**11. Ueber das Zurückbleiben des stark
gedämpften Magneten bei variabler Stromstärke;
von O. Chwolson.**

Es kommt vor, dass man den Variationen einer Stromstärke mittelst eines Galvanometers zu folgen hat; gehen diese Variationen nicht übermässig langsam vor sich und wechseln sie mehr oder weniger häufig ihre Richtung, so muss ein hoher Grad von Dämpfung angewandt werden. Es ist klar, dass in diesem Falle die augenblickliche Lage des sich bewegendes Magneten nicht mit der Ruhelage zusammenfällt, welche der Magnet, entsprechend der Stromstärke in diesem Moment, einnehmen würde und zwar, dass der Magnet in seiner Bewegung beständig sozusagen hinter der Stromstärke zurückbleiben wird. Die directe Ablesung gibt also bei wachsender Stromstärke zu kleine, bei sinkender zu grosse Werthe. Einen solchen Fall haben wir vor uns, wenn wir auf thermoelectrischem Wege den Temperaturänderungen eines Körpers folgen wollen, z. B. denjenigen eines Körpers, welcher den Sonnenstrahlen ausgesetzt ist, wie dies mehreren, theils neueren, theils älteren actinometrischen Messmethoden zu Grunde liegt. Als specielles Beispiel wollen wir im Weiteren den Fall ins Auge fassen, wo die electromotorische Kraft E als Function der Zeit t von der Form

$$(1) \quad \begin{cases} E = A(1 - e^{-mt}) \\ m = 0,35 \end{cases}$$

ist. Der Specialwerth $m = 0,35$ ist der actinometrischen Praxis entnommen und soll nur dazu dienen ein Zahlenbeispiel anführen zu können; t soll in *Minuten* ausgedrückt sein.

Die Coefficienten der Bewegungsgleichung. Um für die Grösse des Zurückbleibens absolute Zahlenwerthe ausrechnen zu können, müssen die Coefficienten in der Differentialgleichung der Bewegung des gedämpften Magneten bekannt sein. Das von mir benutzte Wiedemann'sche Galvanometer, von Edelmann construirt, enthält einen kleinen Glockenmagnet in

kugelförmigem Dämpfer, die Bewegung desselben scheint aperiodisch zu sein, sodass in der Gleichung

$$(2) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\alpha \frac{d\varphi}{dt} + \beta^2 \varphi = 0$$

$\alpha > \beta$ zu erwarten ist. Wäre $\alpha < \beta$, so würde das logarithmische Decrement

$$(3) \quad \lambda = \frac{\alpha \pi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$$

sein. Um β zu bestimmen wurde der Dämpfer entfernt und vermittels eines Tissot'schen Taschenchronometers die Schwingungszeit T des Glockenmagneten (bei geöffnetem Galvanometerdraht) bestimmt und $T = 2,75$ Sec. gefunden. Hieraus $\beta = \pi / T = 1,142 \text{ (sec)}^{-1}$, oder, da wir die Minute als Zeiteinheit annehmen

$$\beta = 68,54 \text{ (min)}^{-1}.$$

Bekanntlich ist β^2 proportional der Horizontalintensität h an der Stelle, wo sich der Glockenmagnet befindet. Es wurde nun ein Hülsmagnet horizontal in verschiedenen Entfernungen von dem Galvanometer so hingelegt, dass seine Axe parallel zum magnetischen Meridian war, die Verbindungslinie der beiden Magnete aber senkrecht zu diesem Meridian lag. Der Nordpol des Hülsmagneten war nach Süden gerichtet und die Lage so fixirt, dass keine Ablenkung des Glockenmagneten stattfand. Die Intensität h erhält auf diese Weise einen grösseren Werth h_i und ebenso β einen grösseren Werth β_i . Die h_i sind umgekehrt proportional den Ablenkungswinkeln φ_i , welche bei der entsprechenden Lage des Hülsmagneten durch eine constante electromotorische Kraft hervorgerufen werden; als Quelle diente hierbei ein Thermoelement Kupferneusilber. Entsprechend (3) erhält man bei jeder Lage des Hülsmagneten ein logarithmisches Decrement

$$\lambda_i = \frac{\alpha \pi}{\sqrt{\beta_i^2 - \alpha^2}}.$$

Wir haben nun die zwei Gleichungen

$$\frac{\beta_i}{\beta} = \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_i}}; \quad \frac{\alpha}{\beta_i} = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\pi^2 + \lambda_i^2}}$$

und hieraus

$$(4) \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i^2 + \pi^2}} \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_i}}.$$

Die Beobachtungen ergaben (Pawlowsk, 18. August 1892).

