Zur Theorie der Flächen, welche eine Schar von Kegelschnitten enthalten.

Von Eduard Weyr in Prag.

Die Anordnung der Berührungsebenen einer Regelfläche längs einer Erzeugenden ist wohl bekannt; um einen Schritt vorwärts zu thun, hat man nur an Stelle der geradlinigen Erzeugenden Kegelschnitte zu substituieren und demnach das folgende Problem in Angriff zu nehmen:

Eine Fläche ist als geometrischer Ort eines Kegelschnittes gegeben; es ist die Anordnung ihrer Berührungsebenen längs eines Kegelschnittes zu studieren.

Dieses geschieht in der nachfolgenden Arbeit, die im Wesen eine Wiedergabe der in böhmischer Sprache erschienenen Schrift des Verfassers „O theorii ploch“, Prag 1891, ist.

Zwischen zwei unendlich nahen Kegelschnitten Σ und Σ_1 der betrachteten Fläche befindet sich ein Flächenelement oder ein infinitesimaler Streifen, den ich mit dem Symbol $(\Sigma \Sigma_1)$ bezeichne; die Berührungsebenen dieses Flächenelementes werden von einer developpablen Fläche eingehüllt, welche, da sie zwei Kegelschnitten umschrieben ist, höchstens von der vierten Classe ist.

Im Nachfolgenden werden die erwähnten Flächenelemente nur in Ansehung ihrer Berührungsebenen betrachtet, so dass ein Flächenstreifen $(\Sigma \Sigma_1)$ als gegeben angesehen wird, sobald der Kegelschnitt Σ und die developpable Fläche gegeben ist, welche alle Berührungsebenen des Streifens umhüllt. Es kommt demnach auf das Studium der Anordnung der Berührungsebenen dieser developpablen Fläche an.

Betrachten wir speciell eine Fläche, welche von Kegelschnitten erfüllt wird, die alle durch einen festen Punkt gehen. Zwei unendlich nahe Kegelschnitte Σ und Σ_1 der Fläche werden einen Flächenstreifen $(\Sigma \Sigma_1)$ bestimmen, dessen Berührungsebenen von einer developpablen Fläche dritter Classe umhüllt werden.

Wenn, noch specieller, alle erzeugenden Kegelschnitte durch zwei feste Punkte gehen, so ist die Umhüllungsfläche ein Kegel zweiter Classe. Ist nun irgend ein Flächenelement ($\Sigma \Sigma_1$) durch den Kegelschnitt Σ und die zugehörige developpable Fläche gegeben, so wird diese Fläche von der vierten, dritten oder zweiten Classe sein; im ersten Falle werden wir sagen, dass die zwei unendlich nahen Kegelschnitte Σ und Σ_1 keinen gemeinsamen Punkt haben; im zweiten, dass sie einen gemeinsamen Punkt haben, im dritten endlich, dass sie zwei gemeinschaftliche Punkte haben. In gleicher Weise kann man sagen, und sagt es auch thatsächlich, dass ein Flächenstreifen einer developpablen Fläche durch zwei sich schneidende Gerade begrenzt wird, obgleich zwei noch so nahe Erzeugende einer developpablen Fläche sich nicht schneiden; allein in Ansehung der Berührungsebene kann man diesen Flächenstreifen durch das Flächenelement einer Kegelfläche ersetzen, also einer Fläche, deren Erzeugende insgesamt durch einen festen Punkt gehen.

Die wichtigsten Ergebnisse der nachfolgenden Arbeit sind nun diese:

Ein Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) ist bestimmt, sobald der Kegelschnitt Σ nebst den Berührungsebenen des Streifens in sieben Punkten von Σ gegeben ist. Man kann dann die Berührungsebene des Streifens in einem beliebigen Punkte von Σ construieren und entscheiden, ob die unendlich nahen Kegelschnitte Σ und Σ_1 keinen, einen oder zwei Punkte gemein haben. Im zweiten Falle wird der Σ und Σ_1 gemeinsame Punkt construiert, oder genauer gesprochen, es wird jener Punkt construiert, durch den ein zu Σ benachbarter Kegelschnitt geführt werden müsste, um die diesen beiden Kegelschnitten umschriebene developpable Fläche mit jener zu identificieren, welche zu dem gegebenen Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) gehört. Im dritten Falle können die den Kegelschnitten Σ und Σ_1 gemeinschaftlichen Punkte auf Σ beliebig gewählt werden.

Es wird die Construction der Berührungsebenen einer von Kegelschnitten erzeugten Fläche in dem Falle gegeben, dass die Fläche fixirt ist durch fünf Leitcurven und durch die developpable Fläche, welche die Ebenen jener Kegelschnitte umhüllt; und es wird auch hier die Classe des einem Kegelschnitte Σ benachbarten Flächenstreifens ($\Sigma \Sigma_1$) bestimmt.

Ferner wird gezeigt, dass ein von zwei unendlich nahen Kegelschnitten Σ und Σ_1 begrenzter Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) Leitgerade besitzt, d. i. zwei derart gelegene Gerade, dass die durch einen Punkt von Σ zu ihnen geführte Transversale in die in jenem Punkte construierte Berührungsebene des Streifens fällt; eine Ausnahme hiervon kommt nur bei einem ganz speciellen, in den Artikeln 50 und 56 betrachteten Flächenstreifen vor.

Es wird die Construction aller Leitgeraden eines infinitesimalen Streifens ($\Sigma \Sigma_1$) gegeben und die Anordnung dieser Geraden studiert.

Man bemerkt die Verwandtschaft zwischen einem Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) und einem von zwei Geraden begrenzten infinitesimalen Streifen, welche darin besteht, dass beide Flächenelemente Leitgerade besitzen.

Im Capitel II werden einige im Capitel I hergeleitete Resultate auf eine andere Art gewonnen, und im letzten Capitel werden analytische Betrachtungen zur Bekräftigung einiger vorausgehenden, rein geometrischen Untersuchungen angestellt; ein Vorgehen, das in Rücksicht auf die zahlreichen infinitesimalen Deductionen wohl als gerechtfertigt erscheinen dürfte.

I. Über das System von zwei unendlich nahen Kegelschnitten.

1. Es sei eine Fläche II als geometrischer Ort eines variablen Kegelschnittes dadurch gegeben, dass die developpable Umhüllungsfläche der Ebenen dieses Kegelschnittes gegeben ist, sowie fünf Punkte in jeder dieser Ebenen, durch welche der Kegelschnitt zu legen ist; letzteres geschieht durch Angabe von fünf auf II situirten Curven.

Es seien ϱ und ϱ_1 zwei Berührungsebenen der gegebenen developpablen Fläche und $\Sigma \Sigma_1$ die in ihnen enthaltenen Kegelschnitte.

Alle Ebenen, welche Σ und Σ_1 berühren, werden von einer developpablen Fläche höchstens vierter Classe eingehüllt; dieselbe nähert sich für den Fall, dass die Ebene ϱ_1 der Ebene ϱ sich nähert, einer Grenzfläche, welche offenbar die Einhüllende aller längs Σ construirten Berührungsebenen von II ist.

Wir werden noch eine zweite Grenzfläche betrachten, die II längs Σ berührt; legt man nämlich durch Σ , Σ_1 und irgend eine feste Linie Γ eine Regelfläche, so ist die Grenzlage, der sich diese Fläche für den Fall nähert, dass ϱ_1 sich ϱ nähert, eine solche Fläche.

Das Studium der einen oder der anderen soeben definierten Fläche genügt zur Lösung des aufgestellten Problems.

2. Man erkennt leicht, dass beide eben angedeuteten Wege zu demselben Ziele führen.

Es mögen Σ , Σ_1 , Σ_2 , ... aufeinanderfolgende Kegelschnitte der Fläche II und ϱ , ϱ_1 , ϱ_2 , ... ihre Ebenen bezeichnen. Um die durch einen gegebenen Punkt V gehenden Berührungsebenen von II zu bestimmen, welche II in einem Punkte von II berühren, projicieren wir die Linien Σ_1 , Σ_2 aus dem Punkte V auf die Ebene ϱ ; es mögen die Projectionen mit Σ'_1 , Σ'_2 , ... bezeichnet werden. Die Umhüllungslinie der Kegelschnitte Σ , Σ_1 , Σ_2 , ... ist die Projection

der Umrisscurve der Fläche Π , und die Punkte, in welchen die Umhüllungslinie Σ berührt, werden die Berührungspunkte der gesuchten Berührungsebene sein. Diese Punkte sind indessen die Grenzlagen der Durchschnittspunkte von Σ und Σ_1 , und die in ihnen construierten Tangenten von Σ sind die Grenzlagen der Σ und Σ_1 gemeinsamen Tangenten, beides natürlich für den Fall, dass sich der Kegelschnitt Σ_1 der Lage Σ nähert.

Projiciert man demnach Σ und Σ_1 aus dem Punkte V durch zwei Kegel, so sind einerseits die Grenzlagen der den beiden Kegeln gemeinsamen Berührungsebenen die gesuchten Ebenen, andererseits sind die Grenzlagen der den beiden Kegeln gemeinsamen Kanten in den gesuchten Ebenen gelegen, woraus auch sofort ersichtlich ist, dass die der Fläche Π längs Σ umschriebene developpable Fläche im allgemeinen von der vierten Classe ist.

3. Es seien Σ und Σ_1 zwei unendlich nahe Kegelschnitte der Fläche Π und ϱ, ϱ_1 ihre Ebenen. Die Schnittpunkte von Σ_1 mit der den Ebenen ϱ und ϱ_1 gemeinsamen Geraden, oder kürzer mit $\overline{\varrho \varrho_1}$ mögen mit G_1, H_1 bezeichnet werden; diese Punkte werden im allgemeinen nicht auf Σ liegen, was hier ausdrücklich vorausgesetzt werden mag.

