SULLE EQUAZIONI IRREDUCIBILI DI GRADO PRIMO

RISOLUBILI PER RADICALI

Nota del prof. F. Giudice, a Palermo.

(Seduta del 13 marzo 1887)

Le cose che espongo sono conosciute; spero tuttavia che la semplicità delle dimostrazioni acquisti importanza alla presente Nota.

1. Se p è primo, le radici d' un' equazione irriducibile, del grado p risolubile per radicali sono tutti, e soltanto, i valori che una particolare

$$a_0 + R^{\frac{1}{p}} + a_1 R^{\frac{2}{p}} + \dots + a_{p-1} R^{\frac{p-1}{p}} = \xi(R^{\frac{1}{p}})$$

ha per la multiformità dei radicali che contiene. (*)

Indicando con ω una radice imaginaria p^{ma} dell' unità; le radici d' una tale equazione potranno quindi esser date da:

$$x_\zeta = a_0 + \omega^\zeta R^{\frac{1}{p}} + a_1 \omega^{2\zeta} R^{\frac{2}{p}} + \dots + a_{p-1} \omega^{(\zeta-1)\zeta} R^{\frac{p-1}{p}} = \xi(\omega^\zeta R^{\frac{1}{p}})$$

$$\zeta = 0, 1, 2, \dots, p-1.$$

Per una qualunque

$$\varphi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$$

si avrà così:

$$\varphi(x_0, x_1, \dots, x_{p-1}) = \varphi[\xi(R^{\frac{1}{p}}), \xi(\omega R^{\frac{1}{p}}), \dots, \xi(\omega^{p-1} R^{\frac{1}{p}})] = \Psi(R^{\frac{1}{p}}, \dots).$$

A particolari sostituzioni delle x contenute in φ corrisponderanno particolari cambiamenti di valore dei radicali contenuti in Ψ e viceversa.

(*) Vedi: Abel, *Œuvres*, Tome second, Note XVIII — Kronecker, *Monatsbericht der Königl. Akad. der Wissenschaften*, Berlin, März 1879.

Un cambiamento di valore dei radicali contenuti in $\xi(R^{\frac{1}{p}})$ avrà adunque per effetto una sostituzione delle x ; questa sposterà o non sposterà x_0 .

Supponiamo che x_0 sia sostituita da x_λ ; a questa sostituzione corrisponde il semplice cambiamento di $R^{\frac{1}{p}}$ in $\omega^\lambda R^{\frac{1}{p}}$, e questo porta di conseguenza il cambiamento di $\omega^m R^{\frac{1}{p}}$ in $\omega^{m+\lambda} R^{\frac{1}{p}}$ epperò di x_m in $x_{m+\lambda}$ dove ad ogni indice maggiore di p devesi sostituire il minimo resto positivo relativo al divisore p . Avremo quindi, fra gli indici α delle x_α , la sostituzione:

$$| \alpha, \alpha + \lambda | \quad (\text{mod. } p)$$

ossia, fra le x_α : $(x_0, x, x_{2\lambda}, \dots, x_{(p-1)\lambda})$.

Supponiamo ora che x_0 non sia spostata e sia invece sostituita x_μ da x_ν . A questa sostituzione corrisponde il semplice cambiamento di ω^μ in ω^ν . Sia $x = i$ l'unica soluzione della congruenza $\mu x \equiv 1 \pmod{p}$. Il cambiamento di ω^μ in ω^ν porta di conseguenza quello di $\omega_j = \omega^{\mu j}$, in ω^j ossia in ω^j se j è il minimo resto positivo di νi pel divisore p . Verrà così cambiata ω^m in ω^j ; a questo cambiamento corrisponde la sostituzione di x_m ad x_j . Avremo quindi fra gli indici α la sostituzione

$$| \alpha, j\alpha | \quad (\text{mod. } p)$$

che dà una sostituzione regolare delle $p - 1$ radici $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$, composta di p cicli dell'ordine $\frac{p-1}{p}$ dove $\frac{p-1}{p}$ è l'esponente a cui appartiene j relativamente al modulo p .

Segue che: Se ϕ appartiene al gruppo delle sostituzioni lineari intere, fra gli indici α ,

$$G = | \alpha, \beta\alpha + \gamma |$$

$$\beta = 1, 2, \dots, p-1 \quad \gamma = 0, 1, 2, \dots, p-1$$

resterà essa inalterata comunque si mutino i valori dei radicali contenuti in $\xi(R^{\frac{1}{p}})$, e sarà per ciò esprimibile razionalmente per i coefficienti dell'equazione.

Abbiamo così il teorema :

Se un'equazione irriducibile di grado primo è risolubile per radicali, le funzioni delle radici x_i appartenenti al gruppo delle sostituzioni lineari intere fra gli indici α sono esprimibili razionalmente per mezzo dei coefficienti dell'equazione, le radici essendo prese in ordine opportuno.

COROLLARIO. — *Le equazioni irriducibili di grado primo risolubili per radicali sono equazioni di Galois(*). Il loro gruppo, relativo agli indici delle x_i , è il gruppo delle sostituzioni lineari intere od è sottogruppo di questo come avviene per le equazioni Abelianne che formano un caso particolare di quelle di Galois.*

Se le x_i sono indipendenti, ogni funzione appartenente al gruppo G che è dell'ordine $p \times (p-1)$ ha $\frac{p!}{p(p-1)}$ valori. Per $p=2, 3$ si ha $\frac{p!}{p(p-1)} = 1$; mentre per $p \geq 5$ si ha $\frac{p!}{p(p-1)} = (p-2)! > 1$.

Abbiamo quindi anche il corollario :

Le equazioni irriducibili di grado primo non minore di 5, epperò anche quelle di grado composto maggiore di 5, non sono risolubili per radicali.

Siccome s'è visto che ogni cambiamento di valore nei radicali che non consista nel porre $\omega^\lambda R^{\frac{1}{p}}$ in luogo di R ha per effetto una sostituzione regolare, d'ordine $\frac{p-1}{p}$ fra le $p-1$ radici $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$, si può dedurre che :

Nell'espressione della radice oltre dei radicali esterni che sono necessariamente del grado p entrano solamente radicali aventi per indice un divisore di $p-1$.

(*) Abel (*Oeuvres complètes*, t. II, p. 270) aveva detto che un'equazione irriducibile di grado primo è risolubile per radicali se una sua radice è esprimibile razionalmente per altre due, ma non aveva enunciata la proposizione inversa.