Ueber die singulären Punkte der algebraischen Functionen und Curven.

Von O. STOLZ in Innsbruck.

Die Discussion der Singularitäten der ebenen algebraischen Curven fällt zusammen mit dem Probleme der analytischen Darstellung einer algebraischen Function einer Veränderlichen in der Umgebung eines singulären Punktes, welches zuerst von Puiseux gelöst, neuerdings durch Hrn. Hamburger eine einfache und dabei strenge Behandlung gefunden hat (Schlömlich Z. XVI. p. 461 ff.). Für die geometrische Aufgabe eine Uebersicht der möglichen Singularitäten herzustellen, wird man sich jedoch einfacher des von Plücker im 2. Abschnitte seiner „Theorie der algebraischen Curven“ gegebenen Verfahrens bedienen, das allerdings nicht wesentlich von dem eben erwähnten verschieden ist. Plücker's Darstellung soll im vorliegenden Aufsätze durch eine allgemeine und consequente Benützung der von ihm gebrauchten Differentialgleichungen der gegebenen Curvengleichung vervollständigt und abgeschlossen werden. Dabei ergibt sich auch ein anscheinend einfacher und strenger Nachweis des Lagrange'schen Satzes über die Entwicklung einer algebraischen Function, der in einigen Punkten mit dem des Hrn. Hamburger zusammentrifft.

Zunächst scheint eine Bemerkung aus den Elementen der Differentialrechnung nothwendig. Seit die Unhaltbarkeit des Satzes, dass jede stetige Function eine Ableitung haben müsse, erkannt ist, kommt es wesentlich darauf an, die *Existenz* des Differentialquotienten zu erweisen. Wenn z. B. in einem singulären Punkte die oben erwähnten Differentialgleichungen endliche Werthe des 1., 2. etc. Differentialquotienten liefern, so folgt daraus noch nicht, dass diese wirklich die Ableitungen der algebraischen Function in dem singulären Punkte seien, sondern nur, dass *diese Ableitungen, wenn sie wirklich existiren, keine anderen Werthe haben können*. Der Existenzbeweis ist allerdings leicht zu führen (vgl. Nr. 5.).

Im Folgenden kommen nur endliche singuläre Werthsysteme vor. Es bezeichnen x, y ein beliebiges lineares System von Punktcoordi-

naten, in dem aber nur endliche Werthe betrachtet werden. Es soll also der singuläre Punkt der Curve nicht auf der Unendlichkeitsgeraden des Systems liegen. Tritt dieser Fall aber ein, so geht man zu einem anderen linearen Coordinatensysteme über, was bei Ausschluss des Punktes $x = a \quad y = \infty$ am einfachsten durch die Transformation

$$x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'}$$

geleistet wird.

1. In der Differentialrechnung wird der Satz gezeigt: „Ist $x^0 y^0$ ein *endliches* Werthsystem, welches die algebraische Gleichung n^{ten} Grades in x, y :

$$(1) \quad F(x, y) = 0$$

erfüllt, dabei aber die Function $\frac{\partial F}{\partial y}$ nicht Null macht, so existirt eine Ableitung der Function y für $x = x^0 \quad y = y^0$.“ Man hat

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial F}{\partial x^0} : \frac{\partial F}{\partial y^0},$$

woraus unmittelbar die Existenz der höheren Ableitungen von y nach x folgt. Nunmehr können dieselben auch gefunden werden, indem man die auf einander folgenden Ableitungen nach x von $F(x, y)$, y als Function von x betrachtet, gleich Null setzt. Um die allgemeine Form dieser Gleichungen, welche im Folgenden kurz als Differentialgleichungen von $F=0$ bezeichnet werden, zu erhalten, benützt man den Satz, dass eine Function y , welche in einer bestimmten Umgebung des Punktes $x = x_0$ eindeutig definirt ist und p auf einander folgende Ableitungen besitzt, für diesen Bereich die Entwicklung

$$y = y^0 + y_1^0 (x - x^0) + \dots + \frac{y_p^0 + z}{p!} (x - x_0)^p$$

zulasse, wo z für $x = x_0$ verschwindet. Hier bezeichnen $y_1^0 \dots y_p^0$ die Werthe dieser Ableitungen für $x = x^0$. Setzt man den vorstehenden Ausdruck in die Entwicklung der ganzen Function $F(x, y)$ nach Potenzen von $x - x^0$ und $y - y^0$ und ordnet nach Potenzen von $x - x^0$, so müssen die Coefficienten der p ersten Glieder, weil sie z nicht enthalten, verschwinden. Man hat für

$$x - x^0 = \xi, \quad y - y^0 = \eta,$$

$$F(x^0 + \xi, y^0 + \eta) \equiv \sum_{r=0}^{r=\infty} F_r(\xi, \eta, x^0 y^0) = 0,$$

wobei man sich die Glieder derselben Dimension in $\xi \eta$ zu F_r zusammengefasst denkt. Ist nun zunächst

so folgt

$$F_r(\xi, \eta, x^0, y^0) = \sum_k^r \frac{1}{k!} \frac{\partial^k F_r(\xi, \xi y_1^0)}{\partial \eta^k} z'^k.$$

Setzt man hier

$$F_r(\xi, \xi y_1^0) = \xi^r \Phi_r,$$

so dass

$$(2) \quad \Phi_r = \frac{1}{r!} \sum_k^r \binom{r}{k} \frac{\partial^r F(x^0, y^0)}{\partial x^{r-k} \partial y^k} y_1^k$$

und

$$\frac{\partial^k F_r(\xi, \xi y_1^0)}{\partial \eta^k} = \xi^{r-k} \frac{\partial^k \Phi_r}{\partial y_1^k},$$

und führt den Werth von z'

$$z' = \frac{y_2^0}{2} \xi^2 + \dots + \frac{y_p^0 + z}{p!} \xi^p$$

ein, so wird der Coefficient von ξ^m ($m < p$) sein:

$$(3) \quad \sum_k^r \frac{\partial^k \Phi_r}{\partial y_1^k} \sum \frac{1}{q_1! q_2! \dots} \left(\frac{y_{\lambda_1}^0}{\lambda_1!} \right)^{q_1} \left(\frac{y_{\lambda_2}^0}{\lambda_2!} \right)^{q_2} \dots$$

Die zweite Summe enthält alle Glieder, welche der Bedingung genügen, dass, während die Indices λ als von einander verschieden und nicht unter 2 betragend vorausgesetzt werden, zugleich sei

$$(4) \quad \sum q = k, \quad \sum q \lambda = m + k - r.$$

Geht r in (3) von 1 bis m , so erhält man den vollständigen Coefficienten von ξ^m in $F(x^0 + \xi, y^0 + \eta)$, welcher, wie oben bemerkt, verschwinden muss. Dadurch ergibt sich die m^{te} Differentialgleichung von (1), welche mit Unterdrückung des Index 0 so geschrieben werden kann:

$$(5) \quad \sum_k^r \frac{1}{q_1! q_2! \dots} \frac{\partial^k \Phi_r}{\partial y_1^k} \left(\frac{y_{\lambda_1}}{\lambda_1!} \right)^{q_1} \left(\frac{y_{\lambda_2}}{\lambda_2!} \right)^{q_2} \dots = 0,$$

wobei die Indices λ , von einander verschieden und mindestens gleich 2, und die Exponenten q alle aus den Gleichungen (4) folgenden Werthe annehmen, wenn r die Zahlen 1, 2 ... m durchläuft. Aus diesen Gleichungen ergibt sich ferner

$$\sum q(\lambda - 2) = m - (r + k),$$

somit $r + k \leq m$, wozu noch zu bemerken, dass $k \leq r$. Für $k = 0$ folgt $r = m$; für $k = 1$, $r = 1$ folgt $\lambda_1 = m$, so dass der kleinste Werth von $k + r$ 2 ist. Man fügt daher zu bequemerer Bestimmung

der in (5) vorkommenden Indices zu den Gleichungen (4) noch die folgenden:

$$(6) \quad 2 \leq r + k \leq m; \quad k \leq r.$$

Die Formel (5), die bisher noch nicht gebraucht worden zu sein scheint, liefert das bequemste Mittel, um die Differentialgleichungen von (1) independent zu entwickeln. Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass die numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder immer dieselben bleiben.

Indem man zuerst die zulässigen Werthe von k , welche von 0 bis $\frac{m}{2}$ ansteigen, ansetzt, hierauf die zugehörigen r nach (6), endlich die aus (5) folgenden λ, ϱ , — findet man die Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} m=1, & \Phi_1=0, \\ m=2, & \Phi_2 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \cdot \frac{y_2}{2} = 0, \\ m=3, & \Phi_3 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} \cdot \frac{y_2}{2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \cdot \frac{y_3}{6} = 0, \\ m=4, & \Phi_4 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_1} \cdot \frac{y_2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y_1^2} \cdot \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} \cdot \frac{y_3}{6} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \cdot \frac{y_4}{24} = 0 \end{cases}$$

u. s. w.

Die Functionen Φ_r wurden auch von Plücker gebraucht (Theorie d. algebr. Curven p. 156), wo auch die Differentialgleichungen von (1) in vorstehender Gestalt vorkommen.

2. Es scheint nicht unwesentlich zu bemerken, dass mit Benutzung der Gleichungen (5) die Convergenz der unendlichen Reihe

$$(7^*) \quad \eta = y_1^0 \xi + \frac{y_2^0}{2!} \xi^2 + \frac{y_3^0}{3!} \xi^3 + \dots$$

für solche Werthe von ξ , deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze nicht übersteigt, gezeigt werden könne. Wir setzen

$$(8) \quad F(x^0 + \xi, y^0 + \eta) \equiv G(\xi, \eta) \equiv \sum_{i,k} a_{i,k} \xi^i \eta^k = 0,$$

wobei wir uns noch weiter die Exponenten i, k , deren kleinster Werth 1 ist, *ins Unendliche wachsend* vorstellen können, so dass die linke Seite von (8) *eine unendliche Reihe bezeichnet, von der angenommen wird, dass sie convergire für alle reellen und complexen Werthe der ξ, η , welche der Bedingung genügen:*

$$|\xi| \leq a, \quad |\eta| \leq b^*).$$

*) Nach Weierstrass und Grassmann wird anstatt „Modul“ einer complexen Zahl ξ „absoluter Betrag“ gesagt und dafür die Bezeichnung $|\xi|$ gebraucht.