In zwei beliebigen Punkten D, E von Σ mögen die Berührungsebenen δ, ε von Π construiert sein. Es sei ferner V ein beliebiger Punkt auf der Schnittlinie $\overline{\delta \varepsilon}$ der beiden Ebenen, und es werde die Aufgabe gestellt, die weiteren zwei durch V gehenden Berührungsebenen von Π zu bestimmen, welche diese Fläche in einem Punkte von Σ berühren, d. h. die weiteren zwei durch V gehenden Berührungsebenen des Flächenstreifens ($\Sigma \Sigma_1$) zu bestimmen.

Man projiciere Σ_1 aus V auf die Ebene ϱ in den Kegelschnitt Σ' ; dieser geht natürlich durch die Punkte D, E, G_1, H_1 und schneidet demnach Σ in zwei weiteren Punkten P_1, P_2 , den Berührungspunkten der gesuchten Tangentialebenen.

Durchläuft V die Gerade $\overline{\delta \varepsilon}$, so stellt die Projection Σ' Individuen des Kegelschnittbüschels mit den Basispunkten D, E, G_1, H_1 vor und es bilden demnach P_1, P_2 Paare einer auf Σ gelegenen Punktinvolution, deren Centrum sich auf der Geraden $\overline{G_1 H_1}$, d. i. $\overline{\varrho \varrho_1}$ befindet. Diese Involution ist mit der Punktreihe V projectivisch.

Um diesen letzten Ausspruch nachzuweisen, genügt es, zu zeigen, dass die Reihe der Punkte V auf $\overline{\delta \varepsilon}$ projectivisch ist mit dem Büschel der Kegelschnitte Σ' , was im nächsten Artikel geschieht.

4. Es mögen jetzt ϱ und ϱ_1 zwei ganz beliebige Ebenen sein, und Σ_1 sei ein in ϱ_1 gelegener Kegelschnitt, dessen Schnitt-

punkte mit $\overline{q q_1}$ wiederum G_1, H_1 bezeichnet werden mögen. Es seien ferner δ und ε zwei Ebenen, die Σ_1 berühren und V ein auf der Geraden $\overline{\delta \varepsilon}$ beliebig gewählter Punkt.

Die Projection von Σ_1 aus dem Punkte V auf die Ebene ϱ wird ein Kegelschnitt Σ' sein, der durch die Punkte G_1, H_1 geht und die Schnittlinien $\overline{\delta \varrho}, \overline{\varepsilon \varrho}$ berührt. Ist t die Tangente von Σ_1 im Punkte G_1 und t' die Tangente von Σ' in demselben Punkte, so ist t' die Projection von t , d. h. die durch t und t' gehende Ebene (tt') geht durch V .

Durchläuft V die Gerade $\overline{\delta \varepsilon}$, so erzeugt t' ein Büschel, das als Schnitt des Büschels der Ebenen (tt') erscheint; dieses ist aber mit der auf $\overline{\delta \varepsilon}$ gelegenen Punktreihe perspectivisch, diese Punktreihe demnach mit dem von t' erzeugten Strahlenbüschel projectivisch.

An dieser Betrachtung ändert die im vorigen Artikel vorausgesetzte Nachbarlage der Ebenen ϱ und ϱ_1 gar nichts. In diesem Falle jedoch bilden die den verschiedenen auf $\overline{\delta \varepsilon}$ gelegenen Projectionscentren V entsprechenden Linien Σ' ein Kegelschnittbüschel mit den Basispunkten D, E, G_1, H_1 ; es ist demnach in diesem Falle das Büschel der im Punkte G_1 construierten Tangenten t' mit dem Büschel der Kegelschnitte Σ' projectivisch, und dieses demnach auch mit der Reihe der Punkte V auf $\overline{\delta \varepsilon}$ projectivisch, wie behauptet wurde.

5. Unter der steten Voraussetzung, dass die unendlich nahen Kegelschnitte Σ und Σ_1 der Fläche II keinen gemeinsamen Punkt besitzen, dass also die Schnittpunkte G, H von Σ und $\overline{\varrho \varrho_1}$ von den Schnittpunkten G_1, H_1 der Linie Σ_1 mit $\overline{\varrho \varrho_1}$ verschieden sind, erkennt man leicht, dass die Ebene ϱ die Fläche II in den Punkten G und H berührt; diese Ebene enthält nämlich außer der im Punkte G , resp. H construierten Tangente von Σ noch das lineare Element $\overline{GG_1}$ resp. $\overline{HH_1}$ der Fläche II . Bezeichnet man demnach mit V_0 den Schnittpunkt von $\overline{\delta \varepsilon}$ mit ϱ , so gehen durch diesen Punkt außer δ und ε noch zwei mit ϱ zusammenfallende Berührungsebenen des infinitesimalen Streifens $(\Sigma \Sigma_1)$ mit den resp. Berührungspunkten G, H ; es bilden demnach die Punkte G, H das dem Punkte V_0 projectivisch entsprechende Paar der oben abgeleiteten Involution.

Durch Zusammenfassung des Bisherigen ergibt sich folgender Satz: Durch einen beliebigen Punkt V der Schnittlinie $\overline{\delta \varepsilon}$ zweier Berührungsebenen δ, ε eines von zwei unendlich nahen Kegelschnitten Σ, Σ_1 , die keinen gemeinsamen Punkt besitzen, begrenzten Flächenstreifens $(\Sigma \Sigma_1)$ geben außer δ, ε noch zwei

Berührungsebenen des Streifens; ihre Berührungspunkte P_1, P_2 bilden Paare einer auf Σ gelegenen und mit der Reihe der Punkte V projectivischen Punktinvolution, wobei speciell dem Schnittpunkte V_0 von $\overline{\delta\epsilon}$ mit q jenes Punktpaar entspricht, in welchem Σ von $q q_1$ geschnitten wird; es geht demnach die Verbindungslinie $\overline{P_1 P_2}$ durch einen festen, auf $q q_1$ gelegenen Punkt und erzeugt ein mit der Reihe der Punkte V projectivisches Strahlenbüschel, wobei dem Punkte V_0 der Strahl $q q_1$ entspricht.

6. Die Fläche Π möge als geometrischer Ort von Kegelschnitten, welche auf die im Artikel 1 angegebene Art mittelst fünf Leitlinien und einer developpablen Fläche bestimmt sind, gegeben sein.

Es sei q eine Berührungsebene der developpablen Fläche, A, B, C, D, E ihre Schnittpunkte mit den fünf Leitlinien, p endlich die Gerade, längs welcher q die developpable Fläche berührt.

Es soll die Berührungsebene der Fläche Π in einem beliebigen Punkte des durch die Punkte A, B, C, D, E geführten Kegelschnittes Σ construiert werden.

Der im vorhergehenden Artikel gewonnene Satz gibt die Lösung dieser Aufgabe.

Vor allem bemerke man, dass die Gerade p als die Schnittlinie $q q_1$ zweier Nachbarberührungsebenen der gegebenen developpablen Fläche erscheint, von denen die zweite q_1 den Nachbarkegelschnitt Σ_1 der Fläche Π enthält. Man construiere die Berührungsebenen der Fläche Π in den Punkten A, B, C, D, E und bezeichne sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$; dieselben sind durch die Tangenten der Leitlinien und des Kegelschnittes Σ in den betreffenden Punkten bestimmt. Ferner mögen mit V_a, V_b, V_c, V_0 die Schnittpunkte der Ebenen α, β, γ, q mit der Geraden $\overline{\delta\epsilon}$ bezeichnet werden.

Nun construiere man auf der Geraden p jenen Punkt O , der dadurch bestimmt ist, dass die Punkte V_a, V_b, V_c, V_0 zu den Strahlen $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, p$ projectivisch sind; der Punkt O wird auf bekannte Art mit Hilfe des bloßen Lineals erhalten. Mit (1) möge nun die durch Zuweisung der Punkte V_a, V_b, V_c den Strahlen $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ zwischen der Punktreihe $\overline{\delta\epsilon}$ und dem in q gelegenen Strahlenbüschel O festgelegte Projectivität bezeichnet werden.

Um die Berührungsebene q der Fläche Π in einem beliebigen Punkte F des Kegelschnittes Σ zu construiern, ziehen

wir den Strahl OF und bestimmen auf $\delta\varepsilon$ den ihm vermöge der Relation (1) zugewiesenen Punkt V_f ; durch diesen Punkt geht die gesuchte Berührungsebene und ist demnach durch die Gerade $\overline{FV_f}$ und die in F construierte Tangente von Σ bestimmt.

Hierbei wurde freilich stillschweigend vorausgesetzt, dass die Nachbarkegelschnitte Σ und Σ_1 keinen gemeinsamen Punkt besitzen; die nachfolgenden Betrachtungen sollen zeigen, auf welche Art hierüber entschieden werden kann, und wie in den übrigen Fällen das vorgelegte Problem zu lösen ist.

