bei 93° geführt worden, und auch Mitscherlich und Haidinger hatten es dargestellt.“ Ich erlaube mir, darauf aufmerksam zu machen, dass bereits nach Hrn. E. Wiedemann das von ihm gefundene Salz sich durch eine grössere Dichte von dem jener beiden Forscher ganz wesentlich unterscheidet. Hr. E. Wiedemann sagt¹⁾: „Aus den obigen Analysen aber geht hervor, dass auch ein bei 93° krystallisirendes Salz existirt, das sechs Molecüle Wasser enthält. Die Volumenbestimmungen zeigen, dass diese beiden Salze eine wesentlich verschiedene Dichte besitzen. Es existiren daher zwei Modificationen des Salzes $\text{MgSO}_4 + 6\text{H}_2\text{O}$.“

Zum Schlusse erfülle ich die angenehme Pflicht, den Hrn. Professoren G. und E. Wiedemann für die Unterstützung, welche sie mir bei meinen Arbeiten in der lebenswürdigsten Weise haben zu Theil werden lassen, meinen aufrichtigsten Dank zu sagen.

Physikal.-chem. Laborat. d. Univ. Leipzig, März 1887.

IV. *Zur Theorie des Lichtes für absorbirende isotrope Medien; von W. Voigt.*

Im Nachstehenden werde ich einige Nachträge zu meiner vor drei Jahren mitgetheilten Theorie der absorbirenden isotropen Medien²⁾ geben, die hauptsächlich eine Klarstellung einiger dort unberücksichtigt gelassener Punkte und eine Vereinfachung der Formeln der Metallreflexion für die numerische Berechnung enthalten.

I. Die entwickelte Theorie wendet für die zwischen Aether und Materie wirkenden absorbirenden Kräfte nur solche an, welche eine unter allen Umständen negative Arbeit ergeben, d. h. solche, welche die Functionen:

$$\psi_1 = Au' + Bv' + Cw' \quad \text{oder:}$$

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 17. p. 572. 1882.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 23. p. 104. 1884.

$$\begin{aligned}\Psi_2 = & A_x \frac{\partial u'}{\partial x} + A_y \frac{\partial u'}{\partial y} + A_z \frac{\partial u'}{\partial z} + B_x \frac{\partial v'}{\partial x} + B_y \frac{\partial v'}{\partial y} + B_z \frac{\partial v'}{\partial z} \\ & + C_x \frac{\partial w'}{\partial x} + C_y \frac{\partial w'}{\partial y} + C_z \frac{\partial w'}{\partial z},\end{aligned}$$

worin:
$$-A = + \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

gesetzt ist, zu einer negativen Summe von Quadraten machen.

Für isotrope Medien muss daher Ψ_1 und Ψ_2 die Form haben:

$$\begin{aligned}\Psi_1 = & -b(u'^2 + v'^2 + w'^2), \\ \Psi_2 = & -c' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 \\ & - c' \left(\left(\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 \right) \\ & - 2c \left(\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2.\end{aligned}$$

Hierzu bemerke ich zunächst, dass sich in meiner früheren Abhandlung¹⁾ das letzte Glied mit c nicht findet, da es mit dem vorhergehenden, mit c' multiplicirten bei allen Anwendungen auf ebene Wellen mit periodischen Schwingungen (also den einzigen in Betracht kommenden) völlig zusammenfällt. Es wäre indessen vielleicht besser gewesen, ausser dem ersten, welches wegen der Incompressibilitätsbedingung stets verschwindet, bei den Anwendungen mit dem Factor b zusammen den Factor c' gleich Null zu setzen, und damit die Kräfte, die bei Verschiebung oder Drehung eines Volumenelementes als Ganzen erregt werden, zugleich verschwinden zu lassen, also nur das letzte Glied beizubehalten, aus welchem dann folgt:

$$\begin{aligned}A_x = & -2cx'_x, & B_y = & -2cy'_y, & C_z = & -2cz'_z, \\ A_y = & B_x = -cx'_y, & B_z = & C_y = -cy'_z, & C_x = & A_z = -cz'_x.\end{aligned}$$

Dies ist nur eine formelle Aenderung.