Setzen wir nun

$$\eta = \alpha \xi + \beta \eta'$$

und entsprechend

$$G(\xi, \eta) \equiv G'(\xi, \eta'),$$

so convergirt die Reihe G' sicherlich noch, sobald $|\xi| < a$ und $|\alpha \xi + \beta \eta'| \leq b$. Damit aber die Reihe G' nach Potenzen von ξ, η' geordnet werden könne, ist es hinreichend

$$\xi_0 \leq a, \quad \alpha_0 \xi_0 + \beta_0 \eta'_0 \leq b$$

zu nehmen, worin die Grössen mit dem Index 0 die absoluten Beträge bedeuten. Man hat also

$$\beta_0 \eta'_0 \leq b - \alpha_0 \xi_0.$$

Was auch immer der Werth von α_0 sein möge, so kann man sich ξ_0 zugleich $< a$ und $< \frac{b}{\alpha_0}$ denken, so dass zwei positive Zahlen $a' b'$ existiren von der Art, dass für $|\xi| \leq a' |\beta \eta'| \leq b'$ die Reihe G' convergirt.

Nun denken wir uns α so bestimmt, dass aus G' das Glied mit ξ entfällt. Da

$$\frac{\partial G'}{\partial \xi} = \frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \alpha,$$

so findet man nun α aus

$$0 = a_{10} + \alpha a_{01};$$

denn a_{01} ist nach Voraussetzung nicht 0.

Setzt man $\beta = b'$, $\xi = a' \xi'$, so hat man an Stelle von $G(\xi, \eta) = 0$ die Gleichung

$$(9) \quad H(\xi', \eta') \equiv \sum_{i,k} b_{i,k} \xi'^i \eta'^k - \eta' = 0, \quad (i, k = 2, 3 \dots \infty),$$

in der die linke Seite noch convergirt für $\xi' = 1, \eta' = 1$.

Hier ist für $\xi' = 0, \eta' = 0$

$$\eta'_1 = \frac{d\eta'}{d\xi'} = 0;$$

also

$$\frac{\partial^r H(0,0)}{\partial \xi'^{r-k} \partial \eta'^k} = (r-k)! k! b_{r-k,k},$$

ferner nach (2)

$$(10) \quad \Phi_r = \frac{1}{r!} \frac{\partial^r H(0,0)}{\partial \xi'^r} = b_{r,0},$$

$$\frac{\partial^k \Phi_r}{\partial \eta'^k} = \frac{1}{(r-k)!} \frac{\partial^r H(0,0)}{\partial \xi'^{r-k} \partial \eta'^k} = k! b_{r-k,k}.$$

In der Gleichung (5) tritt nun das Glied $\frac{\eta'_m}{m!}$ auf die rechte Seite, woraus man sofort erkennt, dass man eine dem absoluten Betrage

nach grössere Zahl als $\frac{\eta'_m}{m!}$ erhält, wenn man in (9) die b_{ik} durch eine *endliche* positive Grösse B ersetzt, die sie sämmtlich ihrem absoluten Betrage nach übertrifft. Die eben erwähnten positiven Zahlen sind aber die Werthe der Ableitungen einer Function ξ , welche durch die Gleichung

$$0 = \xi - B \sum_k (\xi + \xi')^k = \xi - \frac{B(\xi + \xi')^2}{1 - \xi - \xi'},$$

definit wird, wobei man sich aber ξ', ξ so beschränkt denken muss, dass

$$|\xi'| + |\xi| < 1.$$

Wird $\xi + \xi' = z$ gesetzt, so folgt daraus

$$z^2(1+B) - z(1+\xi') + \xi' = 0,$$

also

$$2(1+B)z = (1+\xi') - \sqrt{1 - 2\xi'(2B+1) + \xi'^2},$$

die Wurzel mit positivem reellen Theile genommen, damit für $\xi' = 0$ $z = 0$ sei. Diese Wurzelgrösse lässt sich in eine Reihe nach positiven Potenzen von ξ' entwickeln, wenn man sich

$$2\xi'(2B+1) - \xi'^2 < 1$$

denkt, was stets erfüllt ist durch

$$|\xi'| < \frac{1}{4B+3}.$$

Die Coefficienten dieser Potenzreihe sind aber dem absoluten Betrage nach durchaus grösser als die der Entwicklung

$$\eta' = \frac{\eta_2^{0'}}{2!} \xi'^2 + \frac{\eta_3^{0'}}{3!} \xi'^3 + \dots,$$

welche somit mindestens denselben Convergenzkreis besitzt als die erstere. Setzt man hier wieder

$$\xi' = \frac{\xi}{a'}, \quad \beta \eta' = \eta - \alpha \xi = \eta - \eta_1^0 \xi, \quad \beta \eta'_m = a'^m \eta_m, \quad (m \geq 2),$$

so erhält man genau die Reihe (7*) *).

3. Sollen für den Punkt $x^0 y^0$ nach einander $y_2^0 = y_3^0 = \dots = y_m^0 = 0$ sein, so müssen nach (5) die Gleichungen

$$\Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0 \dots \Phi_m = 0$$

bestehen. Die Tangente hat, da y_{m+1}^0 von 0 verschieden vorausgesetzt wird, mit der Curve eine Berührung von der m^{ten} Ordnung.

4. Der nächste Fall, dass für den Punkt $x^0 y^0$ $\frac{\partial F}{\partial y}$ verschwindet,

*) Bemerkenswerth an diesem Beweise ist, dass er nichts weiter voraussetzt als den Satz von Cauchy über die Doppelreihen.

während $\frac{\partial F}{\partial x}$ von Null verschieden ist, lässt sich, wie auch Hamburger (a. a. O. p. 467) nach Weierstrass bemerkt, mittelst des Theorems in Nr. 2. erledigen. Man findet jetzt offenbar

$$(11) \quad \xi = \frac{x_m^0}{m!} \eta^m + \frac{x_{m+1}^0}{(m+1)!} \eta^{m+1} + \dots,$$

wovon x_m den m^{ten} Differentialquotienten von x nach y bezeichnet. Der Allgemeinheit wegen ist angenommen, dass die Gerade $x = 0$ mit der Curve eine Berührung von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung habe.

Die Gleichung (11) bringt man auf die Form

$$\frac{\xi}{\alpha} = \eta^m \{1 + \beta_1 \eta + \beta_2 \eta^2 + \dots\},$$

da α nicht Null sein soll. Hier zieht man die m^{te} Wurzel und entwickelt rechts nach dem polynomischen Satze. Dann kehrt man die Reihe um, wodurch man findet

$$\eta = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}} + \gamma_2 \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{m}} + \dots,$$

d. i. eine Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von $\xi^{\frac{1}{m}}$; indem der Punkt $x^0 y^0$ ein m -facher Verzweigungspunkt der Function y ist.

5. Nun möge der Punkt $x^0 y^0$ singulär sein, d. i. es sollen für diese Werthe $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ zugleich verschwinden.

Denken wir uns diese Bedingungsgleichungen, sowie die etwa noch ausserdem bestehenden *formal* in die Gleichungen (5) eingeführt, so erscheinen die ersten derselben identisch erfüllt, während aus den folgenden die Schlussglieder verschwinden. Man zeigt nun leicht den Satz: „Angenommen, den p ersten Gleichungen des Systems (5) genüge ein System von endlichen Werthen $y_1^0, y_2^0 \dots y_m^0$ ($p \geq m$), von denen der letzte aus der p^{ten} Gleichung entnommen werde; so giebt es immer einen Functionszweig, für welchen diese Grössen die m ersten Ableitungen im Punkte $x^0 y^0$ sind.“

Denn setzt man in $F(x, y) = 0$

$$x = x^0 + \xi, \quad y = y^0 + y_1^0 \cdot \xi + \dots + \frac{y_m^0 + z}{m!},$$

so folgt aus der transformirten Gleichung stets für $\xi = 0$ u. A. auch $z = 0$. Die letztgenannte Gleichung findet man wie in Nr. 1., indem man nur statt $y_m^0 y_m^0 + z$ oder z' schreibt und alle folgenden Coefficienten y_{m+1}^0 etc. Null setzt. Bezeichnet man die linke Seite von (5) mit K_m und bedenkt, dass die Gleichungen $K_1 = 0 \dots K_{p-1} = 0$ in Beziehung auf $y_m, y_{m+1} \dots$ identisch sind, so folgt offenbar

$$(12) \quad \xi^p K_p(z') + \xi^{p+1} K_{p+1}(z') + \dots = 0.$$

Hier ist

$$K_p(z') = K_p(y_m^0 + z) = \sum_k \frac{\partial^k K_p}{\partial y_m^{0k}} \cdot \frac{z^k}{k!},$$

wenn f den Grad von $K_p = 0$ in y_m bezeichnet. Von den Coefficienten der letzten Function verschwindet der erste K_p sicher, vielleicht auch noch einige folgende, aber *gewiss* nicht alle, da y_m^0 eben aus $K_p = 0$ bestimmt wurde. Somit geht (12) über in

$$\left(\frac{\partial^k K_p}{\partial y_m^{0k}} \cdot z^k + \dots \right) + \xi K_{p+1}(z') + \dots = 0,$$

woraus unmittelbar unsere Behauptung folgt.

6. Um zur analytischen Darstellung der Function y in der Umgebung des singulären Punktes x^0, y^0 zu gelangen, ist vor Allem eine nähere Betrachtung des Systems der Gleichungen (5) erforderlich.