Nähert sich der Punkt F dem Punkte D , so nähert sich die Ebene φ der Ebene δ , und die Schnittlinie von φ und δ nähert sich der in δ gelegenen Geraden jener developpablen Fläche, welche alle Berührungsebenen des infinitesimalen Streifens $(\Sigma\Sigma_1)$ einhüllt. Bezeichnet man mit d, f die Tangenten des Kegelschnittes Σ in den Punkten D, F und mit R den Schnittpunkt dieser Tangenten, so ist $\overline{RV_f}$ die Schnittlinie der Ebenen δ und φ . Bei obiger Annäherung nähert sich R offenbar dem Punkte D und V_f dem Punkte V_a , wenn V_a jenen Punkt der Reihe $\delta\varepsilon$ bezeichnet, der vermöge (1) dem Strahle $\overline{OD}$ entspricht. Es ist somit die Verbindungslinie $\overline{DV_a}$ die durch den Punkt D gehende Gerade jener Umhüllungsfläche. Hierdurch ist eine Construction der Oberflächengeraden der dem Flächenstreifen $(\Sigma\Sigma_1)$ umschriebenen developpablen Fläche gewonnen.

7. Setzen wir nun voraus, dass die Nachbarkegelschnitte Σ und Σ_1 der Fläche Π einen Punkt gemein haben, dass also etwa der Punkt G mit dem Punkte G_1 zusammenfällt, wenn wiederum G, H die Schnittpunkte von Σ mit der Geraden ϱq_1 und G_1, H_1 jene von Σ_1 mit dieser Geraden bezeichnen.

Die Tangenten t und t_1 von Σ und Σ_1 im Punkte G bestimmen die Berührungsebene der Fläche Π in diesem Punkte; ihre Berührungsebene im Punkte H ist aus dem im Art. 5 angeführten Grunde die Ebene ϱ .

Wird die Linie Σ_1 aus einem beliebigen Punkte V auf die Ebene ϱ in den Kegelschnitt Σ' projiciert, so geht Σ' durch die Punkte G und H_1 und schneidet demnach den Kegelschnitt Σ noch in drei Punkten; es sind dies die Berührungspunkte von drei durch V gehenden Berührungsebenen des Flächenstreifens $(\Sigma\Sigma_1)$. Alle Berührungsebenen des gegebenen infinitesimalen Streifens $(\Sigma\Sigma_1)$ umhüllt demnach eine developpable Fläche dritter Classe.

Befindet sich der Punkt V auf der Schnittlinie $\delta\varepsilon$ zweier in den Punkten D, E von Σ construierten Berührungsebenen des

gegebenen Flächenstreifens, so geht der Kegelschnitt Σ' durch die Punkte D, E, G, H_1 , von welchen die ersten drei auf Σ liegen; es schneidet dann Σ' den Kegelschnitt Σ nur noch in einem Punkte P , dem Berührungspunkte der außer δ und ε noch durch den Punkt V gehenden Berührungsebene des Streifens. Nach Art. 4 ist das Büschel der Kegelschnitte Σ' projectivisch mit der auf $\delta\varepsilon$ gelegenen Reihe der Punkte V , und demnach auch die krumme Reihe der Punkte P von Σ projectivisch mit der Reihe der Punkte V auf $\delta\varepsilon$; in dieser Projectivität entspricht wiederum dem in q gelegenen Punkte V_o von $\delta\varepsilon$ der Punkt H der krummen Reihe, da ja die ihm zugehörige Berührungsebene q ist.

Werden die Punkte P aus G projiciert, so erhält man ein Büschel von Strahlen $\overline{GP}$, das mit der Reihe der Punkte V projectivisch ist, wobei freilich dem Strahle $\overline{GH}$ oder $q q_1$ der Punkt V_o entspricht.

Wir erhalten demnach die Berührungsebene q des infinitesimalen Streifens ($\Sigma \Sigma_1$) in einem beliebigen Punkte F , wenn wir zum Strahle $\overline{GF}$ den projectivisch zugeordneten Punkt V der Reihe $\delta\varepsilon$ construieren; durch diesen Punkt V_f und die in F construierte Tangente von Σ geht die Ebene q .

Genau so wie im vorhergehenden Artikel ergibt sich auch hier, dass die Gerade $\overline{DV_a}$ auf der dem gegebenen Streifen umschriebenen developpablen Fläche dritter Classe liegt; hierbei bezeichnet V_a jenen Punkt der Reihe $\delta\varepsilon$, der dem Strahl $\overline{GD}$ projectivisch entspricht.

Es mag gleich bemerkt werden, dass bei reellen Kegelschnitten Σ und Σ_1 in dem soeben betrachteten Falle, wo diese Kegelschnitte einen Punkt gemein haben, die Punkte G, H, H_1 reell sind. Denn wäre der mit G_1 zusammenfallende Punkt G imaginär, so würden die zu ihnen conjugierten imaginären Punkte H und H_1 zusammenfallen, so dass, wider die Voraussetzung, Σ und Σ_1 zwei gemeinsame Punkte hätten. Es ist somit G und daher auch H und H_1 reell.

Setzen wir schließlich voraus, dass die unendlich nahen Kegelschnitte Σ und Σ_1 zwei gemeinsame Punkte G, H besitzen, die natürlich entweder beide reell oder imaginär sind. Die Tangenten von Σ und Σ_1 in diesen Punkten bestimmen die Berührungsebenen des infinitesimalen Streifens ($\Sigma \Sigma_1$) in G und H . Wird die Curve Σ_1 aus einem beliebigen Punkte V auf die Ebene q in den Kegelschnitt Σ' projiciert, so geht Σ' durch G und H und schneidet demnach Σ noch in zwei Punkten, woraus

folgt, dass die dem Streifen umschriebene developpable Fläche von der zweiten Classe ist; es ist dies der durch die Kegelschnitte Σ und Σ_1 gehende Kegel. In diesem Falle gehen alle Berührungsebenen des infinitesimalen Streifens ($\Sigma \Sigma_1$) durch einen festen Punkt, den Kegelscheitel.

8. In die Lösung des im Art. 6 aufgestellten Problems giengen folgende Stücke ein: der Kegelschnitt Σ mit fünf seiner Punkte A, B, C, D, E und den Berührungsebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ des Streifens ($\Sigma \Sigma_1$) in diesen Punkten, und endlich die Schnittlinie $\varrho \varrho_1$ der Ebenen der beiden unendlich nahen Kegelschnitte Σ und Σ_1 .

Hieraus folgt, dass durch diese Stücke die Berührungsebenen der Fläche Π längs Σ bestimmt sind, d. h. dass hierdurch der infinitesimale Streifen ($\Sigma \Sigma_1$) bestimmt ist.

Die Angabe der Geraden $\varrho \varrho_1$ ist der Angabe von zwei Berührungsebenen des Streifens äquivalent; da wir wissen, dass in den auf $\varrho \varrho_1$ liegenden Punkten von Σ die Berührungsebenen des Streifens mit ϱ zusammenfallen.

Das im Art. 6 formulierte und gelöste Problem kann demnach folgendermaßen gestellt werden:

Ein infinitesimaler Streifen ($\Sigma \Sigma_1$) ist durch den Kegelschnitt Σ , durch seine Berührungsebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ in fünf Punkten A, B, C, D, E von Σ und durch die den Ebenen von Σ und Σ_1 gemeinsame Gerade p gegeben; es soll seine Berührungsebene in einem beliebigen Punkte von Σ construiert werden.

Die allgemeine Lösung ist nach Art. 6, 7 u. 8 die folgende: Gehen die fünf gegebenen Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ durch einen Punkt V , so gehen alle Berührungsebenen des Streifens durch V ; die Nachbarkegelschnitte Σ und Σ_1 haben in diesem Falle zwei gemeinsame Punkte, und die Berührungsebenen des Streifens werden von einem Kegel zweiter Classe umhüllt.

Gehen die fünf Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ nicht durch einen Punkt, so schneiden α, β, γ die Gerade $\delta \varepsilon$ in gewissen Punkten V_a, V_b, V_c , da keine drei der gegebenen Ebenen durch eine Gerade gehen können; in der That müssten durch die Spur dieser Geraden auf ϱ drei Tangenten des Kegelschnittes Σ gehen.

Man bestimme nun auf der Geraden p jenen Punkt O , der vier mit den Punkten V_a, V_b, V_c, V_o projectivische Strahlen OA, OB, OC, p liefert, mit V_o wiederum den Schnittpunkt von $\delta \varepsilon$ und ϱ bezeichnet. — Fällt der so bestimmte Punkt O nicht auf Σ , so gilt die im Art. 6 gegebene Construction; in diesem Falle haben die Nachbarlinien Σ und Σ_1 keinen

gemeinsamen Punkt, und die Berührungsebenen des gegebenen Streifens werden von einer developpablen Fläche vierter Classe umhüllt. — Fällt hingegen der Punkt O auf Σ , so hat die im Art. 7 gegebene Lösung Geltung.

In diesem Falle haben die Nachbarlinien Σ und Σ_1 einen gemeinsamen Punkt, nämlich den Punkt O , und alle Berührungsebenen des Streifens werden von einer developpablen Fläche dritter Classe eingehüllt. Es werden hier demnach die Punkte $V_a, V_b, V_c, V_o \dots$ projectivisch auf die Strahlen $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, p \dots$ bezogen; ist F ein beliebiger Punkt von Σ , und V_f der dem Strahle $\overline{OF}$ projectivisch entsprechende Punkt, so geht die in F construierte Berührungsebene des Streifens durch den Punkt V_f . Nähert sich F dem Punkte O , also $\overline{OF}$ der Tangente von Σ im Punkte O , so nähert sich V_f jenem Punkte von $\delta \varepsilon$, der dieser Tangente projectivisch entspricht; durch diesen Punkt und jene Tangente geht die Berührungsebene des Streifens im Punkte O . Hierdurch ist die Construction der Ebene gewonnen, welche durch die im gemeinsamen Punkte O der Nachbarkegelschnitte Σ und Σ_1 gedachten Tangenten bestimmt ist.

