Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle.

Par

P. APPELL à Paris.

Désignons par $\psi(x)$ une fonction uniforme de la variable imaginaire x ayant un point singulier essentiel à l'infini, un pôle du premier degré au point $x = 0$ et une infinité d'autres pôles tous du premier degré

$$a_1, a_2, \dots, a_v, \dots, (\lim a_v = \infty, \text{ pour } v = \infty)$$

distribués d'une façon quelconque dans le plan des x ; soient 1 le résidu du pôle $x = 0$, R_v celui du pôle $x = a_v$. Considérons une aire S à contour simple limitée par n arcs de cercles $C_1, C_2, \dots, C_n$, tournant tous leur *convexité* vers l'intérieur de l'aire et ayant pour centres respectifs les points $a_1, a_2, \dots, a_n$. Supposons, en outre, que, lorsque le point x est situé dans l'aire S , tous les points

$$x + a_1, x + a_2, \dots, x + a_v, \dots$$

soient situés à l'extérieur de l'aire S et à l'extérieur des cercles auxquels appartiennent les arcs $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Cela posé, soient $f(x)$ une fonction de x holomorphe dans l'aire S et x un point de cette aire; on a l'équation

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int f(z) \psi(z - x) dz,$$

l'intégrale étant prise dans le sens positif sur le contour de l'aire S . Cette équation (1) résulte de ce que la fonction $f(z) \psi(z - x)$ de la variable z admet à l'intérieur de l'aire S le seul pôle $z = x$ avec le résidu $f(x)$; les autres pôles

$$z = x + a_1, z = x + a_2, \dots, z = x + a_v,$$

de cette fonction sont, d'après les hypothèses faites plus haut, en dehors de l'aire S .

Partageons l'intégrale (1) en n parties relatives aux n arcs $C_1, C_2, \dots, C_n$; nous aurons

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=n} \int_{C_k} f(z) \psi(z-x) dz,$$

l'indice C_k indiquant que l'intégrale affectée de cet indice est prise sur l'arc C_k . Soit z un point de l'arc C_k ; comme les points

$$x, x + a_1, \dots, x + a_v, \dots$$

sont situés *en dehors* du cercle auquel appartient l'arc C_k , les quantités

$$\text{mod. } \frac{z - \alpha_k}{x - \alpha_k}, \quad \text{mod. } \frac{z - \alpha_k}{x + a_1 - \alpha_k}, \quad \dots, \quad \text{mod. } \frac{z - \alpha_k}{x + a_v - \alpha_k}, \quad \dots$$

sont toutes moindres que l'unité; appelons ε_k la plus grande de ces fractions. La fonction $\psi(z-x)$ de la variable z est holomorphe dans l'intérieur du cercle de centre α_k et de rayon $\frac{1}{\varepsilon_k} \cdot \text{mod. } (z - \alpha_k)$; donc on a, pour les valeurs de z qui figurent dans l'intégrale affectée de l'indice C_k , la série uniformément convergente

$$(3) \quad \psi(z-x) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{(z-\alpha_k)^\mu}{1 \cdot 2 \dots \mu} \psi^{(\mu)}(\alpha_k - x)$$

où

$$\psi^{(\mu)}(u) = \frac{d^\mu \psi(u)}{d u^\mu}.$$

Portant ce développement (3) dans l'intégrale considérée relative à l'arc C_k , on a

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(z) \psi(z-x) dz = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} A_\mu^{(k)} \psi^{(\mu)}(\alpha_k - x)$$

où

$$(4') \quad A_\mu^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \dots \mu} \cdot \int_{C_k} (z - \alpha_k)^\mu f(z) dz.$$

En faisant la somme des n développements tels que (4) ainsi obtenus ($k=1, 2, \dots, n$), on a, d'après l'équation (2), le développement suivant de $f(x)$

$$(5) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} A_\mu^{(k)} \psi^{(\mu)}(\alpha_k - x),$$

développement valable pour tous les points de l'aire S . Il est à remarquer que la somme

$$A_0^{(1)} + A_0^{(2)} + \dots + A_0^{(n)}$$

est nulle, car cette somme est égale, au facteur $2\pi i$ près, à l'intégrale

$\int f(z) dz$ prise sur le contour de l'aire S , et que les coefficients $A_\mu^{(k)}$ donnés par la formule (4') ne dépendent pas de la fonction ψ .

