Sopra due relazioni rimarchevoli fra i valori delle derivate delle funzioni $\wp$ ellittiche per argomento zero.

(Di ERNESTO PASCAL, a Paria.)

Una delle relazioni notissime fra i valori delle $\wp$ e delle loro derivate per argomento zero è quella che esprime la derivata della funzione dispari $\wp'_1(0)$ per mezzo del prodotto delle tre funzioni $\wp$ pari per argomento zero, cioè:

$$\wp'_1(0) = \wp(0)\wp_2(0)\wp_3(0).$$

Scopo di questa Nota è di far conoscere due relazioni la cui formazione, da un certo punto di vista, può ritenersi analoga alla formazione di quest'ultima, cioè, nel primo membro compariscono le derivate successive (sino alla *settima*) della sola funzione *dispari* $\wp_1$, e nel secondo membro compariscono le sole funzioni *pari* non affette da indici di derivazione.

La formazione poi del secondo membro non è affatto casuale, ma invece i due secondi membri, a meno di fattori dipendenti dai moduli di periodicità, corrispondono ai due noti invarianti g_2, g_3 , nello stesso modo con cui il secondo membro della citata relazione di sopra corrisponde al cosiddetto discriminante Δ .

Le due relazioni che mi propongo di dimostrare sono propriamente le seguenti:

$$-3 \frac{\wp_1^{\text{v}}}{\wp_1'} + 5 \frac{\wp_1^{\text{v}''_2}}{\wp_1'^2} = \wp^8 + \wp_2^8 + \wp_3^8 \quad (A)$$

$$-9 \frac{\wp_1^{\text{vii}}}{\wp_1'} + 63 \frac{\wp_1^{\text{v}}}{\wp_1'} \frac{\wp_1^{\text{v}'''}{\wp_1'} - 70 \frac{\wp_1^{\text{v}''_3}}{\wp_1'^3} = -8(\wp^4 + \wp_2^4)(\wp_3^4 + \wp_2^4)(\wp_2^4 - \wp^4). \quad (B)$$

Nei primi membri gli indici superiori rappresentano *ordini* di derivazione. Ho detto che i secondi membri di queste formole hanno relazione cogli inva-

rianti g_2, g_3 ; infatti basta ricordare le formole che esprimono g_2, g_3 per mezzo delle $\mathfrak{S}$ pari con argomento zero, cioè propriamente:

$$g_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)^4 (\mathfrak{S}^4 + \mathfrak{S}_2^4 + \mathfrak{S}_3^4)$$

$$g_3 = -\frac{4}{27} \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)^6 (\mathfrak{S}^4 + \mathfrak{S}_3^4)(\mathfrak{S}_2^4 + \mathfrak{S}_3^4)(\mathfrak{S}_2^4 - \mathfrak{S}_3^4).$$

Passiamo ora alla dimostrazione delle due formole (A), (B).

§ 1. Riassunto di alcune formole preliminari.

Partendo dalla formola $\mathfrak{S}_1' = \mathfrak{S} \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3$, prendendo i logaritmi dei due membri e poi le derivate rispetto al modulo $\log q$, e poi servendosi dell'equazione differenziale cui soddisfanno tutte le $\mathfrak{S}$ insieme a tutte le loro derivate, si ha subito la nota formola:

$$\frac{\mathfrak{S}_1'''}{\mathfrak{S}_1'} = \frac{\mathfrak{S}''}{\mathfrak{S}} + \frac{\mathfrak{S}_2''}{\mathfrak{S}_2} + \frac{\mathfrak{S}_3''}{\mathfrak{S}_3}. \quad (1)$$

Su questa ripetendo la derivazione rispetto a $\log q$ e servendosi poi ancora dell'equazione differenziale delle $\mathfrak{S}$, si ha:

$$\frac{\mathfrak{S}_1^V}{\mathfrak{S}_1'} - \frac{\mathfrak{S}_1'''}{\mathfrak{S}_1'^2} = \left(\frac{\mathfrak{S}^{IV}}{\mathfrak{S}} + \frac{\mathfrak{S}_2^{IV}}{\mathfrak{S}_2} + \frac{\mathfrak{S}_3^{IV}}{\mathfrak{S}_3} \right) - \left(\frac{\mathfrak{S}''^2}{\mathfrak{S}^2} + \frac{\mathfrak{S}_2''^2}{\mathfrak{S}_2^2} + \frac{\mathfrak{S}_3''^2}{\mathfrak{S}_3^2} \right). \quad (2)$$