9. Die eben entwickelte Theorie des infinitesimalen Flächenstreifens ($\Sigma \Sigma_1$) ist analog der Theorie des durch zwei Nachbargeraden einer Regelfläche begrenzten Flächenstreifens.

Ein solcher Streifen ist gegeben, d. h. die Berührungsebenen in allen seinen Punkten sind gegeben, sobald seine Berührungsebenen in drei Punkten bekannt sind, da ja das Büschel der Berührungsebenen mit der Reihe der Berührungspunkte projectivisch ist.

Es wirft sich hier nun die analoge Frage auf, durch wie viele Berührungsebenen ein infinitesimaler Streifen ($\Sigma \Sigma_1$) bestimmt ist, und wie er zu construieren sei, d. h. auf welche Art seine Berührungsebene in einem beliebigen Punkte von Σ construiert werden könne.

Ein infinitesimaler Flächenstreifen, der von einem gegebenen Kegelschnitte und einem unendlich nahen Kegelschnitte begrenzt wird, ist bestimmt, sobald die Berührungsebenen in sieben seiner Punkte angegeben werden.

In der Ebene ϱ sei der Kegelschnitt Σ und auf ihm sieben Punkte A, B, C, D, E, K, L gegeben; ferner seien sieben diesen Kegelschnitt in den gegebenen Punkten berührende Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \kappa, \lambda$ gegeben.

Man nehme zuvörderst an, es existiere ein infinitesimaler Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$), der in den obigen sieben Punkten die gegebenen Ebenen zu Berührungsebenen hat.

Durch jeden Punkt der Geraden $\overline{\alpha \lambda}$ gehen außer α und λ noch zwei Berührungsebenen des Streifens; ihre Berührungspunkte bilden Paare einer auf Σ gelegenen mit der Punktreihe auf $\overline{\alpha \lambda}$ projectivischen Involution, deren Centrum leicht construirt werden kann. Bezeichnet man nämlich mit V_a, V_b, V_c, V_d, V_e die Schnittpunkte der Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ mit der Geraden $\overline{\alpha \lambda}$, so müssen diese Punkte mit den Strahlen $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE}$ projectivisch sein; hierdurch ist aber der Punkt O vollkommen bestimmt und kann auf bekannte Weise mit Hilfe des Lineals allein construirt werden. *) Hierauf möge jener Strahl p des Büschels O construirt werden, welcher dem in der Ebene ϱ liegenden Punkte V_o der Punktreihe $\overline{\alpha \lambda}$ projectivisch entspricht.

Nun ergibt sich leicht die Richtigkeit des obigen Satzes. Existiert nämlich ein infinitesimaler Streifen ($\Sigma \Sigma_1$) mit den gegebenen sieben Berührungsebenen, so muss p die Schnittlinie der Ebenen der Nachbarkegelschnitte Σ und Σ_1 sein, und hiermit ist dieser Streifen auch wirklich festgelegt. In der That, fixieren wir einen infinitesimalen Streifen ($\Sigma \Sigma_1$) dadurch, dass wir in den fünf Punkten A, B, C, K, L die Berührungsebenen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha, \lambda$ und überdies die Gerade p als Schnittlinie der Ebenen von Σ und Σ_1 angeben. Um die Berührungsebenen dieses Streifens in den Punkten D, E zu construieren, hat man (Art. 6) auf der Geraden p den Punkt O_1 zu construieren, der vier mit den Punkten V_a, V_b, V_c, V_o projectivische Strahlen $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, p$ liefert, woraus die Identität des Punktes O_1 mit O ersichtlich ist. Die Berührungsebenen unseres Streifens in den Punkten D, E gehen nun resp. durch jene Punkte der Punktreihe $\overline{\alpha \lambda}$, die den Strahlen $\overline{OD}, \overline{OE}$ vermöge dieser Projectivität entsprechen, also durch die Punkte V_d, V_e ; es sind dies also die gegebenen Ebenen δ, ε , und der Satz bewiesen. Gleichzeitig ist eine Construction der Berührungsebenen des Flächenstreifens ($\Sigma \Sigma_1$) gewonnen.

10. Die vorausgehende Betrachtung löst die folgende Aufgabe:

Ein infinitesimaler, von zwei Kegelschnitten begrenzter Flächenstreifen ist durch den Kegelschnitt Σ und durch sieben Berührungsebenen gegeben; es soll seine Classe bestimmt werden.

*) Chasles, Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points. Comptes Rendus, T. XXXVI, p. 951, oder Schröter, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1890, T. XXXV.

Fällt der oben construierte Punkt O nicht auf die Linie Σ , so ist der gegebene Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) von der vierten Classe und die unendlich nahen Kegelschnitte Σ und Σ_1 müssen als ohne gemeinsamen Punkt angesehen werden. Fällt aber der Punkt O auf Σ , ohne dass die gegebenen Berührungsebenen durch einen Punkt gehen, so ist der gegebene Streifen von der dritten Classe und die Nachbarkegelschnitte können als zwei durch den Punkt O gehende Kegelschnitte angesehen werden. Die Construction der Berührungsebenen des Streifens gibt in diesem Falle der Art. 7.

Gehen endlich die gegebenen Berührungsebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \kappa, \lambda$ durch einen Punkt, so ist der Streifen von der zweiten Classe und die Nachbarkegelschnitte können als Linien mit zwei gemeinsamen Punkten angesehen werden. In diesem Falle wird die Construction des Punktes O und der Geraden p illusorisch, weil die Punkte V_a, V_b, V_c, V_d, V_e zusammenfallen. Offenbar kann da für p irgend eine Gerade der Ebene von Σ gewählt werden.

Will man einen infinitesimalen Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) direct festlegen, der von zwei Nachbarkegelschnitten mit einem, natürlich reellen (Art. 7) gemeinsamen Punkte G begrenzt ist, so genügt es, den Kegelschnitt Σ , ferner die den Ebenen der Nachbarkegelschnitte gemeinsame Gerade $q q_1$, und zwar so anzunehmen, dass sie Σ in zwei reellen Punkten G, H schneide, endlich die Berührungsebene γ des Streifens im Punkte G — die von q verschieden sein muss — nebst den Berührungsebenen α, δ, ϵ des Streifens in drei Punkten A, D, E von Σ festzulegen. Man sieht nämlich leicht ein, dass diese Stücke zur Bestimmung des Streifens hinreichen, und dann, dass der Streifen existiert.

In der That sind V_a, V_g die Schnittpunkte der Geraden $\delta \epsilon$ mit den Ebenen α, γ , und F ein beliebiger Punkt von Σ , so geht seine Berührungsebene φ — die Existenz des Flächenstreifens vorausgesetzt — durch jenen Punkt V_f von $\delta \epsilon$, der dadurch bestimmt ist, dass die Punkte V_a, V_g, V_o, V_f mit den Strahlen $\overline{GA}, \overline{GG}, \overline{GH}, \overline{GF}$ projectivisch sein müssen, wobei das Symbol $\overline{GG}$ die Tangente von Σ im Punkte G bedeutet. Allein die Gesammtheit aller auf diese Art construierten Ebenen φ gehört in der That einem Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) an, nämlich jenem, der gegeben ist durch Σ , durch die Schnittlinie $q q_1$ der Nachbarkegelschnitte, durch die Berührungsebenen α, δ, ϵ in den Punkten A, D, E und durch die in zwei Punkten F und F' auf die angeführte Art construierten Berührungsebenen φ und φ' .

11. Erwägt man, dass ein von zwei Kegelschnitten begrenzter infinitesimaler Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) höchstens von der

vierten Classe ist, so folgt, dass im ersten der betrachteten Fälle von den gegebenen sieben Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \kappa, \lambda$ höchstens vier durch einen Punkt gehen können. Ist dies der Fall, so vereinfacht sich die Construction des Streifens; denn gehen z. B. die Ebenen $\alpha, \beta, \kappa, \lambda$ durch einen Punkt, so ist offenbar A, B ein Punktpaar der auf Σ betrachteten Punktinvolution, und der Punkt O demnach auf der Verbindungslinie $\overline{AB}$. Giengen auch die Ebenen $\gamma, \delta, \kappa, \lambda$ durch einen Punkt, so wäre aus demselben Grunde der Punkt O auf der Verbindungslinie $\overline{CD}$, demnach sofort bekannt. Der durch O gehende Strahl p wäre dann durch die projectivische Lage der Punkte V_a, V_c, V_e, V_o zu den Strahlen $\overline{OA}, \overline{OC}, \overline{OE}, p$ bestimmt.

Gehen fünf der gegebenen sieben Ebenen, etwa $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, durch einen Punkt V , so gehen durch diesen Punkt nothwendig unendlich viele Berührungsebenen der dem Streifen umschriebenen developpablen Fläche, und diese besteht aus dem Σ aus V projicirenden Kegel und aus zwei Ebenenbüscheln, die die Tangenten von Σ in den Punkten K und L zu Achsen haben.

Gehen sechs der gegebenen Ebenen, etwa $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \kappa$ durch einen Punkt V , so besteht die zugehörige developpable Fläche vierter Classe aus eben diesem Kegel und aus zwei Ebenenbüscheln, deren einer die Tangente von Σ im Punkte L , der andere irgend eine Tangente von Σ zur Achse hat.

Gehen alle sieben Ebenen durch einen Punkt, so kann man jenen Kegel nebst zwei Ebenenbüscheln, deren Achsen zwei beliebige Tangenten von Σ sind, als die zugehörige developpable Fläche vierter Classe auffassen.

