ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№ 2913.

Einige Bemerkungen über die Convergenz der Reihen in der Störungstheorie.

Von Dr. *C. V. L. Charlier.*

Obgleich die folgenden Betrachtungen ohne Schwierigkeit aus einigen Untersuchungen von M. Poincaré (Bulletin Astr. Tome I) und Prof. Bruns (A. N. 119) gefolgert werden können, scheint es mir doch, dass dieselben wegen der grossen Wichtigkeit des Themas nicht ganz überflüssig sind.

Alle Lösungen des Problems der drei Körper, die bis jetzt vorliegen, haben gemeinsam, dass man erst durch successive und zwar in Unendlichkeit fortgesetzte Annäherungen zum Ziele geführt wird. Dabei wird jede Annäherung für sich durch eine unendliche Reihe ausgedrückt.

Will man die Convergenz dieser Lösungen untersuchen, wird man also zu zwei verschiedenen Aufgaben geführt. Man muss die Convergenz der Reihen, welche die verschiedenen Annäherungen ausdrücken, untersuchen, und man muss die Reihe der Annäherungen in Betracht ziehen.

Von diesen Aufgaben ist die letzte ohne Vergleich die schwierigste.

Es kann sehr wohl stattfinden, dass jede Annäherung durch eine convergente Reihe ausgedrückt ist, obgleich die Reihenfolge der Annäherungen divergirt und es kann umgekehrt aus divergenten Annäherungen dennoch ein convergenter Endausdruck der Störungen zusammengesetzt werden.

Die am nächsten liegende Frage ist die Untersuchung über die Convergenz der Reihen, welche die einzelnen Annäherungen darstellen. Die folgende Untersuchung bezieht sich auf die Laplace'sche Annäherungsmethode, die man gewöhnlich mit dem Namen »Die Entwickelung nach den Potenzen der Massen« bezeichnet. — Man sieht aber, dass diese Betrachtungen auch auf etliche andere Annäherungsmethoden sich anwenden lassen.

In der ersten Annäherung geschieht die Bestimmung des Radius vectors und der Breite (Méc. cél. Livre II Chap. VI) durch Gleichungen von der folgenden Form:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + v^2 u = \sum B_{ij} \sin[(in - jn')\,t + H_{ij}] \tag{1}$$

und der Länge durch:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = \sum A_{ij} \sin[(in - jn')\,t + G_{ij}]\,. \tag{2}$$

Wenn wir die rechten Seiten dieser Ausdrücke mit Q und R bezeichnen, werden bekanntlich die Integrale durch folgende Formeln gefunden:

$$u = \frac{1}{v}\sin vt \int Q \cos vt\,dt - \frac{1}{v}\cos vt \int Q \sin vt\,dt\,. \qquad Z = \int\!\!\int R\,dt^2. \tag{3}$$

In Bezug auf die Reihen Q und R bemerken wir, dass dieselben nach den Potenzen der Excentricitäten und Neigungen der Planeten-Bahnen fortschreiten, dass diese Reihen für hinreichend kleine Werthe von diesen Quantitäten convergiren und zwar absolut und gleichförmig.

Die in (3) angedeuteten Integrationen geschehen nun dadurch, dass man die Reihen für Q und R einsetzt und dann die Integration für jedes Glied ausführt. Dabei musste man eigentlich zu jedem Glied eine Integrationsconstante hinzufügen. Im Allgemeinen ist es aber gewöhnlich, alle diese Constanten zu einer einzigen zusammenzuziehen und also die Integrale als unbestimmte zu betrachten.

In practischer Hinsicht ist dies auch gleichgültig; nicht aber für die Frage der Convergenz, und wir werden deswegen durchweg die Integrationen zwischen bestimmten Grenzen t_0 und t ausgeführt denken.