La série qui forme le second membre de l'équation (5) peut être convergente en d'autres points que ceux de l'aire S . Désignons d'une façon générale par $\varphi(x)$ la somme de cette série lorsqu'elle existe

$$(6) \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(k)} \psi^{(\mu)}(a_k - x);$$

on aura

$$(7) \quad \varphi(x) = f(x)$$

en tous les points de l'aire S .

Soit maintenant ξ un point situé en dehors de l'aire S et en dehors des cercles auxquels appartiennent les arcs C_k ; supposons de plus que tous les points

$$\xi + a_1, \xi + a_2, \dots, \xi + a_r, \dots$$

soient en dehors de ces mêmes cercles. Dans ces conditions la série (6) reste convergente quand on y remplace x par ξ ; en effet le développement en série (3) est toujours valable, car la fonction $\psi(z - \xi)$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle de centre a_k et de rayon plus grand que celui du cercle dont fait partie l'arc C_k . Mais voyons quelle est alors la valeur de la somme $\varphi(\xi)$ de la série (6). Deux cas se présentent:

1^o) aucun des points

$$\xi + a_1, \xi + a_2, \dots, \xi + a_r, \dots$$

n'est dans l'aire S ; alors

$$\varphi(\xi) = 0;$$

car l'intégrale qui forme le second membre de l'équation (1) est nulle pour $x = \xi$, la fonction

$$f(z) \psi(z - \xi)$$

étant holomorphe dans l'aire S ;

2^o) un certain nombre des points

$$\xi + a_1, \xi + a_2, \dots, \xi + a_r, \dots$$

sont dans l'aire S ; soient, par exemple, les m points

$$\xi + a_{\lambda_1}, \xi + a_{\lambda_2}, \dots, \xi + a_{\lambda_m};$$

alors on a

$$(8) \quad \varphi(\xi) = R_{\lambda_1} f(\xi + a_{\lambda_1}) + R_{\lambda_2} f(\xi + a_{\lambda_2}) + \dots + R_{\lambda_m} f(\xi + a_{\lambda_m});$$

en effet la fonction $f(z) \psi(z - \xi)$ admet alors dans l'aire S les m pôles

$$\xi + a_{\lambda_1}, \xi + a_{\lambda_2}, \dots, \xi + a_{\lambda_m}$$

avec les résidus respectifs

$$R_{\lambda_1} f(\xi + a_{\lambda_1}), R_{\lambda_2} f(\xi + a_{\lambda_2}), \dots, R_{\lambda_m} f(\xi + a_{\lambda_m}).$$

Si, au contraire, le point ξ est tel que ce point lui-même ou l'un des points

$$\xi + a_1, \xi + a_2, \dots, \xi + a_r, \dots$$

soient dans l'intérieur de l'un des cercles auxquels appartiennent les arcs C_k , la série (6) devient divergente quand on y remplace x par ξ . En effet dans ce cas l'un au moins des développements tels que (3) est divergent.

Cas particuliers.

I. Lorsque le point x décrit l'aire S , le point $x - a_r$ décrit une aire S_r égale à S limitée par n arcs de cercles

$$C_1^{(r)}, C_2^{(r)}, \dots, C_n^{(r)}.$$

Supposons les pôles a_r distribués de telle façon qu'aucune des aires

$$S, S_1, S_2, \dots, S_r, \dots$$

n'ait un point commun avec une autre d'entre elles ou avec les cercles auxquels appartiennent les arcs

$$C_k, C_k^{(1)}, C_k^{(2)}, \dots, C_k^{(r)}, \dots$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Alors la série (6) est convergente en tous les points de chacune de ces aires. En effet soit ξ un point de l'aire S_μ aucun des points $\xi + a_r$ ne peut se trouver dans l'intérieur du cercle C_k , car si le point $\xi + a_r$ était dans l'intérieur de ce cercle le point $\xi + a_r - a_r$ ou ξ appartiendrait à la fois à l'aire S_μ et au cercle $C_k^{(r)}$, ce qui est contre l'hypothèse.