Der Vollständigkeit wegen möge noch des Falles erwähnt werden, in dem alle Berührungsebenen eines von zwei Nachbarkegelschnitten Σ und Σ_1 begrenzten Flächenstreifens zusammenfallen, also natürlich mit der Ebene ϱ von Σ . Dieser Fall tritt ein, wenn die Neigung der Ebenen ϱ und ϱ_1 gegen den Abstand der Nachbarpunkte von Σ und Σ_1 unendlich klein ist, oder kürzer ausgedrückt — was in Ansehung der Berührungsebenen zulässig ist — wenn die Nachbarkegelschnitte Σ und Σ_1 in derselben Ebene liegen. Betrachtet man z. B. die durch Rotation eines Kreises erzeugte Ringfläche, so bestimmt jeder der beiden äußersten Parallelkreise mit dem Nachbarparallelkreise einen Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) dieser Art.

12. In den vorhergehenden Artikeln wurde ein von zwei Kegelschnitten begrenzter infinitesimaler Streifen auf die Art festgelegt, die bei der Fixierung eines von zwei Geraden begrenzten Flächenstreifens üblich ist. Wir wollen nun auch umgekehrt einen geradlinigen Streifen auf die Art bestimmen, auf

welche ursprünglich der Streifen ($\Sigma \Sigma_1$) bestimmt wurde, nämlich mit Hilfe einer developpablen Fläche und von Leitlinien.

Es seien demnach zwei Leitlinien und eine developpable Fläche gegeben; die Berührungsebenen dieser Fläche schneiden die Leitlinien in Punkten, deren Verbindungsgerade die zu betrachtende Regelfläche II erzeugt. Zwei Nachbargeraden dieser Regelfläche begrenzen einen geradlinigen Flächenstreifen; dieser ist zu construieren, d. h. seine Berührungsebene in einem beliebigen Punkte ist zu construieren.

Sei q eine Berührungsebene der gegebenen developpablen Fläche, A und B ihre Schnittpunkte mit den Leitcurven, also $\overline{AB}$ eine Erzeugende der Regelfläche II . Ist p die in q liegende Erzeugende der developpablen Fläche, so geht durch p die Nachbarberührungsebene dieser Fläche, welche mit den Leitlinien zwei Punkte A_1, B_1 und hierdurch die Nachbarerzeugende $\overline{A_1 B_1}$ der Regelfläche bestimmt.

Sind C und C_1 die Schnittpunkte von $\overline{AB}$ und $\overline{A_1 B_1}$ mit p , so enthält die Berührungsebene von II im Punkte C offenbar das Linearelement $\overline{CC_1}$, und ist demnach die Ebene q . Da nun die Berührungsebenen der Fläche II in den drei Punkten A, B, C einer Erzeugenden bekannt sind, kann die Berührungsebene in jedem ihrer weiteren Punkte sofort construirt werden.

II. Die developpable, zwei unendlich nahen Kegelschnitten umschriebene Fläche.

13. Die Ebenen, welche zwei in zwei verschiedenen Ebenen q_2 und q_3 gelegene Kegelschnitte Σ_2 und Σ_3 berühren, werden von einer entwickelbaren Fläche vierter Classe und erster Art umhüllt. Auf dieser Fläche befinden sich im allgemeinen noch zwei Kegelschnitte, die folgendermaßen bestimmt werden können.

Alle Σ_2 und Σ_3 berührenden Ebenen werden von unendlich vielen Flächen zweiter Classe berührt, die ein System von Flächen zweiter Classe bilden; unter ihnen befinden sich vier degenerierte Flächen, d. i. Kegelschnitte, deren Ebenen dadurch charakterisiert sind, dass sie bezüglich aller Flächen des Systems denselben Pol besitzen, also Seiten eines Polartetraeders bezüglich aller Flächen sind. Hieraus ergibt sich die Construction dieser Ebenen: Bezeichnet man mit M, N , resp. M', N' die reellen oder imaginären Schnittpunkte von Σ_2 , resp. Σ_3 mit der Schnittlinie $q_2 q_3$ ihrer Ebenen, mit P, Q die Doppelpunkte der durch die Paare M, N und M', N' bestimmten Involution, also das auf $q_2 q_3$ gelegene, sowohl bezüglich Σ_2 , als auch bezüglich Σ_3 conjugierte Punktpaar, ferner mit R_2, R_3 die Pole der Geraden $q_2 q_3$ bezüglich der Kegelschnitte Σ_2 und Σ_3 , so werden die zwei

Ebenen $\varrho \equiv (R_2 R_3 P)$ und $\varrho_1 \equiv (R_2 R_3 Q)$ die weiteren zwei auf der den gegebenen Kegelschnitten Σ_2, Σ_3 umschriebenen developpablen Fläche gelegenen Kegelschnitte Σ und Σ_1 enthalten. Das gesuchte Polartetraeder ist nämlich offenbar das durch die Scheitel R_2, R_3, P, Q festgelegte Tetraeder.

Setzen wir nun voraus, dass die Kegelschnitte Σ und Σ_1 zusammenfallen, d. h. dass ihre Ebenen ϱ und ϱ_1 oder auch, dass die Punkte P und Q zusammenfallen. Da diese Punkte sowohl zu M, N , als auch zu M', N' harmonisch liegen, müssen in diesem Falle die harmonisch getheilten Strecken einen gemeinsamen Endpunkt besitzen, etwa $M \equiv M'$. Dann fallen aber die Punkte P, Q mit M zusammen, und die Ebene $R_2 R_3 P$ enthält den einzigen noch auf der developpablen Fläche gelegenen Kegelschnitt Σ . Es berühren die Linien Σ_2 und Σ_3 offenbar die Ebene $R_2 R_3 P$ im Punkte P ; und erwägt man, dass das Dreieck $R_2 R_3 P$ bezüglich Σ ein Polardreieck ist, so folgt, dass P der Pol von $\overline{R_2 R_3}$ bezüglich Σ ist. Erwägt man weiter, dass die Gerade $\overline{R_2 R_3}$ die Schnittlinie der Ebenen ϱ und ϱ_1 war, dass also in unserem Falle diese Gerade als Grenzlage der Schnittlinie der coincidierenden Ebenen ϱ und ϱ_1 erscheint, so hat man dieses Ergebnis:

Befinden sich auf der, zwei Kegelschnitten Σ_2 und Σ_3 umschriebenen entwickelbaren Fläche nur drei Kegelschnitte, nämlich Σ_2, Σ_3 und Σ , wovon der letzte zwei zusammenfallende Kegelschnitte Σ und Σ_1 vertritt, so haben die Linien Σ_2 und Σ_3 nothwendig einen gemeinsamen Punkt P ; durch diesen Punkt geht die Ebene von Σ und berührt in ihm die Linien Σ_2 und Σ_3 ; die in Bezug auf Σ bestimmte Polare von P muss als die Grenzlage der Schnittlinie der Ebenen der zusammenfallenden, auf der developpablen Fläche gelegenen Kegelschnitte aufgefasst werden.

Hieraus folgt sofort, dass die, zwei unendlich nahen, in den Ebenen ϱ und ϱ_1 enthaltenen Kegelschnitten Σ und Σ_1 umschriebene entwickelbare Fläche zwei weitere Kegelschnitte Σ_2 und Σ_3 enthält, welche die Ebene von Σ in dem bezüglich Σ genommenen Pole der Geraden $\overline{\varrho \varrho_1}$ berühren.

14. Nehmen wir an, dass die unendlich nahen Kegelschnitte Σ und Σ_1 einen gemeinsamen Punkt besitzen. Dem vorhergehenden Artikel zufolge wird die, Σ und Σ_1 umschriebene entwickelbare Fläche nur noch einen Kegelschnitt $\Sigma_2 \equiv \Sigma_3$ enthalten, von dem man leicht nachweist, dass er mit Σ eine gemeinsame Tangente besitzt.

Es mögen mit G, H und G_1, H_1 die Schnittpunkte der Linien Σ und Σ_1 mit der Geraden $\overline{\varrho \varrho_1}$ bezeichnet und vorausgesetzt

werden, dass G mit G_1 zusammenfällt. Die Punkte P, Q , welche sowohl G, H als auch G_1, H_1 harmonisch trennen, fallen mit G zusammen, und die Ebene $R R_1 P$ enthält den einzigen noch auf der entwickelbaren Fläche gelegenen Kegelschnitt Σ_2 , wenn mit R und R_1 die bezüglich Σ und Σ_1 genommenen Pole der Geraden $\varrho \varrho_1$ bezeichnet werden. Das Dreieck $R R_1 P$ hört natürlich nicht auf, ein Polardreieck bezüglich Σ_2 zu sein; da jedoch in dem nunmehrigen Falle die Punkte R und R_1 unendlich nahe liegen, so folgt, dass Σ_2 die Gerade $\overline{PR}$ im Punkte R berührt. Dieselbe Gerade berührt aber Σ im Punkte P , wodurch der obige Ausspruch erwiesen erscheint.

Die, zwei unendlich nahen Kegelschnitten Σ und Σ_1 , welche einen gemeinsamen Punkt G besitzen, umschriebene entwickelbare Fläche zerfällt somit in eine entwickelbare Fläche dritter Classe und in das Ebenenbüschel, das die in G gezogene Tangente von Σ zur Achse hat.

Wird schließlich vorausgesetzt, dass die in zwei verschiedenen Ebenen gelegenen Nachbarkegelschnitte Σ und Σ_1 zwei gemeinsame Punkte G, H besitzen, so zerfällt die diesen Kegelschnitten umschriebene developpable Fläche offenbar in den durch sie gelegten Kegel zweiter Classe und in die zwei Ebenenbüschel, welche die Tangenten von Σ in den Punkten G und H zu Achsen haben.