II. Die Resultate der Theorie für das Problem der Reflexion an einem absorbirenden Medium habe ich aus-

1) W. Voigt, l. c. p. 108.

gedrückt durch gewisse Hülfswinkel μ_s, ν_s und μ_p, ν_p , welche eine einfache physikalische Bedeutung besitzen. Es ist nämlich μ_s und μ_p die Verzögerung, welche die Componenten parallel der Grenze bei der Brechung in der Trennungsfläche erfahren, $\mu_s + \nu_s, \mu_p + \nu_p$ die Verzögerung bei der Reflexion.

Bei der Anwendung auf numerische Rechnungen machen diese Formeln eine gewisse Vorsicht nöthig, über die ich jetzt das Nöthige entwickeln will. Ich knüpfe diese Bemerkung an die Untersuchung der Reflexion und Brechung an der Grenze zweier isotroper absorbirender Medien an, weil dies Problem jene Schwierigkeit besonders hervortreten lässt.

Sei also das erste Medium defnirt durch die Constanten M, A und c , das zweite durch M_1, A_1 und c_1 , indem wir, wie unter I. ausgeführt ist, die Constanten b und b_1 gleich Null setzen. Die Grenze sei wie früher die XY -Ebene, die Einfallsebene falle in die XZ -Ebene.

Für beide Medien gelten dann die Formeln für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω , den Absorptionscoëfficienten κ ¹⁾:

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} M\omega^2 = A(1 - \kappa^2) + 2\kappa C, & M_1\omega_1^2 = A_1(1 - \kappa_1^2) + 2\kappa_1 C_1, \\ 0 = 2\kappa A - C(1 - \kappa^2), & 0 = 2\kappa_1 A_1 - C_1(1 - \kappa_1^2), \end{array} \right.$$

M_1 ist nach dem früher Entwickelten gleich M zu setzen, wenn die Grenzgleichungen für die Verrückungen in der Neumann'schen Form benutzt werden sollen; C ist für c/τ , C_1 für c_1/τ gesetzt, falls $2\pi\tau = T$ die Schwingungsdauer der Oscillation bedeutet.

1. Betrachten wir zunächst die Componente normal zur Einfallsebene. Es sei:

$$\begin{aligned} v_c &= e^{-\frac{\beta z}{\tau\omega}} E_s \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega} \right), \\ v_r &= e^{+\frac{\beta z}{\tau\omega}} \left[R_s' \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right) + R_s'' \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right) \right], \\ v_d &= e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}} \left[D_s' \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right) + D_s'' \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

1) W. Voigt, l. c. p. 108.

Hierbei ist x der Sinus des gegebenen Einfallswinkels und¹⁾:

$$(2) \quad \begin{cases} 1 - x^2 = a^2 - \beta^2 + \gamma^2, & x = \beta\gamma, \\ 1 - x_1^2 = a_1^2 - \beta_1^2 + \gamma_1^2, & x_1 = \beta_1\gamma_1. \end{cases}$$

Die Grenzbedingungen sind für $z = 0$:

$$(3) \quad \begin{aligned} & v_e + v_r = v_d. \\ & A \frac{\partial(v_e + v_r)}{\partial z} + c \frac{\partial^2(v_e + v_r)}{\partial z \partial t} = A_1 \frac{\partial v_d}{\partial z} + c_1 \frac{\partial^2 v_d}{\partial z \partial t}. \end{aligned}$$