Wir nehmen sogleich an, dass dieser Punkt i -fach sei, d. h. dass *alle partiellen Ableitungen der $F(x, y)$ bis einschliesslich der $(i-1)^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden*. Dann verschwinden die $i-1$ ersten Differentialgleichungen identisch, während aus den folgenden alle Glieder hinausfallen, wofür $r < i$. Setzen wir in (4) und (6)

$$m = i + q, \quad r = i + r',$$

so folgt

$$\begin{aligned} \Sigma \varphi &= k, & \Sigma \varphi \lambda &= q - r' + k, \\ 1 &\leq r' + k \leq q, & k &\leq i + r'. \end{aligned}$$

Die untere Grenze für $r' + k$ wird wieder direct ermittelt. Die Zahl k geht nicht über q hinaus; aber sie erreicht diesen Werth nur, so lange $q \leq i$. Aus diesen Formeln lässt sich entnehmen, dass der noch zurückbleibende Theil der $(i+q)^{\text{ten}}$ Differentialgleichung grosse Aehnlichkeit besitze mit der q^{ten} Differentialgleichung, indem jedenfalls alle Glieder der letzteren darin vorkommen, nur mit um i Einheiten vorgeschobenem Index der Φ . — Der Anfang des reducirten Systems ist demnach:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} m=i, & \quad \Phi_i = 0, \\ m=i+1, & \quad \Phi_{i+1} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} \cdot \frac{y_2}{2} = 0, \\ m=i+2, & \quad \Phi_{i+2} + \frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial y_1} \cdot \frac{y_2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y_1^2} \cdot \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} \cdot \frac{y_3}{6} = 0, \\ m=i+3, & \quad \Phi_{i+3} + \frac{\partial \Phi_{i+2}}{\partial y_1} \cdot \frac{y_2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_{i+1}}{\partial y_1^2} \cdot \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial y_1^3} \cdot \left(\frac{y_2}{2}\right)^3 \\ & \quad + \left(\frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial y_1} + \frac{y_2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y_1^2}\right) \frac{y_3}{6} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} \cdot \frac{y_4}{24} = 0 \end{aligned} \right.$$

u. s. w.

Aus den *angeschriebenen Gleichungen* entfallen für $i < 3$ noch einige Glieder.

Nun sei y_1^0 eine *endliche* Wurzel der Gleichung $\Phi_i = 0$. Ist dieselbe einfach, so folgen aus den Gleichungen (13) auch endliche Werthe von $y_2^0, y_3^0, y_4^0 \dots$. Wenn sie aber wiederholt — wir wollen sofort annehmen *i-mal* — vorkommt, so folgt im Allgemeinen kein endlicher Werth von y_2 . Erst wenn auch $\Phi_{i+1} = 0$, so folgt aus der 3. der Gleichungen (13) ein endlicher Werth von y_2 , so lange $\frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial y_1}$ nicht Null ist. Ist dieses Null, so müsste auch $\Phi_{i+2} = 0$ genommen werden, dann aber giebt die letzte der Gleichungen (13) im Allgemeinen zwei endliche Werthe für y_2 .

Indem wir so fortfahren, d. h. ausser den Gleichungen

$$\Phi_i = 0, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} = 0 \dots \frac{\partial^{i-1} \Phi_i}{\partial y_1^{i-1}} = 0$$

noch annehmen, dass

$$(13^*) \quad \frac{\partial^k \Phi_{i+r'}}{\partial y_1^k} = 0$$

für alle Werthe von r', k , die der Bedingung genügen,

$$1 \leq k + r' \leq i - 1,$$

so verschwinden die Differentialgleichungen $i + 1, i + 2 \dots 2i - 1$ identisch, während aus der $2i^{\text{ten}}$ nur diejenigen Glieder zurückbleiben, wofür $k + r' = 2i$, d. h. nur Glieder mit y_2 , indem nun

$$\sum q(\lambda - 2) = q - (r' + k) = 0.$$

Die genannte Differentialgleichung reducirt sich also auf

$$(13^{**}) \quad \sum_g \frac{1}{g!} \frac{\partial^g \Phi_{2i-g}}{\partial y_1^g} \left(\frac{y_2}{2}\right)^g = 0.$$

Somit erhält y_2 jetzt *i endliche*, im Allgemeinen von einander verschiedene Werthe. Die Endlichkeit folgt daraus, dass der Coefficient von $y_2^i \frac{\partial^i \Phi_i}{\partial y_1^i}$ somit von Null verschieden ist.

Hier werden offenbar wieder ähnliche Specialisirungen beginnen, wenn die Werthe y_2 gruppenweise oder vollständig einander gleich werden. Wir können dieses leicht übersehen, *wenn wir uns die Gleichung (5) nach $y_h, y_{h+1}, \dots y_m$ geordnet denken.*

7. Bezeichnet man denjenigen Theil der m^{ten} Differentialgleichung von $F = 0$, welcher die Grössen $y_h, y_{h+1}, \dots y_m$ nicht enthielt, mit $\Phi_m^{(h-2)}$, so erweist sich der Coefficient des Gliedes

$$\frac{1}{\sigma_1! \sigma_2! \dots} \left(\frac{y_{\mu_1}}{\mu_1!} \right)^{\sigma_1} \left(\frac{y_{\mu_2}}{\mu_2!} \right)^{\sigma_2} \dots \dots (h \leq \mu_1 < \mu_2 \dots \leq m)$$

in ebenderselben Gleichung, d. i.

$$(14) \quad \sum_{\lambda, \varrho} \frac{1}{\varrho_1! \varrho_2! \dots} \frac{\partial^k \Phi_r}{\partial y_1^k} \left(\frac{y_{\lambda_1}}{\lambda_1!} \right)^{\varrho_1} \left(\frac{y_{\lambda_2}}{\lambda_2!} \right)^{\varrho_2} \dots, \quad$$

$$(15) \quad \begin{cases} \sum \varrho = k - \sum \sigma, \\ \sum \lambda \varrho = m - r + k - \sum \sigma \mu \end{cases}$$

als identisch mit

$$(16) \quad \{ (h-1)! \}^l \frac{\partial^l \Phi_s^{(h-2)}}{\partial y_{h-1}^l},$$

wo

$$\sum \sigma = l, \quad m + l(h-1) - \sum \sigma \mu = s$$

gesetzt sind. In der That bestehen für die Indices und Exponenten der y_{h-1}^l enthaltenden Glieder von $\Phi_s^{(h-2)}$ nach (4) genau die Relationen (15). Auch die Uebereinstimmung der numerischen Factoren in (14) und (16) lässt sich leicht nachweisen. Steht in $\Phi_s^{(h-2)}$ ein Glied mit $\frac{1}{(\varrho+l)!} \left(\frac{y_{h-1}}{h-1!} \right)^{\varrho+l}$, so in (16) eines mit $\frac{(\varrho+l) \dots (\varrho+l)}{(\varrho+l)!} \left(\frac{y_{h-1}}{(h-1)!} \right)^{\varrho}$ oder $\frac{1}{\varrho!} \left(\frac{y_{h-1}}{(h-1)!} \right)^{\varrho}$ genau wie in (14).

Demnach erscheint jetzt die Gleichung (5) in der Gestalt:

$$(17) \quad \sum_{\mu, \sigma} \frac{1}{\sigma_1! \sigma_2! \dots} \frac{\partial^l \Phi_s^{(h-2)}}{\partial y_{h-1}^l} \left(\frac{y_{\mu_1}}{h(h+1) \dots \mu_1} \right)^{\sigma_1} \left(\frac{y_{\mu_2}}{h(h+1) \dots \mu_2} \right)^{\sigma_2} \dots = 0.$$

Dabei genügen die Zahlen μ, σ den Gleichungen

$$(18) \quad \sum \sigma = l, \quad \sum \sigma \mu = m + l(h-1) - s.$$

Aus der letzteren folgt, da $\sum \sigma \mu \leq m$, $s \geq l(h-1)$; wie auch unmittelbar aus der Bedeutung von $\Phi_s^{(h-2)}$ geschlossen wird. Da ferner nach (18)

$$(18^*) \quad \sum \sigma (\mu - h) = m - (s + l),$$

so ist nothwendig

$$s + l \leq m,$$

also auch

$$(19) \quad lh \leq s + l \leq m$$

und somit die untere Grenze für $s + l$ h , denn für $l = 0$ folgt $s = m$.

Will man die Differentialgleichungen von $F = 0$ in der Form (18) entwickeln, so stellt man zuerst die Werthe von l auf, welche

von 0 bis $m : h$ gehen; hierauf die zugehörigen s nach (19), endlich die Systeme μ, σ .

So findet man z. B. für $h = 3$

$$m = 1, \quad \Phi_1' = 0,$$

$$m = 2, \quad \Phi_2'' = 0,$$

$$m = 3, \quad \Phi_3'' + \frac{\partial \Phi_2''}{\partial y_2} \cdot \frac{y_3}{3} = 0,$$

$$m = 4, \quad \Phi_4'' + \frac{\partial \Phi_3''}{\partial y_2} \cdot \frac{y_3}{3} + \frac{\partial \Phi_2''}{\partial y_2} \cdot \frac{y_4}{12} = 0,$$

$$m = 5, \quad \Phi_5'' + \frac{\partial \Phi_4''}{\partial y_2} \cdot \frac{y_3}{3} + \frac{\partial \Phi_3''}{\partial y_2} \cdot \frac{y_4}{12} + \frac{\partial \Phi_2''}{\partial y_2} \cdot \frac{y_5}{60} = 0,$$

$$m = 6, \quad \Phi_6'' + \frac{\partial \Phi_5''}{\partial y_2} \cdot \frac{y_3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_4''}{\partial y_2^2} \cdot \left(\frac{y_3}{2}\right)^2 \\ + \frac{\partial \Phi_4''}{\partial y_2} \cdot \frac{y_4}{12} + \frac{\partial \Phi_3''}{\partial y_2} \cdot \frac{y_5}{60} + \frac{\partial \Phi_2''}{\partial y_2} \cdot \frac{y_6}{360} = 0$$

u. s. w.

8. Man theile nun die Gleichungen (13) in Gruppen von je i und denke sich in der $(h-1)^{\text{ten}}$ Gruppe, welche die Gleichungen $(h-1)i+1$ bis hi umfasst, nach $y_h, y_{h+1} \dots$ geordnet. Setzt man in (18)

$$m = (h-1)i + q, \quad \mu_r = (h-2) + \delta_r, \quad s = (h-1)i + s',$$

so folgt neben

$$\sum \sigma = l, \quad \sum \sigma \delta = q + l - s'.$$

Dazu hat man nach (19)

$$1 \leq s' + l \leq q,$$

indem die Annahme $s'=0, l=1$ offenbar zulässig ist. *Beschränkt man sich auf diejenigen Glieder von (17), wo $s \geq (h-1)i$, so hat man Ausdrücke, welche eine ganz ähnliche Zusammensetzung zeigen, wie die linken Seiten der Gleichungen (13) der ersten Gruppe, wo m von $i+1$ bis $2i$ geht.* Es steht nur an Stelle von y_{δ_r}, y_{μ_r} , von $\frac{\partial^k \Phi_r}{\partial y_1^k}, \frac{\partial^k \Phi_s^{(h-2)}}{\partial y_{h-1}^k}$, wo $s = (h-1)i + r$.