15. Zwei in den Nachbarebenen ϱ und ϱ_1 gelegene Kegelschnitte Σ und Σ_1 ohne gemeinsamen Punkt mögen den Flächenstreifen $(\Sigma \Sigma_1)$ begrenzen. Die Schnittpunkte von Σ und Σ_1 mit der Geraden $\varrho \varrho_1$ sollen wieder mit G, H und G_1, H_1 bezeichnet werden.

Die dem Streifen umschriebene developpable Fläche vierter Classe enthält außer Σ noch zwei Kegelschnitte, und diese berühren die Ebene ϱ in dem in Bezug auf Σ genommenen Pole R der Geraden $\varrho \varrho_1$. Einer dieser Kegelschnitte mag Σ_2 und seine Ebene ϱ_2 heißen; die Schnittlinie der Ebenen ϱ und ϱ_2 ist die Gerade $\overline{RP}$, wenn P einen der beiden Punkte P, Q bezeichnet, die die Punktpaare G, H und G_1, H_1 harmonisch trennen.

Jede Berührungsebene des Streifens $(\Sigma \Sigma_1)$ berührt Σ_2 und umgekehrt, jede Σ und Σ_2 berührende Ebene ist eine Berührungsebene des Streifens $(\Sigma \Sigma_1)$. Wir erhalten demnach die durch einen beliebigen Punkt V gehenden Berührungsebenen des Streifens als gemeinschaftliche Tangentialebenen der beiden Kegelflächen, durch welche Σ und Σ_2 aus V projiciert werden.

Es mögen D, E zwei feste Punkte von Σ und δ, ε die in ihnen construierten Berührungsebenen des Streifens $(\Sigma \Sigma_1)$ be-

zeichnen. Die erstere ergibt sich, indem man in D die Tangente t_d von Σ construiert, durch den Schnittpunkt derselben mit q q_2 die zweite außer PR an Σ_2 gehende Tangente zieht und durch beide Tangenten die Ebene δ legt. Ähnlich erhält man ε mit Hilfe der in E construierten Tangente t_e von Σ .

Durch einen beliebigen Punkt V der Geraden $\overline{\delta\varepsilon}$ gehen außer δ und ε noch zwei Berührungsebenen des Streifens ($\Sigma\Sigma_1$); ihre Spuren p_1, p_2 auf der Ebene q erhält man, indem man Σ_2 aus V auf die Ebene q in den Kegelschnitt Σ' projiciert und die zwei Tangenten bestimmt, welche die Kegelschnitte Σ und Σ' außer t_d und t_e noch gemein haben. Die Projection Σ' berührt offenbar die Gerade $\overline{PR}$ im Punkte R , und da sie die Geraden t_d, t_e ebenfalls berührt, bilden die Projectionen Σ' der Linie Σ_2 aus den Punkten V der Geraden $\overline{\delta\varepsilon}$ ein System von Kegelschnitten, die in ein festes Vierseit eingeschrieben sind.

Der feste Kegelschnitt Σ berührt zwei Seiten dieses Vierseits, nämlich t_d und t_e , und es bilden sonach die den Linien Σ und Σ' gemeinsamen Tangenten p_1 und p_2 ein Strahlenpaar einer auf Σ gelegenen Tangenteninvolution, und ihre Berührungspunkte P_1, P_2 ein Punktepaar einer auf Σ gelegten Punktinvolution. Die Achse jener Tangenteninvolution geht durch den Schnittpunkt von zwei Seiten des Vierseits, hier durch den Punkt R , weshalb das Centrum O der Punktinvolution sich auf der Polare von R , d. i. auf der Geraden q q_1 befindet.

Nähert sich der Punkt V der Geraden $\overline{\delta\varepsilon}$ dem Punkte V_o , der sich in q befindet, so nähert sich die Projection Σ' offenbar der degenerierten Linie des obigen Kegelschnittsystems, deren Tangenten aus den Strahlen der Büschel V_o und R bestehen. Die Tangenten p_1, p_2 nähern sich demnach den aus dem Punkte R an Σ geführten Tangenten, d. i. den Tangenten $\overline{RG}$ und $\overline{RH}$, und das Punktepaar P_1, P_2 dem Punktepaar G, H . Dies ergibt von neuem, dass das Involutioncentrum O sich auf $\overline{GH}$ oder q q_1 befindet; überdies folgt, dass das Paar G, H dem Punkte (Projectioncentrum) V_o entspricht.

Erwägt man, dass P_1, P_2 die Berührungspunkte der zwei außer δ und ε durch den Punkt V gehenden Tangentialebenen des Streifens ($\Sigma\Sigma_1$) sind, so stimmt das erhaltene Ergebnis mit dem Art. 5 abgeleiteten Satze überein, wenn nur noch dargethan wird, dass die Involution der Punktepaare P_1, P_2 mit der auf $\overline{\delta\varepsilon}$ gelegenen Reihe der Punkte V projectivisch ist.

Hierzu genügt es darzuthun, dass die Reihe der Punkte V mit dem System der, dem oben erwähnten Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte Σ' projectivisch ist, d. h. projectivisch ist

mit der Reihe der Berührungspunkte der Kegelschnitte Σ' mit der Geraden t_a oder t_e . Allein bezeichnet man mit D_2 den Punkt, in welchem der Kegelschnitt Σ_2 die Ebene δ berührt, so ist die aus V auf t_a bestimmte Projection D' dieses Punktes offenbar der Berührungspunkt von Σ' mit t_a ; demnach ist die Reihe der Punkte V auf $\delta \varepsilon$ perspectivisch mit der Reihe der Punkte D' auf t_a — mit D_2 als perspectivisches Centrum — und hiermit der im Art. 5 abgeleitete Satz aufs neue bewiesen.

16. Betrachten wir jetzt einen infinitesimalen Flächenstreifen, der begrenzt wird von zwei in den Ebenen ϱ und ϱ_1 gelegenen Kegelschnitten Σ und Σ_1 , die einen gemeinsamen Punkt besitzen. Die Schnittpunkte von Σ und Σ_1 mit $\varrho \varrho_1$ mögen wieder mit G, H und G_1, H_1 bezeichnet und vorausgesetzt werden, dass G und G_1 zusammenfallen.

Die entwickelbare, den Linien Σ und Σ_1 umschriebene Fläche vierter Classe besteht jetzt aus einer entwickelbaren Fläche dritter Classe und aus dem Ebenenbüschel, dessen Achse die in G oder P construierte Tangente $\overline{PR}$ von Σ ist. Auf dieser entwickelbaren Fläche vierter Classe befindet sich nach Art. 14 nur noch ein Kegelschnitt Σ_2 , welcher die Gerade $\overline{PR}$ in R , dem bezüglich Σ genommenen Pole von $\varrho \varrho_1$, berührt. Die im vorigen Artikel angestellte Betrachtung zeigt, dass die aus den Punkten V der Geraden $\delta \varepsilon$ auf ϱ gemachten Projectionen Σ' von Σ_2 wiederum $t_a, t_e, \overline{PR}$ berühren, und zwar die letzte Gerade im Punkte R ; der Kegelschnitt Σ' hat somit mit Σ außer den drei festen Tangenten $t_a, t_e, \overline{PR}$ nur noch eine Tangente p_1 gemein, die Spur der durch V außer δ und ε noch gehenden Berührungsebene der erwähnten developpablen Fläche dritter Classe. Das System der Tangenten p_1 , und somit auch das System ihrer Berührungspunkte P_1 auf Σ ist bekanntlich mit dem System der Kegelschnitte Σ' und daher auch mit dem System der Punkte V auf $\delta \varepsilon$ projectivisch.

Nähert sich V dem in ϱ liegenden Punkte V_o , so nähert sich die Projection Σ' der durch die Strahlenbüschel V_o und R repräsentierten degenerierten Curve zweiter Classe. Es entspricht demnach dem Punkt V_o projectivisch die zweite, durch den Punkt R gehende Tangente von Σ , d. h. $\overline{RH}$, resp. ihr Berührungspunkt H . Hierdurch sind einige Ergebnisse des Art. 7 aufs neue dargethan.

Haben endlich die den infinitesimalen Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) begrenzenden Kegelschnitte Σ und Σ_1 zwei Punkte gemein, so versagt die eben angewandte, auf der Betrachtung eines weiteren,

auf der developpablen, dem Streifen umschriebenen Fläche gelegenen Kegelschnittes basierende Schlussweise, da in diesem Falle die developpable Fläche vierter Classe aus einem Kegel zweiter Classe und aus zwei Ebenenbüscheln besteht und keinen weiteren Kegelschnitt enthält, was von geringer Bedeutung ist, da in diesem Falle die Anordnung der Berührungsebenen des Streifens offenbar ist.

III. Über die durch einen Kegelschnitt und zwei Geraden gelegte Regelfläche.

17. Die durch zwei Kegelschnitte und eine Gerade gelegte Regelfläche ist im allgemeinen vom achten Grade; durch passende Wahl der Leitgeraden kann jedoch ihr Grad auf vier reducirt werden. Um dies zu zeigen, wollen wir zuvörderst die durch einen Kegelschnitt und zwei Geraden gelegte Regelfläche untersuchen, und hierzu eine besondere Lage von zwei collinearen ebenen Systemen in Betracht ziehen.

18. Sind zwei in den Ebenen q und q_1 gelegene collineare Systeme in einer solchen Lage, dass in der Schnittlinie $\overline{q q_1}$ zwei collineare Strahlen r, r_1 liegen und dass überdies die Doppelpunkte I, J der collinearen in r und r_1 gelegenen Punktreihen reell sind, so schneidet die Verbindungslinie je zweier collinearer Punkte zwei feste, resp. durch I und J gehende Geraden.