Désignons par x un point de l'aire S , on a pour ce point l'équation (7). Le point $\xi = x - a_r$ appartient à l'aire S_r et la série est convergente en ce point. Pour obtenir la valeur de la somme $\varphi(\xi)$ de cette série remarquons que parmi les points

$$\xi + a_1, \xi + a_2, \dots, \xi + a_r, \dots$$

un seul, le point $\xi + a_r = x$ est situé dans l'aire S . En effet si un autre de ces points, $\xi + a_\mu$ par exemple, appartenait à l'aire S , le point $\xi + a_\mu - a_\mu$ ou ξ appartiendrait à la fois à l'aire S_μ et à l'aire S_r , ce qui est contre l'hypothèse faite plus haut. Donc d'après la formule (8) on a

$$\varphi(\xi) = R_r f(\xi + a_r);$$

mais $\xi = x - a_r$ et $\varphi(x) = f(x)$ puisque x appartient à l'aire S , donc enfin

$$(9) \quad \varphi(x - \alpha_\nu) = R_\nu \varphi(x). \quad (\nu = 1, 2, \dots, \infty).$$

Cette relation remarquable a lieu pour toutes les valeurs de x correspondant à des points situés dans l'aire S .

II. Soit maintenant $\psi(x) = \frac{1}{x}$; on voit alors que toute fonction $f(x)$ holomorphe dans l'aire S est représentée dans cette aire par la série suivante

$$(10) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu^{(k)} \cdot \frac{1}{(x - \alpha_k)^\nu}$$

où

$$B_\nu^{(k)} = - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_k} (z - \alpha_k)^{\nu-1} f(z) dz.$$

La série qui forme le second membre de l'équation (10) est encore convergente si x est un point extérieur à l'aire S et aux cercles auxquels appartiennent les arcs C_k ; mais alors la somme de cette série est égale à zéro.

Considérons d'autres aires planes limitées également par des arcs de cercles; supposons que ces aires

$$S, S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(p)}$$

n'ont deux à deux aucun point commun et qu'elles sont toutes en dehors des cercles auxquels appartiennent tous les arcs limites. Alors on pourra former des développements analogues à (10) représentant une fonction holomorphe $f_1(x)$ dans $S^{(1)}$, une fonction holomorphe $f_2(x)$ dans $S^{(2)}$, ..., une fonction holomorphe $f_p(x)$ dans $S^{(p)}$. La somme du développement (10) et de tous les développements analogues sera une série de fractions rationnelles dont la somme est égale à $f(x)$ dans l'aire S , à $f_1(x)$ dans $S^{(1)}$, ... à $f_p(x)$ dans $S^{(p)}$. M. Weierstrass a déjà obtenu par d'autres considérations des séries de fractions rationnelles possédant des propriétés analogues; (voir „Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Aout 1880“).

III. Soit $\vartheta_1(z)$ la fonction ϑ_1 formée avec les périodes ω et ω' ; désignons par $Z(z)$ la fonction $\frac{d \log \vartheta_1(z)}{dz}$. Nous obtiendrons un autre cas particulier important en faisant $\psi(z) = Z(z)$. Les pôles de $Z(z)$ sont $m\omega + m'\omega'$, m et m' étant deux entiers quelconques. On considérera donc une aire S telle que, si x est un point quelconque de cette aire, tous les points $x + m\omega + m'\omega'$ soient à l'extérieur de l'aire S et à l'extérieur des cercles auxquels appartiennent les arcs limitant l'aire. Alors une fonction $f(x)$ holomorphe dans l'aire S est représentée dans cette aire par la série de fonctions doublement périodiques

$$(11) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{v=0}^{v=\infty} A_v^{(k)} Z^{(v)}(\alpha_k - x).$$