Es wird also (wenn wir λ_s statt $in - jn'$ schreiben):

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{v}\sin vt \sum_s B_s \int_{t_0}^{t} \sin(\lambda_s t + H_s)\cos vt\,dt - \frac{1}{v}\cos vt \sum_s B_s \int_{t_0}^{t} \sin(\lambda_s t + H_s)\sin vt\,dt\,, \\ Z &= \sum_s A_s \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \sin(\lambda_s t + G_s)\,dt\,, \end{aligned} \tag{4}$$

wozu wir noch die Reihe für $\frac{dZ}{dt}$ hinzusetzen:

$$\frac{dZ}{dt} = \sum_s A_s \int_{t_0}^{t} \sin(\lambda_s t + G_s)\, dt\,.$$

In diesen Ausdrücken haben wir überall die Integrationsconstanten linker Hand weggelassen.

Bei Ausführung der gezeichneten Integrationen erhalten wir nun zunächst für Z und $\frac{dZ}{dt}$

$$(5) \qquad \frac{dZ}{dt} = -\sum_s \frac{A_s}{\lambda_s}\left[\cos(\lambda_s t + G_s) - \cos(\lambda_s t_0 + G_s)\right]$$

$$Z = -\sum_s \frac{A_s}{\lambda_s}\left[\frac{1}{\lambda_s}\sin(\lambda_s t + G_s) - \frac{1}{\lambda_s}\sin(\lambda_s t_0 + G_s) - \cos(\lambda_s t_0 + G_s) \times (t - t_0)\right]$$

oder

$$(6) \qquad Z = -\sum_s \frac{A_s}{\lambda_s^2}\left[\sin(\lambda_s t + G_s) - \sin(\lambda_s t_0 + G_s) - \cos(\lambda_s t_0 + G_s) \times \lambda_s (t - t_0)\right].$$

Und für u erhalten wir nach einer kleinen Rechnung

$$(7) \qquad u = \sum_s \frac{B_s}{\nu^2 - \lambda_s^2}\left[\sin(\lambda_s t + H_s) - \sin(\lambda_s t_0 + H_s)\cos\nu(t - t_0) - \frac{\lambda}{\nu}\cos(\lambda_s t_0 + H)\sin\nu(t - t_0)\right].$$

Würden nun

$$\sum_s \frac{A_s}{\lambda_s}, \quad \sum_s \frac{A_s}{\lambda_s^2} \quad \text{und} \quad \sum_s \frac{B_s}{\nu^2 - \lambda_s}$$

für sich convergente Reihen bilden, so würden wir unter Anwendung der Bezeichnungen:

$$G_0 = \sum_s \frac{A_s}{\lambda_s^2}\sin(\lambda_s t_0 + G_s) \qquad H_1 = -\sum_s \frac{B_s}{\nu^2 - \lambda_s^2}\sin(\lambda_s t_0 + H_s)$$

$$G_1 = \sum_s \frac{A_s}{\lambda_s}\cos(\lambda_s t_0 + G_s) \qquad H_2 = -\sum_s \frac{\lambda_s}{\nu}\frac{B_s}{\nu^2 - \lambda_s^2}\cos(\lambda_s t_0 + H_s)$$

die Integrale unter der folgenden Form schreiben können:

$$\frac{dZ}{dt} = G_1 - \sum_s \frac{A_s}{\lambda_s}\cos(\lambda_s t + G_s)$$

$$Z = G_0 + G_1(t - t_0) - \sum_s \frac{A_s}{\lambda_s^2}\sin(\lambda_s t + G_s)$$

$$u = H_1\cos\nu(t - t_0) + H_2\sin\nu(t - t_0) + \sum_s \frac{B_s}{\nu^2 - \lambda_s^2}\sin(\lambda_s t + H_s)\,,$$

unter welcher Form Laplace die Integrale geschrieben hat.

Wie bekannt bewirken aber die »kleinen Divisoren« λ_s und $\nu^2 - \lambda_s^2$, dass diese Reihen divergent werden können, dass wenigstens die Convergenz von dem Werthe der mittleren Bewegung abhängig wird. Wir werden nun zusehen, ob es sich in dieser Beziehung mit den Reihen (5), (6) und (7) anders verhält.