Da die collinearen Strahlenbüschel der Ebenen q und q_1 , welche I zum Scheitel haben, in $\overline{q q_1}$ zwei vereinte entsprechende Elemente haben, so sind sie Schnitte eines Ebenenbüschels, d. h. die durch entsprechende Strahlen dieser Büschel gelegten Ebenen gehen durch eine feste Gerade d_i , die freilich durch den Punkt I geht. Ebenso folgt die perspectivische Lage der collinearen Büschel J , d. h. dass die durch entsprechende Strahlen derselben gelegten Ebenen durch eine feste Gerade d_j gehen, die natürlich durch J geht.

Sind nun A, A_1 irgend zwei entsprechende Punkte der Systeme q und q_1 , so sind $\overline{IA}, \overline{IA_1}$ zwei entsprechende Geraden, und ebenso $\overline{JA}, \overline{JA_1}$. Es geht demnach die Ebene (IAA_1) durch die Gerade d_i und die Ebene (JAA_1) durch die Gerade d_j . Die Schnittlinie dieser Ebenen, d. i. die Gerade $\overline{AA_1}$ schneidet somit sowohl d_i , als auch d_j , wie behauptet wurde.

Die Geraden d_i, d_j sind windschief, denn sonst würde die Verbindungslinie $\overline{AA_1}$ durch ihren gemeinschaftlichen Punkt gehen und die Systeme q und q_1 wären perspectivisch; dies

würde aber erfordern, dass jeder Punkt der collinearen Geraden r , r_1 mit seinem entsprechenden zusammenfalle, was wir durch die Annahme ausschließen, dass diese Punktreihen zwei Doppelpunkte I, J besitzen.

19. Umgekehrt gilt auch der Satz:

Sind zwei Ebenen q und q_1 und zwei windschiefe, die Schnittlinie $q \cap q_1$ schneidende Geraden d_i, d_j gegeben, und wird einem beliebigen Punkte A des Systems q jener Punkt A_1 von q_1 zugeordnet, der sich auf der durch A zu den Geraden d_i, d_j geführten Transversale befindet, so sind die Systeme q und q_1 auf einander collinear bezogen.

Bezeichnet man nämlich wieder mit I, J die Schnittpunkte von d_i, d_j mit der Geraden $q \cap q_1$, so sind $\overline{IA}, \overline{IA_1}$ entsprechende Strahlen zweier perspectivischen Strahlenbüschel, der Schnitte des Ebenenbüschels auf der Achse d_i mit den Ebenen q und q_1 ; ebenso sind $\overline{JA}, \overline{JA_1}$ entsprechende Strahlen zweier perspectivischen Büschel. Da in diesen beiden perspectivischen Verwandtschaften der Strahl $\overline{IJ}$ sich selbst zugeordnet ist, erscheint der obige Satz erwiesen. *)

Der Kürze wegen mögen die in diesem und dem vorigen Artikel betrachteten collinearen ebenen Systeme als halbperspectivische Systeme und d_i, d_j als ihre Leitgeraden bezeichnet werden.

20. Ein interessanter Specialfall ergibt sich, wenn die Leitgeraden d_i, d_j zweier halbperspectivischer Systeme zusammenfallen.

Die zwei windschiefen, unendlich nahen Geraden d_i, d_j bestimmen einen infinitesimalen Flächenstreifen, dessen Berührungsebene im Punkte $I \equiv J$ offenbar durch die Geraden d_i und $q \cap q_1$ geht; dies führt zu folgendem Ergebnis:

Gegeben sind zwei Ebenen q_1, q_1 und eine Regelfläche zweiten Grades, welche die Gerade $q \cap q_1$ im Punkte I berührt; eine der zwei durch I gehenden Erzeugenden dieser Fläche heiße d_i . Durch einen beliebigen Punkt A von q und durch d_i lege man eine Ebene ($A d_i$) und bestimme den Punkt A' auf d_i , in welchem sie die Fläche berührt; die Verbindungslinie $\overline{AA'}$ trifft q_1 in einem Punkte A_1 , der dem Punkte A collinear entspricht.

Dies kann direct folgendermaßen erwiesen werden:

Beschreibt der Punkt A in q die auf einer Geraden a gelegene Punktreihe, so beschreibt die Ebene ($A d_i$) ein mit

*) Staudt, Geometrie der Lage, Art. 129.

dieser Reihe perspectivisches Ebenenbüschel und A' eine mit diesem Büschel und somit auch mit jener Reihe projectivische, auf d_i gelegene Punktreihe. Die Verbindungslinie AA' erfüllt somit eine geradlinige Fläche zweiten Grades Γ und diese geht durch $\overline{q q_1}$; fällt nämlich A in die Gerade $\overline{q q_1}$, so gelangt A' nach I und die Verbindungslinie AA' fällt mit $q q_1$ zusammen. Die Fläche Γ wird von q_i außer in $\overline{q q_1}$ noch in einer Geraden a_1 geschnitten, dem geometrischen Orte der Punkte A_1 , und offenbar ist diese Reihe der Punkte A_1 mit der auf a gelegenen Reihe der Punkte A projectivisch. Hieraus ersieht man aber den collinearen Zusammenhang der Punkte A und A_1 .*)

21. Es seien ein Kegelschnitt Σ und zwei windschiefe Geraden d_i, d_j gegeben, die mit Σ keinen Punkt gemein haben; die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Ebene ϱ von Σ mögen I, J heißen. Der geometrische Ort der Geraden, welche die Linien Σ, d_i, d_j schneiden, ist eine Regelfläche, die II heißen möge.

Die Fläche II ist vom vierten Grade und hat die Doppelgeraden $d_i, d_j, \overline{IJ}$.**)

Durchläuft der Punkt A den Kegelschnitt Σ , so beschreiben die Ebenen $(A d_i)$ und $(A d_j)$ zwei Ebenenbüschel, die in zwei-zweigliedriger Beziehung stehen; die Schnittlinie a ihrer entsprechenden Ebenen erfüllt die Fläche II . Eine beliebige Ebene σ schneidet die Ebenenbüschel in zwei Strahlenbüschel, die auf ebensolche Weise zusammenhängen; ihre Scheitel — Schnittpunkte von d_i, d_j mit σ — mögen I', J' heißen. Die zwei-zweigliedriger Strahlenbüschel erzeugen eine Curve vierter Ordnung O^4 , welche I', J' zu Doppelpunkten hat, woraus folgt, dass die Fläche II von der vierten Ordnung ist und d_i, d_j zu Doppelgeraden hat***); letzteres folgt übrigens auch aus dem Umstande, dass durch einen beliebigen Punkt von d_i oder d_j offenbar zwei Transversalen zu Σ und d_j , resp. zu Σ und d_i geführt werden können.

Wird die Schnittebene σ durch die Gerade $\overline{IJ}$ geführt, so erhält man in σ zwei zwei- und zweigliedrige Strahlenbüschel I, J , in welchen der gemeinsame Strahl $\overline{IJ}$ sich selbst doppelt entspricht. Zwei so verwandte Büschel erzeugen außer der doppelt zu zählenden Geraden $\overline{IJ}$ noch einen Kegelschnitt. Es ist somit $\overline{IJ}$ auch eine Doppelgerade von II , und jede durch sie gelegte Ebene schneidet II noch in einem Kegelschnitte. Letzteres

*) Staudt, Geometrie der Lage, Art. 121.

**) Salmon-Fiedler, Anal. Geometrie des Raumes, II., Art. 232.

***) J. Steiner, Systematische Entwicklung etc., Berlin 1832, pag. 250 ff.

folgt direct, wenn man erwägt, dass die Schnittlinien von Π mit einer durch $\overline{IJ}$ geführten Ebene σ als eine zu Σ collineare Linie erscheint, nämlich Σ zugeordnet durch die mittelst der Leitgeraden d_i, d_j zwischen den ebenen Systemen festgelegte halbperspectivische Beziehung.

Auf der Fläche Π gibt es keine anderen Kegelschnitte, als jene, welche als Schnitte mit durch $\overline{IJ}$ geführten Ebenen erscheinen und die degenerierten, von zwei Geraden gebildeten Kegelschnitte, welche von den durch d_i oder d_j geführten Ebenen herausgeschnitten werden. Um dies einzusehen, sei σ eine weder durch d_i , noch durch d_j gehende Ebene; so wird ihr Schnitt mit Π aus einem Kegelschnitt und einer zweifach gerechneten Geraden dann und nur dann bestehen, wenn in den zwei-zweigliederigen Strahlenbüscheln I', J' der gemeinsame Strahl sich selbst doppelt entspricht; dies erfordert aber, dass in den Ebenenbüscheln auf den Achsen d_i, d_j die Ebenen $(J' d_i)$ und $(I' d_j)$ einander in eben derselben Weise doppelt entsprechen, was nur von den Ebenen $(J d_i)$ und $(I d_j)$ gilt, so dass die Punkte I', J' sich mit I, J vereinigen müssen. Es muss also σ durch $\overline{IJ}$ gehen, wie behauptet wurde.

22. Durch die Doppelgerade $\overline{IJ}$ gehen zwei Mäntel der Fläche Π und es ist nicht ohne Interesse, zu bemerken, dass jeder dieser Mäntel in der Nähe der Geraden $\overline{IJ}$ den Charakter eines infinitesimalen von zwei Geraden begrenzten Flächenstreifens besitzt. Hierzu bezeichnen wir mit G, H die Schnittpunkte der Geraden $\overline{IJ}$ mit dem Kegelschnitte Σ und setzen diese Punkte als reell voraus; G', H' seien zwei, jenen Punkten unendlich nahe liegende Punkte von Σ .