Setzt man:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{A\gamma + C\beta}{M\gamma\omega^2} = \sigma_s, & \frac{C\gamma - A\beta}{M\gamma\omega^2} = \delta_s, \\ \frac{A_1\gamma_1 + C_1\beta_1}{M\gamma_1\omega_1^2} = \sigma_{s_1}, & \frac{C_1\gamma_1 - A_1\beta_1}{M\gamma_1\omega_1^2} = \delta_{s_1}, \end{cases}$$

so wird:

$$(5) \quad \begin{cases} II_s R_s' = E_s [\alpha^2 \gamma^2 (\delta_s^2 + \sigma_s^2) - \alpha_1^2 \gamma_1^2 (\delta_{s_1}^2 + \sigma_{s_1}^2)], \\ II_s R_s'' = 2 E_s \alpha \gamma \alpha_1 \gamma_1 (\delta_s \sigma_{s_1} - \delta_{s_1} \sigma_s), \\ II_s D_s' = 2 E_s \alpha \gamma [\alpha \gamma (\delta_s^2 + \sigma_s^2) + \alpha_1 \gamma_1 (\delta_s \delta_{s_1} + \sigma_s \sigma_{s_1})], \\ II_s D_s'' = II_s R_s'' = 2 E_s \alpha \gamma \alpha_1 \gamma_1 (\delta_s \sigma_{s_1} - \delta_{s_1} \sigma_s), \\ II_s = (\alpha \gamma \delta_s + \alpha_1 \gamma_1 \delta_{s_1})^2 + (\alpha \gamma \sigma_s + \alpha_1 \gamma_1 \sigma_{s_1})^2. \end{cases}$$

Diese Resultate nehmen eine bemerkenswerthe Form an, wenn wir setzen:

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha \gamma \delta_s + \alpha_1 \gamma_1 \delta_{s_1} = M_s \sin(\mu_s + \lambda_s), \\ \alpha \gamma \sigma_s + \alpha_1 \gamma_1 \sigma_{s_1} = M_s \cos(\mu_s + \lambda_s), \\ \alpha \gamma \delta_s - \alpha_1 \gamma_1 \delta_{s_1} = -N_s \sin(\nu_s - \lambda_s), \\ \alpha \gamma \sigma_s - \alpha_1 \gamma_1 \sigma_{s_1} = +N_s \cos(\nu_s - \lambda_s), \end{cases}$$

und dabei $\operatorname{tg} \lambda_s$ beliebig entweder gleich δ_s/σ_s oder gleich $\delta_{s_1}/\sigma_{s_1}$ nehmen. Natürlich muss man mit der einmal gemachten Annahme consequent weiter rechnen. Im einen wie im anderen Falle ergibt sich dann:

$$(7) \quad \begin{cases} \sin \mu_s / \sin \nu_s = N_s / M_s, \\ M_s N_s \cos(\mu_s + \nu_s) = \alpha^2 \gamma^2 (\sigma_s^2 + \delta_s^2) - \alpha_1^2 \gamma_1^2 (\sigma_{s_1}^2 + \delta_{s_1}^2), \\ M_s N_s \sin(\mu_s + \nu_s) = 2 \alpha \gamma \alpha_1 \gamma_1 (\sigma_s \delta_{s_1} - \sigma_{s_1} \delta_s); \end{cases}$$

hingegen gilt nur für $\operatorname{tg} \lambda_s = \delta_s/\sigma_s$:

$$\operatorname{tg} \mu_s = \alpha_1 \gamma_1 (\sigma_s \delta_{s_1} - \delta_s \sigma_{s_1}) / (\alpha \gamma (\sigma_s^2 + \delta_s^2) + \alpha_1 \gamma_1 (\sigma_s \sigma_{s_1} + \delta_s \delta_{s_1}))$$

1) W. Voigt, l. c. p. 111.

Das Einsetzen in die obigen Formeln gibt dann:

$$(8) \left\{ \begin{aligned} R_s' &= \frac{E_s \cos(\mu_s + \nu_s) \sin \mu_s}{\sin \nu_s}, & R_s'' &= - \frac{E_s \sin(\mu_s + \nu_s) \sin \mu_s}{\sin \nu_s} = D_s'', \\ D_s' &= \frac{E_s \sin(\mu_s + \nu_s) \cos \mu_s}{\sin \nu_s}, \end{aligned} \right.$$

woraus sogleich folgt:

$$(9) \left\{ \begin{aligned} R_s &= \sqrt{R_s'^2 + R_s''^2} = \frac{E_s \sin \mu_s}{\sin \nu_s}; \\ D_s &= \sqrt{D_s'^2 + D_s''^2} = \frac{E_s \sin(\mu_s + \nu_s)}{\sin \nu_s}; \\ -\frac{R_s''}{R_s'} &= \operatorname{tg} \vartheta_s = \operatorname{tg}(\mu_s + \nu_s); & -\frac{D_s''}{D_s'} &= \operatorname{tg} \eta_s = \operatorname{tg} \mu_s. \end{aligned} \right.$$

