Notiz über eine Classe symmetrischer Determinanten.

Von

M. NOETHER in Erlangen.

Es könnte von Interesse sein, die Classe symmetrischer Determinanten kennen zu lernen, welche die folgenden beiden Arten als specielle Fälle umfasst:

1) die bekannte*) Determinante n^{ten} Grades, deren Reihen aus der ersten Reihe

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$$

durch cyklische Vertauschung aller Elemente entstehen, also die Resultante der beiden Formen:

$$f = \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i x^i,$$

$$\varphi = x^n - 1;$$

2) die Determinante $(2n)^{\text{ten}}$ Grades von der Eigenschaft**): wenn man die Elemente in vier Quadrate

$$\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}$$

von je 2^{n-1} Reihen zusammenfasst, so stimmen die Elemente des Theils A mit denen des gegenüberliegenden Theils D genau überein, ebenso die von B mit denen von C ; dasselbe gilt für die Zerlegung dieser Theile in je 4 weitere Quadrate; ebenso für diese letzteren, etc.

Die diese beiden Arten umfassende allgemeinere Determinante, welche bisher noch nicht bemerkt worden zu sein scheint, lässt sich ebenfalls als Resultante auffassen. Sei

$$(1) \quad f = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\mu} a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_\mu^{i_\mu}$$

*) Vgl für die Litteratur Baltzer's „Determinanten“, 4. Auflage, § 11., 1., 2., 3.

**) Vgl. Puchta, Denkschr. d. Wiener Akad., Bd. 38, p. 315, und meinen Aufsatz: Zur Theorie der Thetafunctionen etc., d. Annalen, XVI, p. 286; § 15.

eine (nicht homogene) Form, welche in der Variabeln x_ϱ bis zum Grade

$$n_\varrho - 1 \quad (n_\varrho > 1)$$

($\varrho = 1, 2, \dots, \mu$) aufsteigt; und weiter seien die Formen gegeben:

$$(2) \quad \varphi_1 = x_1^{n_1} - 1, \quad \varphi_2 = x_2^{n_2} - 1, \dots, \varphi_\mu = x_\mu^{n_\mu} - 1.$$

Die Resultante dieser $\mu + 1$ Formen wird:

$$(3) \quad R = \Pi_s \cdot \left\{ \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\mu} a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \varepsilon_1^{i_1} \varepsilon_2^{i_2} \dots \varepsilon_\mu^{i_\mu} \right\},$$

wo

$$(4) \quad \varepsilon_\varrho^{n_\varrho} = 1 \quad (\varrho = 1, 2, \dots, \mu),$$

und wo das Product Π_s über alle

$$n_1 n_2 \dots n_\mu$$

Werthsysteme der ε auszudehnen ist.

Die Resultante wird zugleich als Determinante Δ der $n_1 n_2 \dots n_\mu$ Formen

$$(5) \quad \varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \dots \varepsilon_\mu^{k_\mu} \sum a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \varepsilon_1^{i_1} \varepsilon_2^{i_2} \dots \varepsilon_\mu^{i_\mu},$$

die als lineare in den $n_1 n_2 \dots n_\mu$ Variabeln

$$\varepsilon_1^{h_1} \varepsilon_2^{h_2} \dots \varepsilon_\mu^{h_\mu}$$

aufgefasst werden, erhalten. Dabei bilden die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\mu$ ein System einer $n_1^{\text{ten}}, n_2^{\text{ten}}, \dots, n_\mu^{\text{ten}}$ Wurzel der Einheit.