In der That wird es sich zeigen, dass diese Reihen für beliebig hohe Werthe der Zeit convergiren und zwar absolut, dass aber im Allgemeinen die Convergenz nicht eine gleichförmige ist.

Wir betrachten zuerst die Reihe für $\frac{dZ}{dt}$, die am einfachsten ist. Dieselbe kann, wie man gleich sieht, unter der folgenden Form geschrieben werden:

$$(8) \qquad \frac{dZ}{dt} = 2\sum \frac{A_s}{\lambda_s}\sin\left[{}^1/_2\,\lambda_s(t + t_0) + G_s\right]\sin{}^1/_2\,\lambda_s(t - t_0)\,.$$

Nun hatten wir aber angenommen, dass die Summe

$$\sum_s A_s$$

absolut convergent war. Das heisst, wenn wir eine beliebig kleine Zahl σ wählen, können wir immer einen Werth von $s = p$ finden, der Art, dass

$$(9) \qquad \sum_{s=p'}^{\infty} |A_s| < \sigma, \quad \text{für alle } p' \geqq p\,.$$

Schreiben wir nun:

$$\frac{dZ}{dt} = 2\sum_{s=0}^{p'-1} \frac{A_s}{\lambda_s} \sin[{}^1/_2\,\lambda_s(t+t_0)+G_s] \sin {}^1/_2\,\lambda_s(t-t_0) + R_{p'},$$

so ist offenbar, weil

$$\sin {}^1/_2\,\lambda_s(t-t_0) < {}^1/_2\,\lambda_s(t-t_0),$$

$$R_{p'} \leq 2\sum_{s=p'}^{\infty} \left| \frac{A_s}{\lambda_s} \sin[{}^1/_2\,\lambda_s(t+t_0)+G_s] \sin {}^1/_2\,\lambda_s(t-t_0) \right|$$

$$< |t-t_0| \sum_{s=p'}^{\infty} |A_s| < |t-t_0|\,\sigma.$$

Fixiren wir also einen Werth von $t\,(=t')$ beliebig gross, und wählen eine positive Zahl δ beliebig klein, so können wir also immer eine Zahl q finden, so beschaffen, dass für alle Werthe von t zwischen t_0 und t'

$$R_{q'} < \delta \quad \text{für alle} \quad q' > q$$

d. h. die Reihe (5) ist convergent und absolut convergent.

Dagegen sehen wir, dass die Convergenz im Allgemeinen nicht für unbeschränkte Zeit eine gleichförmige ist, da die Zahl q von t' abhängt und mit t' über alle Grenzen wachsen kann.

In ähnlicher Weise können wir zeigen, dass die Reihen für Z und u absolut convergent sind.

In der That bekommen wir

$$Z = -2\sum \frac{A_s}{\lambda_s^2}[\cos[{}^1/_2\,\lambda_s(t+t_0)+G_s] \sin {}^1/_2\,\lambda_s(t-t_0) - \cos(\lambda_s t_0+G_s) \times {}^1/_2\,\lambda_s(t-t_0)]$$

$$= -2\sum \frac{A_s}{\lambda_s^2}[\cos[{}^1/_2\,\lambda_s(t+t_0)+G_s] - \cos(\lambda_s t_0+G_s)] \times {}^1/_2\,\lambda_s(t-t_0)$$

$$+ 2\sum \frac{A_s}{\lambda_s^2} \cos[{}^1/_2\,\lambda_s(t+t_0)+G_s] \times [{}^1/_2\,\lambda_s(t-t_0) - \sin {}^1/_2\,\lambda_s(t-t_0)]$$

$$= 4\sum \frac{A_s}{\lambda_s^2} \sin[{}^1/_4\,\lambda_s(t+3t_0)+G_s] \sin {}^1/_4\,\lambda_s(t-t_0) \times {}^1/_2\,\lambda_s(t-t_0)$$

$$+ 2\sum \frac{A_s}{\lambda_s^2} \cos[{}^1/_2\,\lambda_s(t+t_0)+G_s] \times [{}^1/_2\,\lambda_s(t-t_0) - \sin {}^1/_2\,\lambda_s(t-t_0)].$$