2. Für die Componenten parallel der Einfallsebene setzen wir:

$$\begin{aligned} u_e &= e^{-\frac{\beta z}{\tau \omega}} \gamma E_p \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega} \right), \\ w_e &= -e^{-\frac{\beta z}{\tau \omega}} \frac{\alpha \gamma}{\beta^2 + \gamma^2} E_p \left(\gamma \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega} \right) \right. \\ &\quad \left. + \beta \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega} \right) \right), \\ u_r &= e^{+\frac{\beta z}{\tau \omega}} \gamma \left(R_p' \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right) + R_p'' \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right) \right), \\ w_r &= e^{+\frac{\beta z}{\tau \omega}} \frac{\alpha \gamma}{\beta^2 + \gamma^2} \left((R_p' \gamma - R_p'' \beta) \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right) \right. \\ &\quad \left. + (R_p' \beta + R_p'' \gamma) \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right) \right), \\ u_d &= e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau \omega_1}} \gamma_1 \left(D_p' \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right) + D_p'' \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right) \right), \\ w_d &= -e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau \omega_1}} \frac{\alpha_1 \gamma_1}{\beta_1^2 + \gamma_1^2} \left((D_p' \gamma_1 - D_p'' \beta_1) \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + (D_p' \beta_1 + D_p'' \gamma_1) \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right) \right) \end{aligned}$$

Die Grenzbedingungen sind für $z = 0$:

$$(10) \quad u_e + u_r = u_d, \quad w_e + w_r = w_d.$$

Setzt man:

$$(11) \quad \frac{\gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} = \sigma_p, \quad \frac{\gamma\beta}{\beta^2 + \gamma^2} = \delta_p, \quad \frac{\gamma_1^2}{\beta_1^2 + \gamma_1^2} = \sigma_{p_1}, \quad \frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_1^2 + \gamma_1^2} = \delta_{p_1},$$

so lautet das Resultat:

$$(12) \quad \begin{cases} II_p R_p' = E_p [\alpha^2 \gamma_1^2 (\delta_p^2 + \sigma_p^2) - \alpha_1^2 \gamma^2 (\delta_{p_1}^2 + \sigma_{p_1}^2)], \\ II_p R_p'' = 2 E_p \alpha \gamma \alpha_1 \gamma_1 (\delta_p \sigma_{p_1} - \delta_{p_1} \sigma_p), \\ II_p D_p' = 2 E_p \alpha \gamma [\alpha \gamma_1 (\delta_p^2 + \sigma_p^2) + \alpha_1 \gamma (\delta_p \delta_{p_1} + \sigma_p \sigma_{p_1})], \\ II_p D_p'' = 2 E_p \alpha \alpha_1 \gamma^2 (\delta_p \sigma_{p_1} - \delta_{p_1} \sigma_p), \\ II_p = (\alpha \gamma_1 \delta_p + \alpha_1 \gamma \delta_{p_1})^2 + (\alpha \gamma_1 \sigma_p + \alpha_1 \gamma \sigma_{p_1})^2. \end{cases}$$