Wir denken uns dabei die $n_1 n_2 \dots n_\mu$ Variabeln derart geordnet: zunächst kommen

$$1, \varepsilon_1, \varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_1^{n_1-1};$$

alsdann diese n_1 bez. mit $\varepsilon_2, \varepsilon_2^2, \dots, \varepsilon_2^{n_2-1}$ verbunden:

$$\begin{array}{ccccccc} \varepsilon_2, & \varepsilon_1 \varepsilon_2, & \varepsilon_1^2 \varepsilon_2, & \dots, & \varepsilon_1^{n_1-1} \varepsilon_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_2^{n_2-1}, & \varepsilon_1 \varepsilon_2^{n_2-1}, & \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^{n_2-1}, & \dots, & \varepsilon_1^{n_1-1} \varepsilon_2^{n_2-1}; \end{array}$$

alsdann alle diese $n_1 n_2$ der Reihe nach mit ε_3 , dann mit $\varepsilon_3^2, \dots$, mit $\varepsilon_3^{n_3-1}$ verbunden; etc. Ebenso denken wir uns die Factoren

$$\varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \dots \varepsilon_\mu^{k_\mu},$$

die vor den Zeichen Σ in den obigen $n_1 n_2 \dots n_\mu$ linearen Formen (5) stehen, geordnet. Die so geordnete Determinante Δ lässt sich folgendermassen definiren:

Δ ist eine symmetrische Determinante von $n_1 n_2 \dots n_\mu$ Reihen. Theilt man Δ durch $n_\mu - 1$ Horizontalstriche und ebensoviele Verticalstriche in n_μ^2 Quadrate Δ' von je $n_1 n_2 \dots n_{\mu-1}$ Reihen, so gehen die n_μ Horizontalreihen dieser Quadrate aus der ersten durch Wiederholung derselben cyklischen Vertauschung hervor, indem man nämlich jedes der n_μ Quadrate der ersten Reihe um ein Glied vorrückt. Theilt

man weiter jedes dieser n_μ^2 Quadrate Δ' analog in je $n_{\mu-1}^2$ Quadrate Δ'' , so gehen auch die $n_{\mu-1}$ Reihen solcher Quadrate, welche in einem Δ' enthalten sind, aus der ersten Reihe von $n_{\mu-1}$ Quadraten durch analoge cyklische Vertauschung hervor; ebenso bei der analogen Zertheilung jedes Δ'' in je $n_{\mu-2}^2$ Quadrate, etc.

So hat man z. B. für $\mu = 3$ und $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{000} & a_{100} & a_{010} & a_{110} & a_{001} & a_{101} & a_{011} & a_{111} & a_{002} & a_{102} & a_{012} & a_{112} \\ a_{100} & a_{000} & a_{110} & a_{010} & a_{101} & a_{001} & a_{111} & a_{011} & a_{102} & a_{002} & a_{112} & a_{012} \\ a_{010} & a_{110} & a_{000} & a_{100} & a_{011} & a_{111} & a_{001} & a_{101} & a_{012} & a_{112} & a_{002} & a_{102} \\ a_{110} & a_{010} & a_{100} & a_{000} & a_{111} & a_{011} & a_{101} & a_{001} & a_{112} & a_{012} & a_{102} & a_{002} \\ \\ a_{002} & a_{102} & a_{012} & a_{112} & a_{000} & a_{100} & a_{010} & a_{110} & a_{001} & a_{101} & a_{011} & a_{111} \\ a_{102} & a_{002} & a_{112} & a_{012} & a_{100} & a_{000} & a_{110} & a_{010} & a_{101} & a_{001} & a_{111} & a_{011} \\ a_{012} & a_{112} & a_{002} & a_{102} & a_{010} & a_{110} & a_{000} & a_{100} & a_{011} & a_{111} & a_{001} & a_{101} \\ a_{112} & a_{012} & a_{102} & a_{002} & a_{110} & a_{010} & a_{100} & a_{000} & a_{111} & a_{011} & a_{101} & a_{001} \\ \\ a_{001} & a_{101} & a_{011} & a_{111} & a_{002} & a_{102} & a_{012} & a_{112} & a_{000} & a_{100} & a_{010} & a_{110} \\ a_{101} & a_{001} & a_{111} & a_{011} & a_{102} & a_{002} & a_{112} & a_{012} & a_{100} & a_{000} & a_{110} & a_{010} \\ a_{011} & a_{111} & a_{001} & a_{101} & a_{012} & a_{112} & a_{002} & a_{102} & a_{010} & a_{110} & a_{000} & a_{100} \\ a_{111} & a_{011} & a_{101} & a_{001} & a_{112} & a_{012} & a_{102} & a_{002} & a_{110} & a_{010} & a_{100} & a_{000} \end{vmatrix}.$$

Für $\mu = 1$ hat man den oben genannten Fall (1), für

$$n_1 = n_2 = \dots = n_\mu = 2$$

den Fall (2).