Geht man nun von der Gleichung (13**), d. i. $\Phi_{2i}' = 0$ aus, indem man ihre sämtlichen Wurzeln als gleich annimmt, und setzt auch noch das Bestehen aller Gleichungen

$$(19^*) \quad \frac{\partial^i \Phi_{2i+s}'}{\partial y_2^i} = 0, \quad (1 \leq s' \leq i-1)$$

voraus, so erhält man für y_3 wieder eine Gleichung vom Grade i mit ausschliesslich *endlichen* Wurzeln. Dieselbe lautet

$$\sum_0^i \frac{1}{g!} \frac{\partial^g \Phi'_{3i-g}}{\partial y_2^g} \left(\frac{y_3}{3}\right)^g \equiv \Phi''_{3i} = 0.$$

Der Coefficient von $\left(\frac{y_3}{3}\right)^i$ ist wieder $\frac{1}{i!} \frac{1}{2^i} \frac{\partial^i \Phi_i}{\partial y_1^i}$, d. i. nicht Null.

In dieser Art schreitet die Specialisirung fort. Man gelangt allgemein zur h ten Differentialgleichung von $F=0$, aus welcher i endliche Werthe von y_h folgen als Wurzeln der Gleichung

$$\Phi_{hi}^{(h-1)} \equiv \sum_0^i \frac{1}{g!} \frac{\partial^g \Phi_{hi-g}^{(h-2)}}{\partial y_{h-1}^g} \left(\frac{y_h}{h}\right)^g = 0.$$

Man sieht, um alle möglichen Fälle in Betracht zu ziehen, hat man nur noch ein System von i Gleichungen zu betrachten, welche dieselbe Form besitzen, wie die Gleichungen (13), fortgesetzt bis zur $(2i-1)$ ten Differentialgleichung von $F=0^*$.

Eine ähnliche Bemerkung lässt sich machen im Falle, dass von den Wurzeln von $\Phi_i=0$ weniger als i , etwa g in *einen* endlichen Werth y_1^0 zusammenfallen. Man theilt dann die Differentialgleichungen von der $i+1$ an in Gruppen von je g , welche dann gruppenweise in dieselbe Form gebracht werden können, wie die Gleichungen in den Gruppen des g -fachen Punktes mit in eine einzige zusammenfallenden Tangenten. Man setzt jetzt

$$m = i + (h-2)g + q, \quad \mu_r = (h-2) + \delta_r, \\ s = (i-g) + (h-1)g + s',$$

worin q von 1 bis g geht.

9. Es ist nun zu zeigen, dass im i -fachen Punkte $x^0 y^0$ nur eine endliche Anzahl von Differentialquotienten je einen i -fachen endlichen Werth erhalten können, ohne dass die ganze Function $F(x, y)$ n ter Dimension in x, y einen wiederholten Factor in y — mit oder ohne x — enthält, oder ohne dass die Discriminante D von F , in Beziehung auf y genommen, identisch verschwindet. Dieses folgt unmittelbar aus der bekannten Identität

$$(a) \quad F \cdot V - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot U = D,$$

worin U, V ganze Functionen von x, y bezeichnen; in y bezüglich von den Graden $q-1, q-2$, wenn F in y vom Grade q ist ($q \leq n$). Die Discriminante D , welche nicht identisch verschwinden darf, ist eine ganze Function von x , welche den Grad $(2n-q)(q-1)$ nicht übersteigen kann.

*) Eine Andeutung dieser Gruppierung der Differentialgleichungen findet sich bei Plücker, Theorie der algebr. Curven p. 175.

Nimmt man an, dass für den singulären Punkt $x^0, y^0, y_1, y_2, \dots, y_h$ je einen endlichen i -fachen Werth besitzen und setzt in (α)

$$(\beta) \quad x = x^0 + \xi, \quad y = y^0 + y_1^0 \xi + \dots + \frac{y_h^0 + z}{h!} \xi^h,$$

so lässt sich zeigen, dass das niedrigste Glied in D nicht einen kleineren Exponenten haben könne, als $h(i-1) + 1$, so dass nothwendig

$$h(i-1) < (2n - q)(q-1)$$

sein müsse*) — womit der vorstehende Satz bewiesen ist.

Nach dem in Nr. 5. Bemerkten beginnt $F(x, y)$ nach Ausführung der Substitution (β) mit ξ^h , so dass nur noch das Ergebniss derselben in $\frac{\partial F}{\partial y}$ zu betrachten ist.

Es sei $\frac{\partial F}{\partial y} \equiv G$. Dann ist

$$\frac{\partial^r G}{\partial x^k \partial y^{r-k}} = \frac{\partial^{r+1} F}{\partial x^k \partial y^{r-k+1}}, \quad \frac{\partial^k \Psi_r}{\partial y_1^k} = \frac{\partial^{k+1} \Phi_{r+1}}{\partial y_1^{k+1}};$$

wo Ψ_r den Ausdruck (2), gebildet mit der Function G , bedeutet. Wenn ferner die linke Seite von (5), unter Zugrundelegung von G entwickelt, L_m heisst, so ist

$$(\gamma) \quad L_m \equiv 2 \frac{\partial K_{m+2}}{\partial y_2}.$$

Denn es geht L_m aus K_m hervor, indem man durchaus $\frac{\partial^k \Phi_r}{\partial y_1^r}$ mit $\frac{\partial^{k+1} \Phi_{r+1}}{\partial y_1^{r+1}}$ vertauscht. Andererseits werden die y_2 enthaltenden Glieder von K_{m+2} aus den Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} \sum \varrho + 1 &= k, \\ \sum \lambda \varrho + 2 &= m + 2 + k - r, \\ 4 \leq r + k &\leq m + 2, \quad (m \geq 2), \end{aligned}$$

Setzt man hier

$$k = k' + 1, \quad r = r' + 1,$$

so gehen die Gleichungen unmittelbar in (4) und (6) über. Somit stehen in (γ) zu beiden Seiten dieselben Glieder, welche, wie sich unmittelbar aus (5) ergibt, auch dieselben numerischen Coefficienten haben.

*) Diese Grenze für h ist nur im Falle $i = 2$ weiter als die von Hamburger gegebene (a. a. O. p. 479).

Der Punkt $x^0 y^0$ ist für $G = 0$ $(i-1)$ -fach. Die Werthe von y_1 ergeben sich aus der Gleichung:

$$\Psi_{i-1} \equiv \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} = 0;$$

somit hat nach der hier bestehenden Voraussetzung y_1 *einen* endlichen $(i-1)$ -fachen Werth und zwar ist derselbe y_1^0 wie in (β) . Nun verschwinden auch die Ausdrücke

$$L_i, \quad L_{i+1}, \quad \dots \quad L_{2i-3},$$

denn sie enthalten, nach y_2, y_3 etc. geordnet, dieselben Coefficienten wie

$$K_{i+2}, \quad K_{i+3} \dots K_{2i-1},$$

welche sämmtlich als Null angenommen werden (13^*) . Von L_{2i-2} bleibt nichts als

$$\frac{\partial \Phi'_{2i}}{\partial y_2} = 0,$$

so dass y_2 ebenfalls *einen* $(i-1)$ -fachen Werth besitzt, der mit y_2^0 übereinstimmt (13^{**}) . — Die Ausdrücke

$$L_{2i-1}, \quad L_{2i+1} \dots L_{3i-4}$$

verschwinden nun auch wegen (19^*) , indem sie sich von

$$K_{2i+1}, \quad K_{2i+2} \dots K_{3i-2}$$

nur dadurch unterscheiden, dass an Stelle von

$$\frac{\partial^l \Phi'_s}{\partial y_2^l} \text{ steht } \frac{\partial^{l+1} \Phi'_s}{\partial y_2^{l+1}}.$$

Von L_{3i-3} bleiben nur die Glieder, welche entstehen aus denjenigen Gliedern von K_{3i-1} , wofür $s + l = 3i - 1$, d. i. aus den y_3 enthaltenden (18^*) . Man findet also

$$0 = \frac{\partial \Phi''_{3i-1}}{\partial y_2} \equiv 3 \frac{\partial \Phi''_{3i}}{\partial y_3},$$

d. i. y_3 hat als $(i-1)$ -fachen Werth auch wieder y_3^0 aus (β) . Die hier benützte Identität ist ein specieller Fall der allgemeinen Formel

$$(\delta) \quad \frac{\partial \Phi_s^{(h-1)}}{\partial y_2} \equiv 3 \cdot 4 \dots h \cdot \frac{\partial \Phi_{s+h-2}^{(h-1)}}{\partial y_h}, \quad (h \geq 3),$$

die ähnlich wie (γ) gezeigt wird. Daraus folgt sofort, dass

$$L_{3i-2}, \quad L_{3i-1} \dots L_{4i-5}$$

in dem hier betrachteten Falle verschwinden, denn nach (γ) gehen dieselben aus den nach y_3, y_4 etc. geordneten

$$K_{3i}, \quad K_{3i+1} \dots K_{3i-3}$$

hervor, indem an Stelle von

$$\frac{\partial' \Phi_s''}{\partial y_3^l} \text{ tritt } \frac{\partial}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial' \Phi_s''}{\partial y_3^l} \equiv 3 \frac{\partial^{l+1} \Phi_{s+1}''}{\partial y_3^{l+1}}.$$

Von L_{4i-4} bleiben nur diejenigen Glieder, welche aus solchen von K_{4i-2} entstehen, wofür $s + l = 4i - 2$ also aus Φ_{4i-2}''' . Nach (δ) ist aber

$$\frac{\partial \Phi_{4i-2}'''}{\partial y_2} \equiv 12 \frac{\partial \Phi_{4i}'''}{\partial y_4};$$

mithin erhält im Punkte $x^0 y^0$ von $G = 0$ y_4 $(i-1)$ -mal denselben Werth y_4^0 wie in (β) .