E ripetendo infine su quest'ultima le stesse operazioni si ottiene:

$$-\frac{\mathfrak{S}_1^{VII}}{\mathfrak{S}_1'} + 3 \frac{\mathfrak{S}_1^V}{\mathfrak{S}_1'} \frac{\mathfrak{S}_1'''}{\mathfrak{S}_1'} - 2 \frac{\mathfrak{S}_1'''}{\mathfrak{S}_1'^3} = - \sum_i \frac{\mathfrak{S}_i^{VI}}{\mathfrak{S}_i} +$$

$$+ 3 \sum_i \frac{\mathfrak{S}_i^{IV}}{\mathfrak{S}_i} \frac{\mathfrak{S}_i''}{\mathfrak{S}_i} -$$

$$- 2 \sum_i \frac{\mathfrak{S}_i''^3}{\mathfrak{S}_i^3}, \quad (3)$$

dove nel secondo membro abbiamo per brevità introdotto il segno sommatorio, il quale si intende preso per gli indici $i=0, 2, 3$, cioè esteso alle tre $\mathfrak{S}$ pari.

Partiamo ora dalle formole note per le derivate dei rapporti $\frac{\mathfrak{S}_2(x)}{\mathfrak{S}_3(x)}$, $\frac{\mathfrak{S}_3(x)}{\mathfrak{S}_2(x)}$, $\frac{\mathfrak{S}(x)}{\mathfrak{S}_2(x)}$ espresse mediante le $\mathfrak{S}$ stesse, deriviamo primo e secondo membro un'altra volta rispetto all'argomento x e poi poniamo $x = 0$.

Si hanno allora le formole:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathfrak{S}_3''}{\mathfrak{S}_3} - \frac{\mathfrak{S}_2''}{\mathfrak{S}_2} &= \mathfrak{S}^4 \\ \frac{\mathfrak{S}_2''}{\mathfrak{S}_2} - \frac{\mathfrak{S}_3''}{\mathfrak{S}_3} &= \mathfrak{S}_2^4 \\ \frac{\mathfrak{S}_2''}{\mathfrak{S}_2} - \frac{\mathfrak{S}''}{\mathfrak{S}} &= -\mathfrak{S}_3^4. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ci occorre finalmente trovare un'altra categoria di formole che si ricavano da quelle relative alle derivate logaritmiche delle funzioni $\mathfrak{S}$. Le derivate logaritmiche delle $\mathfrak{S}$, a cominciare dal secondo ordine in poi, si esprimono mediante le $\mathfrak{S}$ stesse; le formole relative si possono facilmente trovare; noi ci serviremo delle tabelle contenute in un lavoro di un mio scolaro, il dott. BERTOLANI (Giorn. di Batt., vol. 33). Dalle formole per le derivate logaritmiche quarte e seste, ponendo l'argomento x eguale a zero, si hanno le altre (*):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathfrak{S}^{IV}}{\mathfrak{S}} - 3 \frac{\mathfrak{S}''^2}{\mathfrak{S}^2} &= -2\mathfrak{S}_2^4 \mathfrak{S}_3^4 \\ \frac{\mathfrak{S}_2^{IV}}{\mathfrak{S}_2} - 3 \frac{\mathfrak{S}_2''^2}{\mathfrak{S}_2^2} &= -2\mathfrak{S}_3^4 \mathfrak{S}^4 \\ \frac{\mathfrak{S}_3^{IV}}{\mathfrak{S}_3} - 3 \frac{\mathfrak{S}_3''^2}{\mathfrak{S}_3^2} &= +2\mathfrak{S}^4 \mathfrak{S}_2^4 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathfrak{S}^{VI}}{\mathfrak{S}} - 15 \frac{\mathfrak{S}^{IV}}{\mathfrak{S}} \frac{\mathfrak{S}''}{\mathfrak{S}} + 30 \frac{\mathfrak{S}''^3}{\mathfrak{S}^3} &= +8\mathfrak{S}_2^4 \mathfrak{S}_3^4 (\mathfrak{S}_2^4 + \mathfrak{S}_3^4) \\ \frac{\mathfrak{S}_2^{VI}}{\mathfrak{S}_2} - 15 \frac{\mathfrak{S}_2^{IV}}{\mathfrak{S}_2} \frac{\mathfrak{S}_2''}{\mathfrak{S}_2} + 30 \frac{\mathfrak{S}_2''^3}{\mathfrak{S}_2^3} &= -8\mathfrak{S}^4 \mathfrak{S}_3^4 (\mathfrak{S}_3^4 + \mathfrak{S}^4) \\ \frac{\mathfrak{S}_3^{VI}}{\mathfrak{S}_3} - 15 \frac{\mathfrak{S}_3^{IV}}{\mathfrak{S}_3} \frac{\mathfrak{S}_3''}{\mathfrak{S}_3} + 30 \frac{\mathfrak{S}_3''^3}{\mathfrak{S}_3^3} &= +8\mathfrak{S}_2^4 \mathfrak{S}^4 (\mathfrak{S}_2^4 - \mathfrak{S}^4). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(*) Occorre notare che nelle citate formole del dott. BERTOLANI (vol. 33; Giorn. di Batt.) comparisce un disgraziato errore di stampa (nella tabella III) corretto dallo stesso Autore in un lavoro posteriore nel medesimo periodico.