Analytisch lässt sich die Eigenschaft der allgemeinen Determinante Δ so aussprechen: Sei

$$c_{jj'}$$

das Element von Δ , welches in der $(j+1)^{\text{ten}}$ Horizontal- und $(j'+1)^{\text{ten}}$ Verticalreihe gelegen ist; man bringe j und j' auf die Form:

$$(6) \quad \begin{cases} j = k_1 + k_2 n_1 + k_3 n_1 n_2 + \dots + k_\mu n_1 n_2 \dots n_{\mu-1}, \\ j' = h_1 + h_2 n_1 + h_3 n_1 n_2 + \dots + h_\mu n_1 n_2 \dots n_{\mu-1}, \end{cases}$$

wo

$$\begin{aligned} 0 &\leq k_\varrho < n_\varrho, \\ 0 &\leq h_\varrho < n_\varrho, \end{aligned} \quad (\varrho = 1, 2, \dots, n_\mu)$$

sind (oder

$$\begin{aligned} \frac{j - k_1 - k_2 n_1 - k_3 n_1 n_2 - \dots - k_{\varrho-1} n_1 n_2 \dots n_{\varrho-2}}{n_1 n_2 \dots n_{\varrho-1}} &\equiv k_\varrho \pmod{n_\varrho}, \\ \frac{j - h_1 - h_2 n_1 - h_3 n_1 n_2 - \dots - h_{\varrho-1} n_1 n_2 \dots n_{\varrho-2}}{n_1 n_2 \dots n_{\varrho-1}} &\equiv h_\varrho \pmod{n_\varrho}; \end{aligned}$$

dann wird $c_{jj'}$ der Coefficient von $\varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \dots \varepsilon_\mu^{k_\mu}$ in dem Ausdruck:

$$\varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \dots \varepsilon_\mu^{k_\mu} \sum a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \varepsilon_1^{i_1} \varepsilon_2^{i_2} \dots \varepsilon_\mu^{i_\mu},$$

d. h.

$$(7) \quad c_{jj'} = a_{h_1 - k_1, h_2 - k_2, \dots, h_\mu - k_\mu},$$

wo $h_\rho \equiv k \pmod{n_\rho}$ zu nehmen ist.

Die Determinante Δ hat bemerkenswerthe Eigenschaften. Als Resultante muss Δ mit $R(3)$ bis etwa auf einen numerischen Factor übereinstimmen. Dieser Factor wird $= 1$, also

$$(8) \quad \Delta = R,$$

wie man sieht, indem man alle Coefficienten von f , bis auf $a_{00} \dots 0$, zu 0 macht. Um direct nachzuweisen, dass Δ in das Product der $n_1 n_2 \dots n_\mu$ linearen Factoren (3) zerfällt, multiplicire man die $(j' + 1)^{\text{te}}$ Verticalreihe mit $\varepsilon_1^{h_1} \varepsilon_2^{h_2} \dots \varepsilon_\mu^{h_\mu}$, wo die h_ρ wie oben in (6) mit j' zusammenhängen, für jede j' ; addire alsdann alle Verticalreihen zur ersten und dividire endlich jede $(j + 1)^{\text{te}}$ Horizontalreihe bez. durch $\varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \dots \varepsilon_\mu^{k_\mu}$, wo die k_ρ auch aus (6) zu nehmen sind. Die Elemente der ersten Verticalreihe werden alsdann alle einander gleich, und zwar

$$= \sum a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \varepsilon_1^{i_1} \varepsilon_2^{i_2} \dots \varepsilon_\mu^{i_\mu},$$

ein Ausdruck, der also als Factor in Δ enthalten ist. Da hierbei die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ jedes Wurzelsystem (4) vorstellen können, so folgt die Gleichung (8).