Auch hier sei wieder eingeführt:

$$(13) \quad \begin{cases} \alpha \gamma_1 \delta_p + \alpha_1 \gamma \delta_{p_1} = M_p \sin(\mu_p + \lambda_p), \\ \alpha \gamma_1 \sigma_p + \alpha_1 \gamma \sigma_{p_1} = M_p \cos(\mu_p + \lambda_p), \\ \alpha \gamma_1 \delta_p - \alpha_1 \gamma \delta_{p_1} = -N_p \sin(\nu_p - \lambda_p), \\ \alpha \gamma_1 \sigma_p - \alpha_1 \gamma \sigma_{p_1} = N_p \cos(\nu_p - \lambda_p), \end{cases}$$

wobei $\operatorname{tg} \lambda_p$ beliebig gleich δ_p/σ_p oder gleich $\delta_{p_1}/\sigma_{p_1}$ gesetzt werden kann. Es folgt dann stets:

$$(14) \quad \begin{cases} \sin \mu_p / \sin \nu_p = N_p / M_p, \\ M_p N_p \cos(\mu_p + \nu_p) = \alpha^2 \gamma_1^2 (\sigma_p^2 + \delta_p^2) - \alpha_1^2 \gamma^2 (\sigma_{p_1}^2 + \delta_{p_1}^2), \\ M_p N_p \sin(\mu_p + \nu_p) = 2 \alpha \gamma \alpha_1 \gamma_1 (\sigma_p \delta_{p_1} - \sigma_{p_1} \delta_p), \end{cases}$$

hingegen gilt nur für $\operatorname{tg} \lambda_p = \delta_p/\sigma_p$:

$$\operatorname{tg} \mu_p = \alpha_1 \gamma (\sigma_p \delta_{p_1} - \delta_p \sigma_{p_1}) / (\alpha \gamma_1 (\sigma_p^2 + \delta_p^2) + \alpha_1 \gamma (\sigma_p \sigma_{p_1} + \delta_p \delta_{p_1})).$$

Dadurch wird:

$$(15) \quad \begin{cases} R_p' = E_p \frac{\cos(\mu_p + \nu_p) \sin \mu_p}{\sin \nu_p}, & R_p'' = -E_p \frac{\sin(\mu_p + \nu_p) \sin \mu_p}{\sin \nu_p}, \\ D_p' = E_p \gamma \frac{\sin(\mu_p + \nu_p) \cos \mu_p}{\sin \nu_p}, & D_p'' = -E_p \gamma \frac{\sin(\mu_p + \nu_p) \sin \mu_p}{\sin \nu_p}, \end{cases}$$

ferner:

$$(16) \quad \begin{cases} R_p = \sqrt{R_p'^2 + R_p''^2} = E_p \frac{\sin \mu_p}{\sin \nu_p}, \\ D_p = \sqrt{D_p'^2 + D_p''^2} = E_p \gamma \frac{\sin(\mu_p + \nu_p)}{\sin \nu_p}, \\ -\frac{R_p''}{R_p'} = \operatorname{tg} \vartheta_p = \operatorname{tg}(\mu_p + \nu_p), & -\frac{D_p''}{D_p'} = \operatorname{tg} \eta_p = \operatorname{tg} \mu_p \end{cases}$$

Diese Zusammenstellung zeigt, dass sich das Problem der Reflexion und Brechung an der Grenze zweier isotroper absorbirender Medien ebenso einfach und anschaulich löst, als wenn das erste vollkommen durchsichtig ist.

Was die eingeführten Hülfswinkel λ , μ und ν angeht, so sind dieselben zunächst durch (6) und (13) definirt. Hierin mag M und N die stets positive Wurzel aus den Ausdrücken $(\alpha\gamma\delta + \alpha_1\gamma_1\delta)^2 + (\alpha\gamma\sigma - \alpha_1\gamma_1\sigma_1)^2$ u. s. w. bedeuten. Es ist dann der Quadrant völlig bestimmt, in dem $\mu + \lambda$, $\nu - \lambda$ zu rechnen ist, da aber λ nur durch den Werth von $\operatorname{tg} \lambda$ definirt ist; so ist dasselbe bis auf ein Vielfaches von π unbestimmt, und gilt Gleiches von den μ und ν selbst. Hierdurch kommt bei manchen Anwendungen (namentlich auf das Verhalten dünner Schichten absorbirender Medien) eine Schwierigkeit.

Sie heben sich aber durch die Beobachtung folgender Regeln.