So kann man fortfahren. Es ist offenbar, dass im Punkte $x^0 y^0$, wenn er als der Curve $G = 0$ angehörig betrachtet wird, $y_1 y_2 \dots y_h$ je denselben Werth $y_1^0 y_2^0 \dots y_h^0$ $(i-1)$ -mal annimmt, wie in $F = 0$ i -mal. Damit ist der oben gebrauchte Hilfssatz erwiesen.

10. Vollständige Aufzählung aller Fälle des Doppelpunktes ($i = 2$).

Man setzt in $F(x, y) = 0$

$$x = x^0 + \xi, \quad y = y^0 + (y_1^0 + z) \xi,$$

wo y_1^0 eine der Wurzeln der Gleichung $\Phi_2 = 0$, von welchen zugleich angenommen wird, dass dieselben sämmtlich endlich seien, d. i. $\frac{\partial^2 F}{\partial y^0{}^2}$ nicht Null. Nach dem in Nr. 5. Bemerkten folgt als transformirte Gleichung

$$(a) \quad G(z, \xi) \equiv \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1^0} z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y_1^0{}^2} z^2 + \xi \left(\Phi_3 + z \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_1^0} + \dots \right) + \dots = 0.$$

Ist $\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1^0}$ nicht 0, d. i. sind die Wurzeln von $\Phi_2 = 0$ verschieden, so ist $\frac{\partial G(0,0)}{\partial z}$ nicht 0 und man hat die Entwicklung

$$z = \frac{y_2^0}{2} \xi^2 + \dots.$$

Somit ergeben sich für $y = y^0$ zwei Entwicklungen nach ganzen positiven Potenzen von ξ . — Bestehen für einen dieser Zweige auch noch die Gleichungen

$$\Phi_3 = 0, \quad \Phi_4 = 0 \dots \Phi_h = 0,$$

so sind nach (7) auch noch $y_2^0 = y_3^0 = \dots = y_{h-1}^0$, es hat derselbe eine Berührung $(h-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit seiner Tangente.

Ist aber $\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1^0} = 0$, d. i. sind die Wurzeln von $\Phi_2 = 0$ einander gleich, jedoch Φ_3 von Null verschieden, so hat man noch $\frac{\partial G(0,0)}{\partial \xi}$ nicht Null und somit eine Entwicklung

$$\Phi_3 \xi = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y_1^0{}^2} z^2 + \dots,$$

mithin

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

und

$$y - y^0 = y_1^0 \xi + \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Die Entwicklung entspricht einer *Spitze erster Art*, indem die Curve auf einer Seite der Geraden $x - x^0 = 0$, aber auf beiden Seiten der Tangente liegt.

Mit der Bedingung $\Phi_3 = 0$ betreten wir die zweite Gruppe. Es hat jetzt y_2 zwei endliche Werthe, welche aus der Gleichung

$$(b) \quad \Phi_4' \equiv \Phi_4 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_1} \cdot \frac{y_2}{2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y_1^2} \frac{y_2^2}{8} = 0$$

folgen. Nun ist zu setzen

$$y - y^0 = y_1^0 \xi + \frac{y_2^0 + z}{2} \xi^2.$$

Das Resultat dieser Substitution ergibt sich ähnlich wie (a); es ist:

$$G'(z, \xi) \equiv \frac{\partial \Phi_4'}{\partial y_2^0} z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_4'}{\partial y_2^0{}^2} z^2 + \xi \left(\Phi_5' + z \frac{\partial \Phi_5'}{\partial y_2^0} + \dots \right) + \dots = 0.$$

So lange $\frac{\partial \Phi_4'}{\partial y_2}$ nicht 0, d. i. die Gleichung (b) verschiedene Wurzeln hat, hat man zwei gewöhnliche Entwicklungen und ihnen entsprechend zwei Curvenzweige, die unter einander und mit der Tangente eine Berührung 1. Ordnung aufweisen. Dieselben können bei reellem x^0 , y^0 , y_1^0 auch imaginär sein (isolirte Tangente mit reellem Berührungspunkte).

Im Falle reeller Zweige kann einer derselben mit der Tangente eine beliebige hohe Berührung erhalten. Ist

$$\Phi_4 = 0, \quad \Phi_5 = 0 \dots \Phi_h = 0,$$

so ist die Ordnung derselben $h - 2$.

Wenn $\frac{\partial \Phi_4'}{\partial y_2} = 0$, aber Φ_5' nicht Null ist, so folgt wie oben die Entwicklung

$$y - y^0 = y_1^0 \xi + \frac{y_2^0}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{5}{2}} + \dots;$$

offenbar eine *Spitze zweiter Art*, wenn y_2^0 nicht Null ist, sonst eine solche *erster Art*.

Mit der Gleichung $\Phi_5' = 0$ gelangen wir in die 3. Gruppe. So lange die Gleichung $\Phi_6'' = 0$ zwei verschiedene Wurzeln y_3 hat, bildet die Curve zwei Zweige mit einer Berührung 2. Ordnung, welche — wenn diese einander gleich werden — im Allgemeinen in eine Spitze zweiter Art übergehen, u. s. f.

Das vollständige Ergebniss dieser Untersuchung lautet:

„Bestehen ausser $\frac{\partial F}{\partial x^0} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y^0} = 0$ noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= 0, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} &= 0, & \Phi_3 &= 0, \\ \Phi_4' &= 0, & \frac{\partial \Phi_4'}{\partial y_1} &= 0, & \Phi_5' &= 0, \\ . & . & . & . & . & . \\ \Phi_{2h-2}^{(h-2)} &= 0, & \frac{\partial \Phi_{2h-2}^{(h-2)}}{\partial y_{h-1}} &= 0, & \Phi_{2h-1}^{(h-2)} &= 0, \end{aligned}$$

so wird y_h aus der Gleichung $\Phi_{2h}^{(h-1)} = 0$ bestimmt. Die Curve besteht in der Umgebung des Punktes $x^0 y^0$ aus zwei gewöhnlichen Zweigen, von denen gesagt wird, sie haben unter sich eine Berührung von der Ordnung $h - 1$. Die Berührung mit Tangente steigt *zugleich für beide Zweige* von der 1. bis zur $(h - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung; dann aber lässt sich dieselbe nur mehr für *einen* der Zweige erhöhen.

Tritt zu den vorstehenden Gleichungen noch die folgende

$$\frac{\partial \Phi_{2h}^{(h-1)}}{\partial y_h} = 0,$$

während $\Phi_{2h+1}^{(h-1)}$ von Null verschieden ist, so bildet die Curve eine Spitze und zwar von erster Art, wenn von y_2^0 ab eine ungerade — von zweiter Art, wenn eine gerade Zahl von Differentialquotienten oder gar keiner verschwindet. Doch gilt dieses nur bis einschliesslich bis y_{h-1}^0 . Ist ausser $y_2^0 \dots y_{h-1}^0$ auch noch $y_h^0 = 0$, so ist die Spitze stets von erster Art. — Die Ableitung y_{h+1}^0 ist stets unendlich. Die Bedingungen für das Verschwinden von $y_2^0 y_3^0 \dots y_k^0$ ($k \leq h - 1$) sind hier, da

$$\begin{aligned} (e) \quad \Phi_{2k}^{(k-1)} &= (\Phi_{2k} + \dots) + \left(\frac{\partial \Phi_{2k+1}}{\partial y_1} + \dots \right) \frac{y_k}{k!} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y_1^2} \left(\frac{y_k}{k!} \right)^2 + \dots \\ \Phi_2' &= 0, \quad \Phi_3 = 0 \dots \quad \Phi_{2k} = 0, \quad \Phi_{2k+1} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} &= 0, \quad \frac{\partial \Phi_4}{\partial y_1} = 0 \dots \quad \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial y_1} = 0. \end{aligned}$$

Für $k = h$ fällt die letzte Gleichung der ersten Zeile weg.

Als analytische Darstellung der Function y in der Umgebung des singulären Punktes $x^0 y^0$ ergeben sich im ersten Falle zwei Entwicklungen nach ganzen positiven Potenzen von $x - x^0$, im zweiten eine ebensolche nach Potenzen von $\sqrt{x - x^0}$.

Wenn die Gleichung $\Phi_2 = 0$ einen unendlichen Werth für y_1^0 anzeigt, so betrachtet man x als Function von y . Auf diese Weise

erhält man Entwicklungen von $x - x^0$ nach ganzen positiven Potenzen von $y - y^0$ oder $\sqrt[y - y^0]{y - y^0}$, welche stets umgekehrt werden können.

Die Herstellung von Gleichungen solcher Curven, welche eine gegebene Doppelpunkts-Singularität besitzen, lässt sich mittelst der Formeln (10) ausführen, wenn man $x^0 = y^0 = y_1^0 = 0$ setzt.

11. Mit Hülfe der in der vorhergehenden Nummer gegebenen Sätze folgt unmittelbar der allgemeine Satz von Lagrange: „In der Umgebung eines i -fachen endlichen Punktes $x^0 y^0$ existiren Entwicklungen von $y - y^0$ nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - x^0$.“ — wenn nur die Richtigkeit derselben für alle, weniger als i -fachen Punkte vorausgesetzt wird.