§ 2. Dimostrazione della formola (A).

Mediante le formole stabilite nel paragrafo precedente possiamo facilmente dimostrare le due formole fondamentali (A), (B).

Combinando (1), (2) possiamo avere:

$$-3 \frac{\vartheta_1^V}{\vartheta_1'} + 5 \frac{\vartheta_1'''^2}{\vartheta_1'^2} = -3 \sum_i \frac{\vartheta_i^{IV}}{\vartheta_i} + 5 \sum_i \frac{\vartheta_i''^2}{\vartheta_i^2} + 4 \sum_{ij} \frac{\vartheta_i'' \vartheta_j''}{\vartheta_i \vartheta_j},$$

dove le $\sum$ si intendono estese al solito in modo da comprendere le tre ϑ pari, e il $\sum_{ij}$ s'intende comprendente sei termini corrispondenti alle sei combinazioni degli indici $i, j, = 0, 2, 3$.

Ma quadrando e sommando le (4), e inoltre sommando le (5), e tenendo conto della relazione nota:

$$\vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8 = 2\vartheta_3^4 \vartheta^4 + 2\vartheta_2^4 \vartheta_3^4 - 2\vartheta^4 \vartheta_2^4,$$

si ha:

$$\sum_i \frac{\vartheta_i''^2}{\vartheta_i^2} - \sum_{ij} \frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i} \frac{\vartheta_j''}{\vartheta_j} = \frac{1}{2} (\vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8)$$

$$\sum_i \frac{\vartheta_i^{IV}}{\vartheta_i} - 3 \sum_i \frac{\vartheta_i''^2}{\vartheta_i^2} = -(\vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8),$$

onde combinando colla precedente si ha subito la relazione (A).

§ 3. Dimostrazione della formola (B).

Tenendo presenti le (1), (2), (3) e formando la combinazione:

$$9(3) + 36(1)(2) - 16(1)^3,$$

e riducendo si ha:

$$-9 \frac{\vartheta_1^{VII}}{\vartheta_1'} + 63 \frac{\vartheta_1^V}{\vartheta_1'} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - 70 \frac{\vartheta_1'''^3}{\vartheta_1'^3} = -9 \sum_i \frac{\vartheta_i^{VI}}{\vartheta_i} + 63 \sum_i \frac{\vartheta_i^{IV}}{\vartheta_i} \frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i} -$$

$$-70 \sum_i \frac{\vartheta_i''^3}{\vartheta_i^3} + 36 \sum_{ij} \frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i} \frac{\vartheta_j^{IV}}{\vartheta_j} - 84 \sum_{ij} \frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i} \frac{\vartheta_j''^2}{\vartheta_j^2} - 96 \frac{\vartheta''}{\vartheta} \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}.$$

Ora in primo luogo sommiamo le (6) e abbiamo:

$$\sum_i \frac{\mathfrak{S}_i^{\text{VI}}}{\mathfrak{S}_i} - 15 \sum_i \frac{\mathfrak{S}_i^{\text{IV}}}{\mathfrak{S}_i} \frac{\mathfrak{S}_i''}{\mathfrak{S}_i} + 30 \frac{\mathfrak{S}_i''^3}{\mathfrak{S}_i^3} = 8(\mathfrak{S}_3^4 + \mathfrak{S}_2^4)(\mathfrak{S}_2^4 - \mathfrak{S}^4)(\mathfrak{S}^4 + \mathfrak{S}_3^4).$$