Wegen $\sin \mu / \sin \nu = N/M$ sind überall, wo die $\sin \mu$ und $\sin \nu$ statt der proportionalen, stets positiven M und N eingeführt sind, ihre absoluten Werthe zu nehmen, oder μ und ν zwischen 0 und π . Das Vorzeichen von $\operatorname{tg} \mu$, $\cos(\mu + \nu)$ und $\sin(\mu + \nu)$, wird nach den Formeln (7) und (14) beurtheilt. Die Gleichungen für D_s' und D_p' werden zur Beurtheilung des Vorzeichens am besten geschrieben:

$$D_s' = E_s \sin(\mu_s + \nu_s) \operatorname{ctg} \mu_s \frac{\sin \mu_s}{\sin \nu_s};$$

$$D_p' = E_p \frac{\gamma}{\gamma_1} \sin(\mu_p + \nu_p) \operatorname{ctg} \mu_p \frac{\sin \mu_p}{\sin \nu_p}.$$

III. Die Formen, welche ich im Vorstehenden wie auch in früheren Arbeiten den Gesetzen für die reflectirten und gebrochenen Amplituden gegeben habe, bieten den Vortheil grosser Kürze und Anschaulichkeit, insofern sie einen eigenthümlichen Zusammenhang dieser Grössen mit den Phasenverzögerungen ergeben, die bei der Reflexion und Brechung in der Grenze eintreten. Ebenso geben sie die am meisten der Beobachtung unterworfenen Grössen: die Differenz Δ der Verzögerungen der Componente senkrecht und parallel der

Grenze bei der Reflexion und das Amplitudenverhältniss $\rho = R_s/R_p = \operatorname{tg} \psi$ für den Fall $E_s = E_p$ ist in sehr einfacher Weise. Denn es gilt:

$$(17) \quad \Delta = \mu_p + \nu_p - \mu_s - \nu_s; \quad \rho = \frac{\sin \mu_s \cdot \sin \nu_p}{\sin \mu_p \cdot \sin \nu_s}$$

Aber diese Form hatte den Nachtheil, dass es nicht möglich war, bei der gewöhnlichen Metallreflexion die Constanten des absorbirenden Mediums, also etwa n und κ , in endlicher Form durch den Haupteinfallswinkel $\bar{\varphi}$ (für welchen $\Delta = \pi/2$ ist) und das entsprechende Hauptazimuth ψ auszudrücken, ein Nachtheil, der meine Theorie für die Anwendung viel unbequemer machte, als z. B. die Cauchy'sche.

Meine Bemühungen, andere Formen zu gewinnen, welche eine directe Bestimmung von n und κ durch die Beobachtungen gestatten, führten zu keinem Resultat, weil ich bei ihnen die volle Allgemeinheit meiner Formeln zu wahren suchte.

Ich verdanke meinem Assistenten, Hrn. P. Drude, der sich auf meinen Rath mit der Ableitung der Gesetze der Reflexion für absorbirende Krystalle in der Weise beschäftigt, dass Kräfte, welche die Arbeit Ψ_1 (siehe unter I) zu einer negativen Summe von Quadraten machen, nicht eingeführt werden, die wichtige Entdeckung, dass bei derselben Specialisirung, d. h. beim Nullsetzen der Constanten δ — was ich schliesslich bei numerischen Berechnungen früher auch stets gethan habe —, die Formeln für Δ und ρ bei der Metallreflexion in der That die Auflösung nach n und κ gestatten, und damit die Gewinnung des Vorzuges, den bisher die Cauchy'sche Theorie vor der meinigen voraus hatte.

Da bis zur Veröffentlichung der Untersuchung des Hrn. Drude noch geraume Zeit vergehen dürfte, die gewonnenen Resultate für unkrystallinische Medien aber die Anwendung meiner Theorie bedeutend erleichtert, so gebe ich im Nachfolgenden einige bezügliche Formeln, die wir beide gefunden haben, indem ich für die Ableitung auf die Abhandlung von Hrn. Drude verweise und nur bemerke, dass, so lange es sich allein um die Bestimmung der Grössen Δ und ρ handelt, die Lösung des Problems einfacher durch Exponentialgrössen mit complexen Exponenten stattfindet, als durch

trigonometrische Functionen, dass dieselben aber zur Bestimmung der $R, R_p, \vartheta, \vartheta_p$ selber wenig Vorthail bringen.