Die Unterdeterminanten nach zweien einander gleichen Elementen von Δ sind ebenfalls einander gleich, so dass dieselben eine der Δ analoge Determinante bilden.

Denn seien die Unterdeterminanten nach den Elementen der ersten Horizontalreihe bez. mit

$$A_{i_1 i_2 \dots i_\mu}$$

bezeichnet; so hat man

$$(9) \quad \begin{cases} \sum a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} A_{i_1 i_2 \dots i_\mu} = \Delta, \\ \sum a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} A_{i_1 i_2 \dots i_\mu} = 0, \end{cases}$$

wo

$$i_\rho \equiv i_\rho - k_\rho \pmod{n_\rho}, \quad (\rho = 1, 2, \dots, \mu),$$

und die $k_1, k_2, \dots, k_\mu$ irgend welche von den i unabhängige Zahlen sind, die nicht alle $\equiv 0 \pmod{n_\rho}$ sind. Nimmt man nun die Elemente von Δ so allgemein an, dass Δ nicht $= 0$ ist, so bestimmen die $n_1 n_2 \dots n_\mu$ Gleichungen (9) die $A_{i_1 i_2 \dots i_\mu}$ eindeutig. Für die Unterdeterminanten nach den Elementen irgend einer andern Horizontalreihe bestehen aber genau dieselben Gleichungen (9), so dass also die-

jenige, welche in der ersten der Gleichungen (9) mit $a_{i_1 i_2 \dots i_\mu}$ multiplicirt ist, wiederum denselben Werth $A_{i_1 i_2 \dots i_\mu}$ erhält.

Für die Unterdeterminanten hat man die Relation:

$$(10) \left(\sum a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \varepsilon_1^{i_1} \varepsilon_2^{i_2} \dots \varepsilon_\mu^{i_\mu} \right) \left(\sum A_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \varepsilon_1^{n_1-i_1} \varepsilon_2^{n_2-i_2} \dots \varepsilon_\mu^{n_\mu-i_\mu} \right) = \Delta,$$

wo die ε ein beliebiges Wurzelsystem von (4) vorstellen.

Denn um das Product zur Linken zu bilden, kann man zunächst jedes Glied

$$a_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \varepsilon_1^{i_1} \varepsilon_2^{i_2} \dots \varepsilon_\mu^{i_\mu}$$

der ersten Summe mit dem entsprechenden Glied

$$A_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \varepsilon_1^{n_1-i_1} \varepsilon_2^{n_2-i_2} \dots \varepsilon_\mu^{n_\mu-i_\mu}$$

der zweiten Summe multipliciren, was nach der ersten Gleichung (9) Δ liefert; sodann jedes Glied

$$a_{i'_1 i'_2 \dots i'_\mu} \varepsilon_1^{i'_1} \varepsilon_2^{i'_2} \dots \varepsilon_\mu^{i'_\mu}$$

mit einem solchen

$$A_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \varepsilon_1^{n_1-i_1} \varepsilon_2^{n_2-i_2} \dots \varepsilon_\mu^{n_\mu-i_\mu},$$

für welches die i' und i wie oben in (9), bei gegebenen k_ϱ , zusammenhängen. Im letzteren Falle erhält man 0 nach (9), für jedes System k_ϱ ; womit die Gleichung (10) bewiesen ist.

Die Gleichung (10) liefert zugleich einen weiteren Beweis der Gleichung (8). Ausserdem giebt sie in Verbindung mit (8) eine *Productdarstellung für die Summe*:

$$\sum A_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \varepsilon_1^{n_1-i_1} \varepsilon_2^{n_2-i_2} \dots \varepsilon_\mu^{n_\mu-i_\mu}.$$

Mannheim, 31. December 1879.