Le second membre de cette relation est une fonction doublement périodique; car, d'après une remarque générale, on a

$$A_0^{(1)} + A_0^{(2)} + \dots + A_0^{(n)} = 0.$$

Si donc $f(x)$ n'admet pas les périodes ω et ω' , les deux membres de l'équation (11), qui sont égaux en tous les points de l'aire S , sont différents dans les aires homologues de S dans les parallélogrammes des périodes.

IV. En prenant $\psi(z) = \frac{\omega}{\pi} \cotg \frac{\pi z}{\omega}$, l'on obtient de même le développement d'une fonction $f(x)$ en série de fonctions admettant la période ω .

(Les cas particuliers II, III, IV ont été exposés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris dans la Séance du 1^{er} mai 1882).

Evaluation du reste.

Revenons au cas général et proposons-nous d'évaluer une limite supérieure du reste de la série (5), en supposant que $f(z)$ reste finie sur le contour de l'aire S . Soit x un point de l'aire S ; proposons-nous d'abord de trouver une limite du reste du développement (4); désignons ce reste par $Q_m^{(k)}$;

$$(12) \quad Q_m^{(k)} = \sum_{\mu=m+1}^{\mu=\infty} A_\mu^{(k)} \psi^{(\mu)}(\alpha_k - x).$$

Appelons ϱ_k le rayon de l'arc C_k de centre α_k ; la plus petite des quantités positives

$$(13) \quad \text{mod.}(x + a_v - \alpha_k), \quad (v=1, 2, \dots, \infty)$$

est, d'après les hypothèses faites, plus grande que ϱ_k . Désignons par r_k un nombre plus petit que la plus petite des quantités (13) et plus grand que ϱ_k . La fonction $\psi(z - x)$ de la variable z est holomorphe dans le cercle de centre α_k et de rayon r_k ; d'ailleurs elle est finie sur la circonférence de ce cercle. Appelons M_k le maximum du module de $\psi(z - x)$ quand z décrit cette circonférence de centre α_k et de rayon r_k ; et désignons par $P_m^{(k)}$ le reste de la série (3) quand z occupe une position quelconque sur l'arc C_k :

$$P_m^{(k)} = \sum_{\mu=m+1}^{\mu=\infty} \frac{(z - \alpha_k)^\mu}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \mu} \psi^{(\mu)}(\alpha_k - x).$$

On a d'après un théorème connu sur l'évaluation du reste de la série de Taylor

$$\text{mod. } P_m^{(k)} \leq M_k Q_k \cdot \frac{\left(\frac{r_k}{\varrho_k}\right)^{m+1}}{\varrho_k - r_k}.$$

Alors le reste $Q_m^{(k)}$ de la série (4) est donné par

$$Q_m^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(z) P_m^{(k)} dz.$$

Si donc on appelle M'_k le maximum de module de $f(z)$ sur l'arc C_k et l_k la longueur de cet arc, on a

$$\text{mod. } Q_m^{(k)} \leq \frac{l_k}{2\pi} \cdot M_k M'_k Q_k \cdot \frac{\left(\frac{r_k}{\varrho_k}\right)^{m+1}}{\varrho_k - r_k};$$

ce qui donne la limite cherchée du reste de la série (4). On en déduit immédiatement la limite du reste de la série (5) qui est la somme de n séries telles que (4).

La convergence des séries employées dans ce mémoire est donc comparable à celle des *progressions géométriques*.

Tous les résultats précédents peuvent être étendus au cas où l'aire S serait à contour multiple, les arcs de cercle qui forment le contour tournant tous leur *convexité* vers l'intérieur de l'aire.

Paris, 23. Septembre 1882.