Für das oben auf anderem Wege abgeleitete Problem der Reflexion an der Grenze zweier absorbirender Medien kann man in denselben Bezeichnungen und unter Einführung zweier Hülfswinkel ε und ε_1 die Formeln für ϱ und $\mathcal{A}$ folgendermassen schreiben.

Es sei gesetzt:

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} 2\kappa = \zeta^2 \sin 4\varepsilon, \quad 1 - \alpha^2 - \kappa^2 = \zeta^2 \cos 4\varepsilon, \\ \text{also: } \zeta^4 = 4\kappa^2 + (1 - \alpha^2 - \kappa^2)^2, \\ 2\kappa_1 = \zeta_1^2 \sin 4\varepsilon_1, \quad 1 - \alpha_1^2 - \kappa_1^2 = \zeta_1^2 \cos 4\varepsilon_1, \\ \text{also: } \zeta_1^4 = 4\kappa_1^2 + (1 - \alpha_1^2 - \kappa_1^2)^2; \end{array} \right.$$

dann wird nach (2):

$$\gamma = \zeta \cos 2\varepsilon, \quad \beta = \zeta \sin 2\varepsilon, \quad \gamma_1 = \zeta_1 \cos 2\varepsilon_1, \quad \beta_1 = \zeta_1 \sin 2\varepsilon_1 \quad \text{und:}$$

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} \varrho \cos \mathcal{A} = \frac{\zeta^2 \zeta_1^2 - \alpha^2 \alpha_1^2}{\alpha^2 \alpha_1^2 + \zeta^2 \zeta_1^2 + 2\alpha \alpha_1 \zeta \zeta_1 \cos 2(\varepsilon + \varepsilon_1)} \\ \varrho \sin \mathcal{A} = \frac{2\alpha \alpha_1 \zeta \zeta_1 \sin 2(\varepsilon + \varepsilon_1)}{\alpha^2 \alpha_1^2 + \zeta^2 \zeta_1^2 + 2\alpha \alpha_1 \zeta \zeta_1 \cos 2(\varepsilon + \varepsilon_1)} \end{array} \right.$$

Diese Formeln sind in $\alpha, \zeta, \varepsilon$ und $\alpha_1, \zeta_1, \varepsilon_1$ symmetrisch, $\mathcal{A}$ und ϱ bleiben also ungeändert, wenn die beiden absorbirenden Medien vertauscht werden.

Es folgt noch:

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \mathcal{A} = \frac{2\alpha \alpha_1 \zeta \zeta_1 \sin 2(\varepsilon + \varepsilon_1)}{\zeta^2 \zeta_1^2 - \alpha^2 \alpha_1^2}, \\ \varrho^2 = \operatorname{tg}^2 \psi = \frac{\zeta^2 \zeta_1^2 + \alpha^2 \alpha_1^2 - 2\alpha \alpha_1 \zeta \zeta_1 \cos 2(\varepsilon + \varepsilon_1)}{\zeta^2 \zeta_1^2 + \alpha^2 \alpha_1^2 + 2\alpha \alpha_1 \zeta \zeta_1 \cos 2(\varepsilon + \varepsilon_1)} \end{array} \right.$$

$$\text{oder einfacher: } \cos 2\psi = \frac{2\alpha \alpha_1 \zeta \zeta_1 \cos(\varepsilon + \varepsilon_1)}{\zeta^2 \zeta_1^2 + \alpha^2 \alpha_1^2}.$$

Setzt man hierin noch:

$$(21) \quad \frac{\alpha \alpha_1}{\zeta \zeta_1} = \operatorname{tg} \frac{\delta}{2},$$

wobei ζ und ζ_1 wie oben überall die positiven Wurzeln aus (18) bedeuten mögen, so folgt schliesslich:

$$(22) \quad \operatorname{tg} \mathcal{A} = \operatorname{tg} \delta \sin 2(\varepsilon + \varepsilon_1), \quad \cos 2\psi = \sin \delta \cos 2(\varepsilon + \varepsilon_1).$$