			$\sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_i}}$	λ_i	$\frac{\alpha}{\beta}$
I	9 ^h 8 ^m	$\varphi = 40,02$	1	—	—
II	9 ^h 32 ^m	$\varphi_1 = 35,28$	1,0650	6,24	0,952
III	9 ^h 40 ^m	$\varphi_2 = 31,74$	1,1228	5,08	0,956
IV	9 ^h 55 ^m	$\varphi_3 = 24,97$	1,2660	3,62	0,956
V	10 ^h 10 ^m	$\varphi_4 = 13,71$	1,7084	2,125	0,957
VI	10 ^h 20 ^m	$\varphi = 40,06$	1	—	—

Die Versuche I und VI entsprechen der Abwesenheit des Hilfsmagneten; bei den Versuchen II bis V wurde derselbe successive dem Galvanometer genähert. Da der Werth II von λ_i sehr unsicher ist, nehmen wir $\alpha/\beta = 0,956$, also aus (4)

$$(5) \quad \alpha = 65.53 (\text{min})^{-1}.$$

Die gesuchte Bewegungsgleichung lautet also

$$(6) \quad \varphi \frac{d^2}{dt^2} + 131,06 \frac{d\varphi}{dt} + 4698 \varphi = 0.$$

Wider Erwarten ist $\alpha < \beta$, die Bewegung also *nicht* aperiodisch. Aus (3) finden wir $\lambda = 10,24$; eine anfängliche Ablenkung von 500 Scalentheilen würde einen für die Beobachtung unmerklichen Ausschlag von $1/50$ Scalentheilen nach der anderen Seite ergeben. Die Schwingungszeit wird durch den Dämpfer von 2,75 sec bis auf $t = \pi/\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = 9,4$ sec erhöht.

Das Zurückbleiben des Magneten. Bei variabler electromotorischer Kraft findet ein Zurückbleiben der Stromstärke statt; bei dem von mir benutzten Galvanometer war dies Zurückbleiben aber zu vernachlässigen, da der Widerstand W des Stromkreises 1,2 Ohm, der Coefficient der Selbstinduction P aber nur 0,008 Quadrant betrug. Das Zurückbleiben der Stromstärke J ist nun aber gleich $P/W(dJ/dt)$, wo hier $P/W = 0,00011$ min. Bewegt sich der Magnet mit einer Geschwindigkeit von 200 Scalentheilen in der Minute, so entspricht das Zurückbleiben der Stromstärke nur 0,022 Scalentheilen. Wir können also die Stromstärke proportional der electromotorischen Kraft annehmen.

Einen wohl für alle Fälle genügend angenäherten Werth für das Zurückbleiben des gedämpften Magneten kann man auf folgende einfache Weise erhalten. Die Bewegungsgleichung des Magneten ist bei variabler Stromstärke von der Form

$$(7) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\alpha \frac{d\varphi}{dt} + \beta^2 \varphi = F(t).$$

Die der augenblicklichen Stromstärke entsprechende Ablenkung Φ ist gleich $F(t)/\beta^2$. Hieraus

$$\varphi = \Phi - \frac{2\alpha}{\beta^2} \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Vernachlässigt man das letzte Glied, so erhält man für das Zurückbleiben $\varphi - \Phi$ den Werth

$$(8) \quad \varphi - \Phi = - \frac{2\alpha}{\beta^2} \frac{d\varphi}{dt}.$$

(4) und (5) ergeben

$$(9) \quad \varphi - \Phi = - 0,0279 \frac{d\varphi}{dt},$$

wo $d\varphi/dt$ sich auf die Minute als Zeiteinheit bezieht.

Eine genaue Integration von (7) zeigt, dass z. B. in dem Fall, dass die Variation der electromotorischen Kraft durch (1) bestimmt ist, etwa 5 Sec. nach Beginn der Bewegung das Zurückbleiben durch (9) genügend genau ausgedrückt wird; für den Coefficienten rechts erhält man 0,0281.

Die Formel (9) zeigt, dass das Zurückbleiben des gedämpften Magneten ein sehr bedeutendes sein kann. Durchläuft der Magnet z. B. 4 Scalentheile in der Secunde ($d\varphi/dt=240$), so beträgt das Zurückbleiben 6,7 Scalentheile.

St. Petersburg, November 1893.