Moltiplichiamo inoltre la 2.^a delle (4) colla 1.^a delle (5) e così la 3.^a e 1.^a delle (4) colla 2.^a e 3.^a delle (5) rispettivamente, e sommiamo; d'altra parte moltiplichiamo rispett. la 3.^a, 1.^a, 2.^a delle (4) colla 1.^a, 2.^a, 3.^a delle (5) e sommiamo; sottraggiamo poi fra loro membro a membro le due relazioni ottenute, e si ha:

$$\begin{aligned} 2 \sum_i \frac{\mathfrak{S}_i''}{\mathfrak{S}_i} \frac{\mathfrak{S}_i^{\text{IV}}}{\mathfrak{S}_i} - \sum_{ij} \frac{\mathfrak{S}_i''}{\mathfrak{S}_i} \frac{\mathfrak{S}_j^{\text{IV}}}{\mathfrak{S}_j} - 6 \sum_i \frac{\mathfrak{S}_i''^3}{\mathfrak{S}_i^3} + 3 \sum_{ij} \frac{\mathfrak{S}_i''}{\mathfrak{S}_i} \frac{\mathfrak{S}_j''^2}{\mathfrak{S}_j^2} = \\ = -2(\mathfrak{S}_3^4 + \mathfrak{S}_2^4)(\mathfrak{S}_2^4 - \mathfrak{S}^4)(\mathfrak{S}^4 + \mathfrak{S}_3^4). \end{aligned}$$

Infine sottraendo a due a due le (4) e poi moltiplicando fra loro le tre differenze, si ha:

$$\begin{aligned} 2 \sum_i \frac{\mathfrak{S}_i''^3}{\mathfrak{S}_i^3} - 3 \sum_{ij} \frac{\mathfrak{S}_i''}{\mathfrak{S}_i} \frac{\mathfrak{S}_j''^2}{\mathfrak{S}_j^2} + 12 \frac{\mathfrak{S}''}{\mathfrak{S}} \frac{\mathfrak{S}_2''}{\mathfrak{S}_2} \frac{\mathfrak{S}_3''}{\mathfrak{S}_3} = \\ = (\mathfrak{S}_3^4 + \mathfrak{S}_2^4)(\mathfrak{S}_2^4 - \mathfrak{S}^4)(\mathfrak{S}^4 + \mathfrak{S}_3^4). \end{aligned}$$

Combinando opportunamente fra loro le quattro ultime relazioni ottenute si ha finalmente la formola (B).

§ 4. Cenno su di una dimostrazione indiretta delle due formole (A), (B).

Le dimostrazioni dei paragrafi precedenti hanno il vantaggio di essere delle dimostrazioni dirette delle due formole (A), (B); una dimostrazione indiretta di esse è data nel seguente modo.

Consideriamo quella cosiddetta operazione D che si introduce nella teoria delle funzioni ellittiche (vedi HALPHEN, *Fonct. ellipt.*, vol. I, cap. IX) e che è definita nella doppia maniera:

$$D = -2\eta \frac{\partial}{\partial \omega} - 2\eta' \frac{\partial}{\partial \omega'} = 12g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{2}{3}g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3},$$

ed eseguiamo successivamente questa operazione sulla quantità η (primo semi-periodo dell'integrale di 2.^a specie).

Si sa per altre vie che il risultato di una tale operazione è:

$$D\eta = \frac{1}{6} g_2 \omega$$

$$DD\eta = -\frac{1}{3} g_2 \eta + 2g_3 \omega.$$

Se ora esprimiamo tutto mediante le $\mathfrak{S}$ tenendo conto delle formole (vedi HALPHEN, cit.):

$$\eta = -\frac{1}{12} \frac{\pi^2}{\omega} \frac{\mathfrak{S}_1'''}{\mathfrak{S}_1'}$$

$$D\log q = -\frac{\pi^2}{\omega^2}$$

$$D \frac{\mathfrak{S}_1'''}{\mathfrak{S}_1'} = \frac{d}{d\log q} \frac{\mathfrak{S}_1'''}{\mathfrak{S}_1'} D\log q$$

ecc. ecc.

giungiamo per questa via alle stesse formole sopra dimostrate.

Pavia, ottobre del 1895.