Betrachten wir zunächst eine endliche, g -fache Wurzel y_1^0 der Gleichung $\Phi_i = 0$ ($g \leq i$) und nehmen wir an, dass auch die entsprechenden g Werthe von $y_2 y_3 \cdots y_{h-1}$ je in einen endlichen Werth zusammenfallen, während y_h g beliebige endliche Werthe erhält, von denen ein e -facher y_h^0 hier aufgefasst wird. Die Zahl h ist stets eine endliche (Nr. 9.). Dann setzen wir in $F(x, y) = 0$

$$x = x^0 + \xi, \quad y = y^0 + y_1^0 \xi + \cdots + \frac{y_h^0 + z}{h!} \xi^h.$$

Nach der Bemerkung in Nr. 5. folgt

$$(20) \quad \sum_s \xi^{s-i-(h-1)g} \Phi_s^{(h-1)} (y_h^0 + z) = 0, \quad (s = i + (h-1)g \cdots hn),$$

indem in $\Phi_s^{(h-1)}$ an Stelle von y_h^0 $y_h^0 + z$ eintritt. Hier ist ferner

$$\Phi_s^{(h-1)} (y_h^0 + z) = \sum_0^f \frac{\partial^l \Phi_s^{(h-1)}}{\partial y_h^{0l}} \cdot \frac{z^l}{l!},$$

wo f den Grad von $\Phi_s^{(h-1)}$ in y_h bezeichnet, der bis $\frac{s}{h}$ ansteigt. Das erste Glied in (20) ist demnach

$$\frac{\partial^e \Phi_s^{(h-1)}}{\partial y_h^{0e}} \frac{z^e}{e!} + \frac{\partial^{e+1} \Phi_s^{(h-1)}}{\partial y_h^{0e+1}} \cdot \frac{z^{e+1}}{(e+1)!} + \cdots,$$

für $s = i + (h-1)g$. Nach Voraussetzung verschwindet hier das erste Glied nicht. Es ist also der Punkt $\xi = 0 \quad z = 0$ in (20) höchstens g -fach. Im Falle $g < i$, ist somit die Sache erledigt; denn nach Voraussetzung folgen für z Entwicklungen nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von ξ ; somit auch für $y - y^0$.

Dasselbe gilt im Falle $g = i$. Denn wollen wir in der h^{ten} Gruppe der Singularitäten des i -fachen Punktes verbleiben, so dürfen nach Nr. 8. nicht alle Ausdrücke

$$\frac{\partial^i \Phi_{hi+s'}}{\partial y_h^{s'}}, \quad (0 \leq s' + l \leq i - 1)$$

zugleich verschwinden. Somit — da dieses Coeff. v. $\xi^{s'} z^l$ in (20) für $g = i - 1$ — können aus der genannten Gleichung nicht alle Glieder bis einschliesslich der $i - 1$ Ordnung in ξ, z entfallen. Es ist also in diesem Falle der Punkt $\xi = 0, z = 0$ in der Curve (20) höchstens $i - 1$ -fach.

Damit ist der angegebene Satz gezeigt; denn unendliche Wurzeln der Gleichung $\Phi_i = 0$ bringen keine Ausnahme hervor. Dann finden wir nach dem Vorstehenden Entwicklungen von $x - x^0$ nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von $y - y^0$, welche umgekehrt werden können.

Die Gestalt der reellen Zweige der Curve $F = 0$ wird aus der Gleichung derselben in der Umgebung des Punktes $x^0 y^0$

$$(20^*) \quad \begin{cases} x - x^0 = t^\lambda, \\ y - y^0 = c_0 t^\mu + c_1 t^{\mu+1} + \dots \end{cases}$$

gefunden. (Weierstrass in einer Vorlesung über Geometrie.) Ist die Gerade $y = y^0$ Tangente im Punkte $x^0 y^0$, so hat man $\mu > \lambda$. Dann ist $(y - y^0)y_2$ für gehörig kleine Werthe von t durchaus positiv — somit ergeben sich folgende Formen der Zweige

λ gerade,	μ gerade,	Spitze 2. Art,
"	μ ungerade,	Spitze 1. Art,
λ ungerade,	μ gerade,	Gewöhnlicher Zweig,
"	μ ungerade,	Wendepunkt.

Im 3. Falle verläuft die Curve auf derselben Seite der Tangente, der sie zu beiden Seiten des Berührungspunktes $x^0 y^0$ ihre Convexität zuwendet.

12. Es mögen jetzt die *an einem i -fachen Punkte mit i -facher Tangente vorkommenden Singularitäten* etwas näher betrachtet werden. Nach dem in Nr. 8. Bemerkten genügt die Untersuchung einer Gruppe derselben, z. B. der ersten. Dabei wird angenommen, dass die Gleichung $\Phi_i = 0$ eine endliche i -fache Wurzel y_1^0 besitze. — Die Gleichung (20) geht nun in die folgende über (indem $y = y^0 + (y_1^0 + z)\xi$ zu setzen ist)

$$(21) \quad G(\xi, z) \equiv \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \Phi_i}{\partial y_1^{i0}} z^i + \xi \left\{ \Phi_{i+1} + \frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{01}} z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{02}} z^2 + \dots \right\} + \xi^2 (\Phi_{i+2} + \dots) + \dots = 0.$$

a) Ist Φ_{i+1} nicht 0, so erhält man hieraus nach Nr. 4. eine Entwicklung von der Form:

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{i}} + \dots,$$

also

$$y - y^0 - y_1^0 \xi = \xi \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{i}} + \dots.$$

y_2^0 ist ∞ , wie auch die 2. Gleichung (13) anzeigt.

b) Nimmt man an, dass $\Phi_{i+1} = 0$ sei, aber $\frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial y_1^0}$ nicht Null, so ist im Falle $i > 2$ der Punkt $\xi = 0, z = 0$ für $G = 0$ ein Doppelpunkt mit zwei verschiedenen Tangenten, deren eine $\xi = 0$. Nach Nr. 10. finden die Entwicklungen statt:

$$z = \left(\frac{dz}{d\xi}\right)_0 \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 z}{d\xi^2}\right)_0 \xi^2 + \dots,$$

$$\xi = \alpha z^{i-1} + \dots,$$

da für den zweiten Zweig alle Differentialquotienten von ξ nach z bis zum $(i-2)^{\text{ten}}$ einschliesslich verschwinden. Der letztere liefert somit die Entwicklung

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{i-1}} + \dots.$$

c) Wenn ferner $\frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial y_1^0} = 0$, aber Φ_{i+2} von 0 verschieden ist, so hat $G = 0$ im Punkte $\xi = 0, z = 0$ einen Doppelpunkt mit der einzigen Tangente $\xi = 0$. Seine Untersuchung wird mit Hilfe von Nr. 10. leicht durchgeführt. Man braucht nur zu bemerken, dass anfänglich zwei Differentialquotienten von ξ nach z nur gleich werden können, wenn sie verschwinden. Es seien die Ausdrücke Φ_r in Beziehung auf $G = 0$ und $\frac{d\xi}{dz}$ mit Ψ_r bezeichnet, ferner der Coefficient $z^\alpha \xi^\beta$ in (21) mit $[z^\alpha \xi^\beta]$, so folgt nach (10) für den Punkt $z = 0, \xi = 0$

$$\Psi_r = [z^r], \quad \frac{\partial \Psi_r}{\partial \xi_1} = [z^{r-1} \xi] = \frac{1}{(r-1)!} \frac{\partial^{r-1} \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{0, r-1}}.$$

Nun sollen auch noch die Grössen

$$\frac{\partial^2 \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{0, 2}}, \quad \frac{\partial^3 \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{0, 3}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{f-1} \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{0, f-1}}$$

verschwinden, dagegen $\frac{\partial^f \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{0, f}}$ nicht Null sein ($f \geq 2$). Dann sind

ausser ξ_1 auch $\xi_2, \dots, \xi_{f-1}$ je zweimal Null (vgl. Gleichung (c) in Nr. 10.). Es giebt *zwei gewöhnliche Curvenzweige*, für deren einen ausserdem noch

$$\xi_f = \xi_{f+1} = \dots = \xi_{i-f-1} = 0.$$

Denselben entsprechend bestehen die Entwicklungen

$$\xi = \alpha z^f + \dots$$

$$\xi = \alpha' z^{i-f} + \dots$$

und umgekehrt

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{f}} + \dots$$

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{i-f}} + \dots$$

Man findet leicht aus den Differentialgleichungen von $G = 0$ (oder unmittelbar)

$$\alpha = -\frac{1}{f!} \frac{\partial^f \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{0f}} : \Phi_{i+2}, \quad \alpha' = -1 : \frac{1}{f!} \frac{\partial^f \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{0f}}.$$

Um den Schluss dieser Specialisirung zu erhalten, hat man zu unterscheiden:

α) i ungerade $= 2j + 1$. Setzt man $f = j + 1$, so sind wegen $\Psi_{2j} = 0$ beide Werthe von ξ_j Null. Da aber Ψ_{2j+1} nicht mehr verschwindet, so hat $G = 0$ eine Spitze erster Art, der die Entwicklung entspricht

$$\xi = \alpha z^{\frac{2j+1}{2}} + \dots,$$

somit

$$\sqrt{z} = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2j+1}} + \dots$$

und

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{2j+1}} + \dots$$

Die Curve $F = 0$ hat einen Zweig mit *singulärem Wendepunkte*.

β) i gerade $= 2j$. Nun kann f gehen bis j einschliesslich; dann hat wegen $\Psi_{2j-1} = 0$ ξ_j 2 endliche und von 0 verschiedene Werthe, welche aber einander gleich werden können. Dann gelten auch hier die obenstehenden Schlussformeln. Die Specialisirung kann von hier aus beliebig weit fortgesetzt werden, indem die Ordnung der Berührung der beiden Curvenzweige stets zunimmt. Die Entwicklung von z beginnt stets mit $\xi^{\frac{1}{j}}$ und schreitet im Falle zweier Zweige nach positiven Potenzen dieser Grösse, im Falle eines einzigen Zweiges nach positiven Potenzen von $\xi^{\frac{1}{2j}}$ fort.

d) Die nächste Annahme $\Phi_{i+2} = 0$ bewirkt das identische Verschwinden der 3. der Gleichungen (13). Aus der nächstfolgenden ergeben sich dann im Allgemeinen zwei endliche Werthe von y_2 . —

So geht es fort. Bestehen die Gleichungen

$$(22^*) \quad \frac{\partial^k \Phi_r}{\partial y_1^{0k}} = 0, \quad (i \leq r + k \leq i + q - 1),$$

wo $q \leq i - 1$, so verschwinden alle Gleichungen (13) identisch bis zur $(i + q)^{\text{ten}}$, in welcher nur die Glieder zurückbleiben, für die $r + k = i + q$, d. i. diejenigen, welche y_2 enthalten:

$$(22) \quad \sum_g \frac{1}{g!} \frac{\partial^g \Phi_{i+q-g}}{\partial y_1^{0g}} \left(\frac{y_2}{2}\right)^g = 0.$$