Da nun

$$\sin {}^1/_4\,\lambda_s(t-t_0) < {}^1/_4\,\lambda_s(t-t_0)$$

$${}^1/_2\,\lambda_s(t-t_0) - \sin {}^1/_2\,\lambda_s(t-t_0) < {}^1/_{48}\,\lambda^3(t-t_0)^3,$$

so bekommen wir für den Rest R_p dieser Reihe von dem p^{ten} Glied ab die folgende Ungleichheit

$$R_p \leq (t-t_0)^2\, \frac{1}{2}\sum_{s=p}^{\infty} |A_s| + (t-t_0)^3 \sum_{s=p}^{\infty} \frac{1}{24} |\lambda_s A_s|,$$

wodurch die Convergenz bewiesen ist.

Zuletzt kommen wir zu der Gleichung für u. Durch ein Verfahren ganz ähnlicher Art wie oben erhalten wir nun für u die Form

$$u = \sum \frac{2B_s}{\nu^2-\lambda_s^2} \cos[{}^1/_2\,\lambda_s(t+t_0) + {}^1/_2\,\nu(t-t_0) + H_s] \sin {}^1/_2\,(\lambda_s-\nu)(t-t_0)$$

$$+ \sum \frac{B_s}{\nu(\lambda_s+\nu)} \cos(\lambda_s t_0 + H_s) \sin \nu(t-t_0),$$

und es erhellt hieraus unmittelbar, dass die kleinen Divisoren durch die Argumente unter den Sinussen aufgehoben werden.

Das Resultat der vorigen Untersuchung ist also, dass die Reihen, die man nach Laplace's Annäherungsmethode in der ersten Annäherung bekommt, sämmtlich convergiren für beliebig hohe — aber endliche — Werthe der Zeit. Das Auftreten der kleinen Divisoren bewirkt aber, dass die Convergenz nicht eine gleichförmige ist, das heisst, dass man mit wachsender Zeit immer neue Glieder zuziehen muss, um die dargestellten Functionen zu berechnen.

Diese letzte Eigenschaft der Reihen — dass dieselben nicht gleichförmig convergiren — ist in praktischer Hinsicht von fast keiner Bedeutung; man kann immer leicht so viele Glieder berechnen, dass die Summe der Restglieder für Tausende oder selbst Hunderttausende von Jahren unter einer für die Praxis genügend kleinen Grenze — sei es einer Bogensecunde — liegen.

In theoretischer Hinsicht aber ist dieser Mangel an gleichförmiger Convergenz von der grössten Bedeutung. So lange die gleichförmige Convergenz nicht bewiesen ist, lässt sich nicht zeigen, dass die dargestellten Functionen für alle Zeit unter einer endlichen Grenze liegen. Alle diese berühmten »Stabilitätsbeweise«, die im Anfange dieses Jahrhunderts eine so grosse Aufmerksamkeit unter den Astronomen und Mathematikern erregten, verlieren schon durch diesen Umstand alle Strenge, ganz abgesehen von andern Mängeln, die denselben anhaften.