Hierin ist $\alpha_1 = \alpha/n$ und:

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} 4\varepsilon = \frac{2\kappa}{1 - \alpha^2 - \kappa^2}, \quad \operatorname{tg} 4\varepsilon_1 = \frac{2\kappa}{1 - \alpha_1^2 - \kappa_1^2}, \\ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\alpha \alpha_1}{2\sqrt{\kappa \kappa_1}} \sqrt{\sin 4\varepsilon_1 \cdot \sin 4\varepsilon}. \end{array} \right.$$

Ist das erste Medium durchsichtig, so gilt einfacher wegen κ und $\varepsilon = 0$, $1 - \alpha^2 = \gamma^2$, $\alpha = \sin \varphi$:

$$(24) \quad \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \delta \sin 2\varepsilon_1, \quad \cos 2\psi = \sin \delta \cos 2\varepsilon_1,$$

wobei δ und ε_1 definirt ist durch:

$$(25) \quad \operatorname{tg} 4\varepsilon_1 = \frac{2n^2\kappa_1}{(1-\kappa_1^2)n^2 - \sin^2\varphi}, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\sin^2\varphi}{n \cos \varphi} \sqrt{\frac{\sin 4\varepsilon_1}{2\kappa_1}}.$$

Hiernach berechnet sich bequem ψ und A aus gegebenen n , κ für jedes φ .

Man kann aber auch umgekehrt aus den für beliebiges φ beobachteten ψ und A die Constanten n und κ berechnen.

Denn man hat zunächst aus (24):

$$(26) \quad \sin^2 \delta = \frac{\cos^2 2\psi + \operatorname{tg}^2 A}{1 + \operatorname{tg}^2 A}, \quad \cos 2\varepsilon_1 = \frac{\cos 2\psi}{\sin \delta},$$

d. h. für jeden Einfall die entsprechenden δ und ε_1 , — und aus (25):

$$(27) \quad \begin{cases} \sin^4 \varphi \sin 4\varepsilon_1 = 2\kappa_1 n^2 \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} \\ \sin^2 \varphi \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} + \operatorname{tg}^2 \varphi \cos 4\varepsilon_1 \right) = n^2 (1 - \kappa_1^2) \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2}, \end{cases}$$

d. h. zwei Gleichungen zur Bestimmung von n und κ_1 , welche als in $\kappa_1 n^2$ und $(1 - \kappa_1^2) n^2$ linear, die Berechnung dieser Grössen nach der Methode der kleinsten Quadrate bequem gestatten.

Das Resultat drückt sich am einfachsten aus durch die Einführung:

$$(28) \quad \operatorname{tg} 2\chi = \frac{\sin 4\psi}{\operatorname{ctg}^2 \varphi \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} + \cos 4\psi};$$

dann ist:

$$(29) \quad \kappa_1 = \operatorname{tg} \chi, \quad n = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}} \sqrt{\frac{\sin 4\varepsilon_1}{2\kappa_1}}.$$

Für den Haupteinfallswinkel $\bar{\varphi}$ ist $A = \frac{1}{2}\pi$, also nach (24) auch $\delta = \frac{1}{2}\pi$, und $\varepsilon_1 = \psi$, also:

$$(30) \quad \operatorname{tg} 2\chi = \frac{\sin 4\bar{\psi}}{\operatorname{ctg}^2 \bar{\varphi} + \cos 4\bar{\psi}}, \quad \kappa_1 = \operatorname{tg} \chi, \quad n = \frac{\sin^2 \bar{\varphi}}{\cos \bar{\varphi}} \sqrt{\frac{\sin 4\bar{\psi}}{2\kappa_1}}.$$

Dies sind die Werthe n und κ , ausgedrückt durch Haupteinfallswinkel $\bar{\varphi}$ und Hauptazimuth $\bar{\psi}$.

Göttingen, im März 1887.