In dem hier betrachteten Falle reducirt sich der Grad der Gleichung um eine Einheit, so dass im Allgemeinen $q - 1$ endliche Werthe von y_2 vorhanden sind. Die Gleichung (21) geht entsprechend über in

$$(23) \quad G(\xi, z) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \Phi_i}{\partial y_1^{0i}} z^i + \xi \left\{ \frac{1}{(q-1)!} \frac{\partial^{q-1} \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{0q-1}} z^{q-1} + \dots \right\} \\ + \xi^2 \left\{ \frac{1}{(q-2)!} \frac{\partial^{q-2} \Phi_{i+2}}{\partial y_1^{0q-2}} z^{q-2} + \dots \right\} \\ + \dots + \xi^q \{ \Phi_{i+q} + \dots \} + \dots = 0.$$

In dieser Curve ist $\xi = 0 \quad z = 0$ q -facher Punkt. $q - 1$ Werthe von $\frac{dz}{d\xi}$ sind endlich, wenn $[z^{q-1}\xi]$ nicht 0 ist. Für die Tangente $\xi = 0$ sind ausser ξ_1 nach (13) noch $\xi_2, \xi_3 \dots \xi_{i-q}$ Null; somit besteht die Entwicklung nach positiven ganzen Potenzen von z

$$\xi = \alpha z^{i-q+1} + \dots$$

und daher

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{i-q+1}} + \dots *).$$

Die weitere Specialisirung wird allgemein darin bestehen, dass die Gleichung (22) vom Grade $q - g$ wird, so dass die Curve (23) im q -fachen Punkte $\xi = 0 \quad z = 0$ die g -fache Tangente $\xi = 0$ besitzt. Ein solcher Fall kann leicht auf den g -fachen Punkt mit einer einzigen Tangente zurückgeführt werden. Denken wir uns neben (20) diejenige Gleichung gesetzt, wo $i = g$ ist, so stimmen beide Gleichungen in dem Anfange der Coefficienten jeder Potenz von ξ überein, nur sind die Indices der $\Phi^{(h-1)}$ im ersten Falle um $i - g$ höher. Ein Blick auf die vorstehende Untersuchung zeigt nun, dass die Ergebnisse derselben unmittelbar auf den Fall eines k -fachen Punktes mit $i (< k)$

*) Hierher (für $i = 5 \quad q = 3$) gehört das bekannte Beispiel von Puiseux (vgl. Fischer, V. Puiseux, Untersuchungen etc. p. 48).

zusammenfallenden Tangenten übertragen werden können. Beispielsweise möge noch die Gleichung (23) betrachtet werden, nachdem darin

$$(2 \leq g \leq q), \quad \frac{\partial^{q-1} \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{q-1}} = \frac{\partial^{q-2} \Phi_{i+2}}{\partial y_1^{q-2}} = \dots = \frac{\partial^{q-g+1} \Phi_{i+g-1}}{\partial y_1^{q-g+1}} = 0$$

gesetzt ist, so dass, wie erwähnt, die Glieder von der Dimension q in ξ , z den Factor ξ^g erhalten. Die Ausdrücke Φ_r (2) in Beziehung auf $G=0$ und $\frac{d\xi}{dz} = \xi_1$ mögen wieder mit Ψ_r bezeichnet werden.

Wenn $q < i-1$, so verschwindet noch die $(q+1)^{\text{te}}$ Differentialgleichung von $G=0$; wir haben also, so lange

$$(24) \quad \frac{\partial \Psi_{q+1}}{\partial \xi_1^0} = [\xi^q \xi] = \frac{1}{q!} \frac{\partial^q \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{q-1}}$$

nicht verschwindet, genau den Fall b). — Der reguläre Zweig hat aber noch $\xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_{i-q-1} = 0$, wie aus (13) folgt. Dagegen kann ξ_{i-q} nicht mehr 0 sein. Somit bestehen die Entwicklungen

$$\xi = \alpha z^{i-q} + \dots,$$

$$\xi = z \left(\frac{\alpha}{\alpha'} \right)^{\frac{1}{q-1}} + \dots,$$

woraus folgt

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{i-q}} + \dots,$$

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha''} \right)^{\frac{q-1}{q}} + \dots,$$

Wenn $q = i-1$, so tritt, da Ψ_{q+1} nicht mehr Null ist, stets der Fall a) ein, dem eine Entwicklung von ξ nach Potenzen von $\frac{1}{z^g}$ entspricht, so dass käme

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha} \right)^{\frac{g}{q+1}} + \dots$$

Dazu sind noch die zu den $q-g$ endlichen Werthen von y_2 gehörigen Zweige zu rechnen.

Wenn die Grösse (24) auch verschwindet, so tritt, falls $q < i-2$, schon die Form $q=3$ des Hauptfalles d) ein. $q=i-2$ giebt noch c).

Damit möge diese Untersuchung, die man ohne Mühe beliebig weit fortsetzen kann, abgebrochen werden. Es sei nur noch bemerkt, dass der Uebergang aus der ersten Gruppe der hier betrachteten Singularitäten in die zweite (d. i. zu i sich gewöhnlich berührenden Zweigen) in der Art stattfindet, dass y_2 von $i-2$ endlichen Werthen zu i ebensolchen gelangt.

13. Setzt man in $F(x, y) = 0$

$$x = x^0 + \xi, \quad y = y^0 + \eta,$$

unter $x^0 y^0$ einen beliebigen endlichen Punkt von $F = 0$ verstanden — so erhält man für ξ, η eine oder mehrere Entwicklungen von der Form (20*). Es gilt nun der Satz: „Die Summe aller λ ist stets gleich dem kleinsten Exponenten der ξ -freien Glieder in $F(x^0 + \xi, y^0 + \eta) = 0$; die Summe aller μ gleich dem kleinsten Exponenten der η -freien Glieder.“

Es würde genügen, den ersten Theil des Satzes zu zeigen, indem der zweite daraus durch Vertauschung von ξ und η folgt. Der Beweis wird aber vereinfacht, indem man sich den vollständigen Satz für die weniger als i -fachen Punkte $x^0 y^0$ gegeben denkt und denselben unter dieser Voraussetzung auf den i -fachen Punkt ausdehnt. — Dass der Satz für $i = 1$ gilt, ist unmittelbar klar; ebenso für $i = 2$. Denn, wenn die Bezeichnung (8) wieder gebraucht wird, so sind im letzteren Falle nur die Formen zu betrachten:

$$G(\xi, \eta) \equiv \begin{cases} a_{20} \xi^2 + a_{11} \xi \eta + a_{02} \eta^2 + \dots & = 0, \\ a_{20} \xi^2 + a_{11} \xi \eta + \dots + a_{0r} \eta^r + \dots & = 0, \\ a_{20} \xi^2 + \dots & + a_{0r} \eta^r + \dots = 0, \end{cases}$$

wo die Coefficienten a sämmtlich von 0 verschieden und η^r das niedrigste Glied mit η allein ist. Für die erste Gleichung ist der Satz unmittelbar klar, indem entweder zwei Zweige $\lambda = 1, \mu = 1$ oder einer $\lambda = 2, \mu = 2$ vorhanden sind. Die zweite und dritte Gleichung sind bereits ausführlich unter b) und c) der vorigen Nummer besprochen.

Nun sei $\xi = 0, \eta = 0$ ein i -facher Punkt von $G = 0$, so dass $r \geq i$ sein muss. — Ist $r = i$, so ergibt sich unter der gemachten Voraussetzung nach der Bemerkung in Nr. 11., dass nothwendig $\sum \lambda = i$, was zum Beweise hinreicht. Denn setzt man in $G(\xi, \eta) = 0$

$$\eta = (\eta_1^0 + z) \xi,$$

was hier stets gestattet ist, so hat die transformirte Curve in $\xi = 0, z = 0$ erst dann einen i -fachen Punkt, wenn η_2 i endliche Werthe erhält. Dann setzt man aber

$$\eta = \eta_1^0 \xi + \frac{\eta_2^0 + z}{2} \xi^2,$$

worauf derselbe Schluss u. s. f.

Ist aber $r > i$, so hat man

$$(a) \quad G(\xi, \eta) \equiv \xi^g (a_{g, i-g} \eta^{i-g} + \dots) + \dots + \eta^r + \dots = 0.$$

Für die den $i - g$ endlichen Werthen von $\frac{d\eta}{d\xi}$ entsprechenden Entwicklungen hat man nach Voraussetzung — man braucht nur $\eta = \left[\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_0 + \xi \right] \xi$ zu setzen — $\sum \lambda = i - g$.

Man setze ferner $\xi = \eta u$, so folgt aus (a)

$$(b) \quad u^g (a_g, i-g + \dots) + \dots + \eta^{-i} + \dots = 0;$$

mithin, so lange $g < i$ sicher für die Entwicklungen

$$(c) \quad \begin{cases} u = \alpha \eta^{\frac{a}{e}} + \dots, \\ \sum \varrho = g, \quad \sum \sigma = r - i. \end{cases}$$

Da nun

$$\xi = \alpha' \eta^{\frac{\sigma+g}{e}} + \dots;$$

somit

$$\eta = \left(\frac{\xi}{\alpha'}\right)^{\frac{e}{\sigma+g}} + \dots,$$

so kommt von hier

$$\sum \lambda = \sum \sigma + \sum \varrho = r - i + g,$$

so dass im Ganzen in der That $\sum \lambda = r$, q. e. d.

Dasselbe Resultat bleibt auch für $g = i$ noch richtig, so lange nicht $\frac{d^2 \xi}{d\eta^2} = \xi_2$ i endliche Werthe annimmt; denn nach Nr. 10. ist der Punkt $\eta = 0$ $u = 0$ in der Curve (b) noch immer nicht i -fach.

Sind aber i solche Werthe von ξ_2 vorhanden, so muss nach (22*) $r \geq 2i$ sein. Man setzt nun in (a)

$$(d) \quad \xi = \frac{\xi_2^0 + u}{2} \cdot \eta^2,$$

wodurch sich nach (20) ergibt:

$$(e) \quad \Psi'_{2i}(\xi_2^0 + u) + \eta \Psi'_{2i+1}(\xi_2^0 + u) + \dots = 0.$$

Hier sind die Ψ' in Bezug auf G , η , ξ , was die Φ' in Bezug auf F , x , y .