Um die Stabilitätsfrage zu entscheiden, die vom theoretischen Gesichtspunkte die wichtigste Aufgabe des Problems der drei Körper ist, muss man natürlich nicht nur die erste Annäherung betrachten, sondern vor Allem die Reihe der successiven Annäherungen selbst. Es ist dabei eine Sache zu betrachten, auf die, wie es mir scheint, nicht genügend Rücksicht genommen wird. Es kann nämlich eintreffen, dass jede Annäherung für sich divergent oder doch nicht gleichförmig convergent ist, obgleich demungeachtet das Endresultat durch eine gleichförmig convergente Reihe dargestellt wird. Beispielsweise nehmen wir an, das wir eine Reihe von Grössen s_0, s_1 etc. durch die folgenden Gleichungen definirt haben.

$$s_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{t}{n^n}$$

$$s_1 = m\sum \alpha^n \sin\frac{t}{n^n}$$

$$s_2 = \frac{m^2}{1.2}\sum \alpha^{2n} \sin\frac{t}{n^n}$$

$$s_3 = \frac{m^3}{1.2.3}\sum \alpha^{3n} \sin\frac{t}{n^n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S = \sum_{r=0}^{\infty} s_r,$$

wo die α reell und grösser als Eins sind. Jede von den Reihen s bildet eine für jedes endliche t convergente Reihe, die aber nicht gleichförmig convergirt. Nichtsdestoweniger ist für negative m die Summe S eine gleichförmig convergente Reihe. Schreiben wir nämlich

$$S = \sum C_n \sin\frac{t}{n^n},$$

so ist offenbar

$$C_n = 1 + m\alpha^n + \frac{m^2}{1.2}\alpha^{2n} + \frac{m^3}{1.2.3}\alpha^{3n} + \cdots = e^{m\alpha^n},$$

und wenn wir für m einen beliebigen negativen Werth annehmen, finden wir, dass

$$\sum C_n$$

eine sogar sehr stark convergirende Reihe bildet. S muss also gleichförmig convergent sein.

In analoger Weise scheint es wenigstens sehr wohl möglich, dass die Form

$$\sum A_{ii'ss'} \sin(i\lambda_1 t + i'\lambda_2 t + s\lambda_3 t + s'\lambda_4 t + B_{ii'ss'}),$$

durch die man in einigen neueren Störungstheorien die Coordinaten der drei Körper (in 2 Dimensionen) ausdrückt, eine gleichförmige Convergenz zeigen kann, wenn man nur durch die successiven Annäherungen die richtigen Werthe der Coefficienten $A_{ii'ss'}$ bekommen hat; wenn auch die verschiedenen Annäherungen für sich nicht diese Eigenschaft besitzen.

Stockholm 1889 Mai 1.

C. V. L. Charlier, Docent der Astronomie.

Beobachtung der partiellen Mondfinsterniss 1889 Juli 12.

Veranlasst durch die Notiz Dr. J. Klein's in den A. N. Nr. 2904 suchte ich bei der partiellen Mondfinsterniss am 12. d. M. angelegentlich nach der Erscheinung des Erdschattens ausserhalb der Mondscheibe mit einem 4füssigen Refractor (A. N. Nr. 1376), sowie zwei meiner Schüler mit kleineren Instrumenten. Der Mond entzog sich bis $9^h 10^m$ der Beobachtung, es war vorher nur auf Secunden möglich gewesen, den — unverfinsterten — Rand durchschimmern zu sehen. Zur Zeit der grössten Phase $9^h 37^m$ Mond theilweise durch Wolken verdeckt. Von 10 Uhr ab wieder günstig und glaubte ich am W-Rande die Fortsetzung des Erdschattens zu bemerken. Ehe ich die Erscheinung genauer ins Auge fassen konnte, traten wieder Wolken hindernd dazwischen. Herr Buchhändler Molkau sowie Dr. Weye, zwei eifrige Liebhaber der Astronomie, konnten nichts gewahr werden. Jedoch suchte ersterer nicht nahe an der Mondscheibe, sondern versuchte den Rand des Erdschattens diametral dem in die Mondscheibe hineinragenden Segment zu entdecken. Ende zu früh beobachtet, da Wolken die Scheibe verdeckten und nur zeitweise Blicke erlaubten.

Ende $10^h 46^m 34^s$ resp. 46^s.

Halbschatten so gut wie gar nicht wahrnehmbar.

Lübeck 1889 Juli 15. *Fr. Schulze.*