 a^2 b^2} \right) \left[(a^2 + b^2) \operatorname{tg} \alpha' - (a^2 - b^2) \frac{\sin 2(\alpha' + \varphi') - \operatorname{tg} \alpha'}{\cos 2(\alpha' + \varphi')} \right],$$

$$\eta = y' + m \left(\frac{\lambda a^2 y'}{2 m^3 a^2 b^2} \right) \left[(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) \frac{1 + \sin 2(\alpha' + \varphi') \operatorname{tg} \alpha'}{\cos 2(\alpha' + \varphi')} \right].$$

Die Tangente des Winkels ϑ kommt gleich

$$\cotg(\alpha' + \varphi');$$

die Coordinaten des Punktes $C'(x_1, y_1)$ genügen den Gleichungen:

$$y_1 - x_1 \cotg(\alpha' + \varphi') + (\xi \cotg(\alpha' + \varphi') - \eta) = 0,$$

$$y_1 - x_1 \cotg \alpha' + \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha'}} = 0,$$

daher ist

$$x_1 = \xi + \frac{(\xi \cotg \alpha' - \eta) - \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha'}}}{\cotg(\alpha' + \varphi') - \cotg \alpha'},$$

$$y_1 = \eta + (x_1 - \xi) \cotg(\alpha' + \varphi')$$

und

$$r = mb + \frac{x_1 - \xi}{\sin(\alpha' + \varphi')}.$$

Weil aber

$$\cotg(\alpha' + \varphi') - \cotg \alpha' = - \frac{\sin \varphi'}{\sin(\alpha' + \varphi') \sin \alpha'},$$

$$\cotg \alpha' - \operatorname{tg} \alpha' = 2 \cotg 2\alpha',$$

$$\xi \cotg \alpha' - \eta - \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha'}} =$$

$$= \left(\frac{\lambda a^2 y'}{2 m^3 a^2 b^2} \right) \frac{2 m (a^2 - b^2) (1 - \sin 2(\alpha' + \varphi') \cdot \cotg 2\alpha')}{\cos 2(\alpha' + \varphi')}$$

ist, wird

$$r = mb - \frac{2 m (a^2 - b^2) (1 - \sin 2(\alpha' + \varphi') \cotg 2\alpha') \sin \alpha'}{\sin \varphi' \cos 2(\alpha' + \varphi') \sqrt{\frac{2(a^2 + b^2)}{\cos^2 \alpha'} - \frac{2(a^2 - b^2)}{\cos 2(\alpha' + \varphi')}} (\sin 2(\alpha' + \varphi') + 2 \operatorname{tg} \alpha' \cdot \cotg 2\alpha')}$$

Jetzt sind alle Größen in den Ausdrücken für die Coordinaten eines beliebigen Punktes der einfachen Epiellipside als Functionen von α' dargestellt, denn für φ' gilt die Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{b}{a} \operatorname{tgam} \frac{u}{m},$$

wobei

$$\frac{b}{a} \operatorname{tgam} u = \operatorname{tg} \alpha'$$

ist.

Wenn die Ellipse E' der festen Ellipse E congruent ist, hat man $m=1$ und $\alpha'=\varphi'$ zu setzen, doch die Formeln für die Coordinaten (x, y) der hier auftretenden einfachsten Epiellipside:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha'}} - b \sin 2\alpha' + \\ &+ \left\{ (a^2 + b^2) \cdot \operatorname{tg} \alpha' \cos 4\alpha' - (a^2 - b^2) (\sin 4\alpha' - \operatorname{tg} \alpha' + 2 \cos 4\alpha' (\cos \alpha' + \sin \alpha')^2) \right\} \frac{1}{N}, \\ y &= \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha'}} - b \cos 2\alpha' + \\ &+ \left\{ (a^2 + b^2) \cos 4\alpha' - (a^2 - b^2) (\sin 4\alpha' \cdot \operatorname{tg} \alpha' + 1 + 2 \cos 4\alpha' (\cos \alpha' + \sin \alpha')^2 \cotg 2\alpha') \right\} \frac{1}{N}, \end{aligned}$$

wo N das Zeichen für den Ausdruck:

$$\cos 4\alpha' \sqrt{\frac{2(a^2 + b^2)}{\cos^2 \alpha'} - \frac{2(a^2 - b^2)}{\cos 4\alpha'}} (\sin 4\alpha' + 2 \operatorname{tg} \alpha' \cdot \cotg 2\alpha')$$

ist, sind noch sehr verwickelt, aber sie reichen natürlich hin, die Lage von A' für einen vorgelegten Wert von α' zu berechnen.

Setzt man hier $a=b=r$, so gehen die Gleichungen der Cardioide hervor:

$$\begin{aligned} x &= r(2 \sin \alpha' - \sin 2\alpha'), \\ y &= r(2 \cos \alpha' - \cos 2\alpha'). \end{aligned}$$

Wie die Rechnung auszuführen ist, wenn die Anfangslage von E' eine neue ist und die Bahn des Berührungspunktes von E' und E aus dieser Lage verlangt wird, bedarf keiner Erläuterung mehr.¹⁾

März 1896.

¹⁾ In dem VIII. Bd. des American Journal of Math. behandelte Lane die einfache Ellipse, wie ich kürzlich bemerkte.