Nun sei ξ_2^0 eine nicht verschwindende e -fache Wurzel von

$$(f) \quad \Psi'_{2i}(\xi_2^0) = 0;$$

dann folgt für die Entwicklungen (c)

$$\sum \varrho = e,$$

so lange nicht (wenn $e = i$ ist) ξ_3 i endliche Werthe erhält. Die Annahme $e = i$ setzt voraus $r = 2i$.

Wenn aber der erwähnte Fall eintreten sollte, so würde man setzen

$$\xi = \frac{\xi_2^0 \eta^2}{2} + \frac{(\xi_2^0 + u) \eta^3}{6},$$

worauf dann doch wieder geschlossen werden kann

$$\sum \varrho = i.$$

Somit ist *im Falle* $r = 2i$, wo kein Nullwerth unter den ξ_2^0 vorkommen kann, die Gesamtheit aller ϱ gleich $\sum e$ oder i . — Es ist aber jetzt nach (d)

$$\xi = \frac{\xi_2^0}{2} \eta^{\frac{2e}{2}} + \dots,$$

folglich das entsprechende $\lambda = 2\varrho$, und $\sum \lambda = 2 \sum \varrho = 2i$, wie behauptet ist.

Im Falle $r > 2i$ hat die Gleichung (f) auch die Wurzel 0, allgemein f -mal. Ist nun

$$(g) \quad u = \alpha \eta^{\frac{\pi}{v}} + \dots,$$

so folgt aus (e)

$$\sum v = f, \quad \sum \pi = r - 2i;$$

denn wegen $\xi_1^0 = \xi_2^0 = 0$ ist

$$\Psi'_s(\xi_2^0) = [\eta^s].$$

Demnach ergibt sich aus (d)

$$\xi = \frac{\alpha}{2} \eta^{\frac{2v+\pi}{v}} + \dots,$$

somit ist die Zahl λ für den entsprechenden Zweig $2v + \pi$.

Sammelt man alle λ , so folgt

$$\sum \lambda = 2 \sum e + \sum (2v + \pi) = 2 \left(\sum e + f \right) + r - 2i = r.$$

Dieser Schluss ist so lange erlaubt, als nicht die Curve (e) einen i -fachen Punkt erhält. Dann aber muss ξ_3 i endliche Werthe erhalten, während ξ_2^0 i -mal Null ist. Und es ist offenbar, dass der vorstehende Schluss wiederholt werden kann, wenn man nur in $G = 0$

$$\xi = \frac{(\xi_3^0 + u) \eta^3}{6}$$

einführt u. s. f. Es ist somit allgemein erwiesen, dass $\sum \lambda = r$, wodurch der Satz vollständig gezeigt ist.

14. Die Zahlen λ , μ , welche nach Nr. 11. die Singularität *eines* Curvenzweiges bestimmen, stehen in unmittelbarem Zusammenhange mit den von Plücker (Theorie der algebr. Curven p. 205) eingeführten Zahlen: „Ordnung n und Classe m “ einer Singularität (in der eben angedeuteten Beschränkung des Wortes)*). Es ist im Falle $\mu > \lambda$ — also wenn $y = 0$ die Tangente im singulären Punkte $x^0 = 0$ $y^0 = 0$ ist —

$$n = \lambda, \quad m = \mu - \lambda.$$

*) Auf den Zusammenhang der Plücker'schen Zahlen mit den Zahlen λ, μ wurde ich durch Herrn Weierstrass aufmerksam gemacht.

Demnach ergibt sich folgende Tafel:

n gerade,	m gerade	: Spitze 2. Art,
n gerade,	m ungerade	: Spitze 1. Art,
n ungerade,	m gerade	: Wendepunkt,
n ungerade,	m ungerade	: Zweig ohne augenfällige Singularität.

Betrachtet man nun eine Liniencurve

$$\Phi(u, v) = 0,$$

wo u, v ein lineares System von Liniencoordinaten bezeichnet, in welchem $u=0$ $v=0$ eine *endliche* Gerade sein soll, — so kann man für dieselbe die nämlichen Entwicklungen brauchen, die an $F(x, y) = 0$ vorgenommen sind. Man erhält somit in der Umgebung der Tangente 0, 0 stets Entwicklungen von der Form

$$\begin{aligned} u &= t^q, \\ v &= \gamma_0 t^q + \gamma_1 t^{q+1} + \dots, \end{aligned}$$

wo $\sigma > q$ ist, wenn $v=0$ der Berührungspunkt. Die Zahlen $q, \sigma - q$ wird man als Classe m' und als Ordnung n' der Singularität der Liniencurve bezeichnen. — *Der Gestalt nach* werden hier folgende Formen gefunden:

m' gerade,	n' gerade,	Spitze 2. Art,
m' gerade,	n' ungerade,	Wendepunkt,
m' ungerade,	n' gerade,	Spitze 1. Art (Rückkehrpunkt),
m' ungerade,	n' ungerade,	Zweig ohne Singularität.

Es entsteht aber die Frage, ob die Singularitäten der zweiten Tafel mit den entsprechenden der ersten nicht bloss äusserlich, sondern auch nach ihrer analytischen Definition identisch sind. Dieses wird dann der Fall sein, wenn die Singularität von $F=0$

$$(25) \quad \begin{cases} x = t^\lambda, \\ y = c_0 t^\mu + c_1 t^{\mu+1} + \dots \end{cases}$$

($\mu > \lambda$) als solche der Gleichung von $F=0$ in Liniencoordinaten betrachtet,

$$m' = m, \quad n' = n$$

ergiebt. — Dieses lässt sich leicht zeigen:

Sind u, v die zu den Punktcoordinaten x, y reciproken Liniencoordinaten, so findet man für die Tangente in einem beliebigen Punkte xy von $F=0$

$$u = \frac{\frac{dy}{dt}}{y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}}, \quad v = \frac{-\frac{dx}{dt}}{y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}}.$$

Für $x=y=0$ werden aber diese Ausdrücke unendlich. Es können also die Coordinaten u, v hier nicht gebraucht werden; vielmehr muss ein solches System von *linearen* Liniencoordinaten eingeführt werden, dass die Tangente im Punkte $x=0, y=0$ die Coordinaten $0, 0$ erhält. Dieses ist

$$u' = \frac{u}{v}, \quad v' = \frac{1}{v};$$

somit

$$u' = -\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}, \quad v' = \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) : \frac{dx}{dt}.$$

Setzt man hier die Werthe (25) ein, so folgt:

$$u' = -\frac{\mu c_0}{\lambda} t^{\mu-\lambda} + \dots,$$

$$v' = \frac{\mu-\lambda}{\lambda} c_0 t^{\mu} + \dots.$$

Demnach ist in der That

$$m' = \mu - \lambda = m, \quad n' = \lambda = n.$$

Es ergibt sich ferner, dass in zwei reciproken Curven einer Singularität der Ordnung n und der Classe m eine solche von der Ordnung m und der Classe n entspricht. Denn da $F=0$ durch die Substitution

$$u = \frac{ax+by}{1+a'x+b'y}, \quad v = \frac{b'y}{1+a'x+b'y}$$

in die reciproke Curve transformirt wird, so folgt unmittelbar

$$m' = \lambda = n, \quad n' = \mu - \lambda = m.$$

Zum Schlusse möge noch bemerkt sein, dass der Singularität (25) eine verschwindende, endliche oder unendlichgrosse Krümmung in $x=0, y=0$ entspricht, je nachdem n kleiner, gleich oder grösser als m . Denn es ist offenbar

$$y_2 = \frac{\mu(\mu-\lambda)}{\lambda^2} c_0 t^{m-n} + \dots.$$

15. Cayley hat gezeigt (Quart. J. VII, p. 212 ff.), dass jede Singularität äquivalent sei einer bestimmten (ganzen) Zahl von Doppelpunkten, Rückkehrpunkten, Doppeltangenten und Wendetangenten. Bei Ermittlung dieser Zahlen, welche bezüglich mit $\delta', \kappa', \tau', \iota'$ bezeichnet werden mögen, wird auch die in der letzten Nummer gegebene Entwicklung gebraucht, welche von Cayley in etwas anderer Form ausgeführt wurde.

Die von Cayley für die genannten Zahlen angegebenen Werthe sind richtig; doch ist sein Beweis, wie er selbst bemerkt, nicht ganz vollständig. Man könnte denselben in folgender Art ergänzen, wobei

es genügen wird, den Fall einer einfachen Singularität im Punkte $x=0$ $y=0$ zu betrachten, d. i. *einen* λ -fachen Zweig

$$(a) \quad y = c_1 x^{\frac{\mu}{\lambda}} + c_2 x^{\frac{\mu+1}{\lambda}} + \dots$$

Es ist ferner nur erforderlich, die Werthe δ' , κ' abzuleiten, indem die beiden andern sich durch den eben erwähnten Uebergang zu Liniencoordinaten ergeben.

Die ganzen Zahlen δ' , κ' sind definirt durch die Gleichungen

$$(b) \quad 2\delta' + 3\kappa' = M, \quad \delta' + \kappa' = r,$$

wo M , r die Reductionen bedeuten, welche die Classe und das Geschlecht der allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung durch die gegebene Singularität erfahren.

Cayley giebt an, wie M gefunden werden kann. Man leite aus (a) dadurch, dass man $x^{\frac{1}{\lambda}}$ durch seine λ conjugirten Werthe ersetzt, die partiellen Entwicklungen

$$y_1, y_2 \dots y_\lambda$$

ab und bilde $y_r - y_s$, indem man r, s alle Werthe $1, 2 \dots \lambda$ durchlaufen lässt. Dann ist M die Summe der niedrigsten Exponenten von x in allen Grössen $y_r - y_s$.

Man sieht, M ist genau die Multiplicität des Factors x in der Discriminante der algebraischen Function y .

Nun ist nach einem Satze von Kronecker, welchen ich seinen Vorträgen über Algebra im W. S. 1870/1 entnehme,

$$M = 2r + w,$$

wo die Zahl w angiebt, wie oft der Factor x in der Discriminante von y „wesentlich“ sei. In unserem Falle ist $w = \lambda - 1$; somit folgt aus (b)

$$\kappa' = M - 2r = \lambda - 1.$$

Diesen Werth hat κ' auch bei Cayley; jedoch fehlt der allgemeine Beweis dafür (vgl. a. a. O. p. 220).

Innsbruck, 16. Mai 1874.