Führt man durch G' zu der Geraden d_i, d_j die Transversale g , so ist g eine Erzeugende von Π und liegt unendlich nahe an $\overline{IJ}$; die Geraden g und $\overline{IJ}$ begrenzen einen infinitesimalen Streifen der Fläche Π . Bezeichnet man der Kürze wegen die Gerade $\overline{IJ}$ mit p , so sind die Ebenen $(p d_i), (p d_j)$, q die Berührungsebenen dieses infinitesimalen Streifens in den Punkten I, J, G .

Führt man ebenso durch H' zu d_i, d_j die Transversale h , so begrenzt h mit $\overline{IJ}$ einen zweiten auf Π gelegenen infinitesimalen Streifen, und seine Berührungsebenen in den Punkten I, J, H sind resp. $(p d_i), (p d_j)$, q .

Nun können die beiden Berührungsebenen μ, μ' der Fläche Π in irgend einem Punkt M der Doppelgeraden $\overline{IJ}$ sofort construiert werden, da es ja

Berührungsebenen des einen, resp. des anderen infinitesimalen soeben bestimmten Flächenstreifens sind, und somit die Berührungspunkte I, J, G, M mit den Ebenen $(p d_i), (p d_j), q, \mu$ und die Punkte I, J, H, M mit den Ebenen $(p d_i), (p d_j), q, \mu'$ projectivisch sein müssen.

Sind die Schnittpunkte G, H der Geraden $\overline{IJ}$ mit Σ imaginär, so sind die beiden durch $\overline{IJ}$ gehenden Mäntel von Π auch imaginär.

Die Doppellinien d_i, d_j der Fläche Π haben in Bezug auf die Anordnung der in ihren Punkten construierten Berührungsebenen einen ganz anderen Charakter. Die zwei Berührungsebenen in einem Punkte von d_i gehen durch d_i und durch je eine der durch den Berührungspunkt zu Σ und d_j geführten zwei Transversalen. Die zwei durch d_i gehenden Mäntel von Π haben nicht den Charakter von infinitesimalen, durch zwei Geraden begrenzten Streifen, denn die Erzeugenden vom Π müssten, da sie noch d_j schneiden, auf einer Regelfläche zweiter Ordnung liegen. Dasselbe gilt hinsichtlich d_j .

23. Die Anordnung der Berührungsebenen der im Art. 21 betrachteten Fläche Π längs des Kegelschnittes Σ kann nun leicht übersehen werden. Führt man nämlich durch die Gerade $\overline{IJ}$ eine Ebene q_1 , welche mit q einen unendlich kleinen Winkel einschließt, so schneidet q_1 die Fläche Π in einem zu Σ unendlich nahen Kegelschnitte Σ_1 , der, wie sofort gezeigt werden soll, mit Σ keinen Punkt gemein hat. Die Linien Σ und Σ_1 begrenzen einen infinitesimalen Flächenstreifen, dessen Berührungsebenen mit denen der Fläche Π in den Punkten von Σ identisch sind. Die Anordnung der Berührungsebenen wurde in den Art. 6 und 15 studiert; die Construction der Berührungsebenen selbst kann mittelst der Erzeugenden von Π sofort geleistet werden.

Es erübrigt, zu zeigen, dass die Kegelschnitte Σ und Σ_1 keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Hierzu legen wir durch die Gerade $\overline{IJ}$ eine beliebige Ebene σ und construieren die zwei Punkte K, L , in denen die Schnittlinie Σ' von σ mit Π die Gerade $\overline{IJ}$ trifft. Da die auf Π durch K verlaufenden Linien Σ' und $\overline{IJ}$ sich in der Ebene σ befinden, berührt diese Ebene die Fläche Π im Punkte K ; und ebenso folgt, dass sie Π im Punkte L berührt. Construiert man demnach auf die im vorhergehenden Artikel gegebene Weise die Berührungspunkte der Ebene σ mit Π , so sind dies die Punkte K, L .

Hieraus folgt, dass einer der Punkte K, L mit einem der Punkte G, H nur dann zusammenfallen könnte, wenn σ mit einer

Berührungsebene in den letzteren zwei Punkten zusammenfallen. Soll hierbei σ nicht mit ϱ zusammenfallen, so muss für σ entweder die in H construierte Berührungsebene σ_1 des ersten durch $\overline{IJ}$ gehenden Mantels von Π , oder aber die in G construierte Berührungsebene σ_2 des zweiten Mantels genommen werden. Der Schnitt Σ' der Ebene σ_1 mit der Fläche Π geht durch den Punkt H , und der Schnitt Σ'' von σ_2 mit Π durch den Punkt G . Da ferner keine zwei der vier Berührungspunkte I, J, G, H unendlich nahe sind, so sind auch keine zwei der vier Berührungsebenen des ersten Mantels $(p d_i), (p d_j), \varrho, \sigma_1$ unendlich nahe; und ebenso folgt, dass auch die Ebenen ϱ und σ_2 nicht unendlich nahe verlaufen. — Eine durch $\overline{IJ}$ gelegte, von ϱ hinlänglich wenig abweichende Ebene kann somit weder mit σ_1 noch mit σ_2 zusammenfallen, woraus folgt, dass ihr Schnitt Σ_1 mit der Fläche Π weder durch G , noch durch H hindurchgeht, wie bewiesen werden sollte.

24. Wir haben soeben gesehen, dass man auf einer durch einen Kegelschnitt Σ und die zwei Geraden d_i, d_j geführten Regelfläche zwei Kegelschnitte angeben kann, deren jeder mit Σ einen gemeinsamen Punkt hat. Es ist nicht uninteressant, den Fall hervorzuheben, in dem man einen Kegelschnitt angeben kann, der mit Σ zwei Punkte gemein hat.

Dieser Fall tritt offenbar ein, wenn die Ebenen σ_1 und σ_2 zusammenfallen, d. h. wenn die im Punkte H construierte Berührungsebene des ersten durch $\overline{IJ}$ gehenden Mantels mit der Berührungsebene des zweiten Mantels im Punkte G zusammenfällt. Die Ebenen $(p d_i), (p d_j), \varrho, \sigma$ haben in diesem Falle als Berührungsebenen des ersten Mantels die Berührungspunkte I, J, G, H und als Berührungsebenen des zweiten Mantels die Berührungspunkte I, J, H, G , so dass die Gleichheit der Doppelverhältnisse gilt:

$$(IJGH) = (IJHG),$$

aus welcher wir die harmonische Lage der Punkte I, J, G, H erschließen. Da diese harmonische Lage auch hinreicht, um den eben betrachteten Fall herbeizuführen, hat man dieses Ergebnis:

Hat man zwei Kegelschnitte Σ und Σ' mit zwei gemeinsamen Punkten G, H und legt durch die Schnittlinie ihrer Ebenen ϱ und σ zwei zu diesen Ebenen harmonische Ebenen $(p d_i), (p d_j)$, wählt in diesen je eine Gerade d_i, d_j , so zwar, dass dieselben $\varrho \sigma$ in zwei zu G, H harmonischen Punkten I, J treffen, so geht die durch Σ, d_i, d_j gelegte Regelfläche auch durch den Kegelschnitt Σ' .

25. Betrachten wir nun die Regelfläche Π , welche durch einen Kegelschnitt Σ und zwei Gerade d_i, d_j geht, von denen die eine, etwa d_i , den Kegelschnitt Σ trifft; der d_i und Σ gemeinsame Punkt heiße I , und J sei der Schnittpunkt von d_j mit der Ebene ϱ von Σ .

Der geometrische Ort aller Geraden, welche Σ, d_i und d_j schneiden, zerfällt in eine Ebene und eine Regelfläche dritter Ordnung Π , welche d_i und d_j zu Leitlinien hat, wobei d_i eine Doppellinie, d_j eine einfache Linie von Π ist. Vor allem ist nämlich klar, dass jede durch I gelegte und d_j schneidende Gerade zu den erwähnten Geraden gehört; ihr geometrischer Ort ist die Ebene $(I d_j)$. Alle übrigen Transversalen der Linien Σ, d_i, d_j erhält man als Schnittlinien a der Ebenen $(A d_i), (A d_j)$, welche durch d_i , resp. d_j und einen beliebigen Punkt A von Σ gelegt werden. Die Ebenen $(A d_i), (A d_j)$ der Ebenenbüscheln mit den Achsen d_i, d_j sind in ein-zweigliedriger Beziehung, wie man sofort erkennt, wenn man ihre Spuren auf der Ebene ϱ betrachtet.

Diese Spuren bilden zwei Strahlenbüschel mit den Scheiteln I, J ; jedem Strahle des Büschels I entspricht ein Strahl des Büschels J , und jedem Strahle von J entsprechen zwei Strahlen von I , ein Elementenpaar einer mit dem Büschel J projectivischen Involution bildend.

Schneidet man beide Ebenenbüschel durch eine Ebene σ , so erhält man zwei mit ihnen perspektivische Strahlenbüschel I', J' , die demnach in ähnlicher Weise zusammenhängen, d. h. das involutorische Büschel I' ist projectivisch mit dem Büschel J' . Die von beiden Büscheln erzeugte Linie C^3 ist von der dritten Ordnung; der Scheitel I' ist ein Doppelpunkt und der Scheitel J' ein einfacher Punkt von C^3 . Die Tangenten dieser Linie im Doppelpunkte I' erhält man, wenn man die durch diesen Punkt gehenden Erzeugenden der Fläche Π construirt, d. i. die zwei Transversalen zu Σ, d_j ; sie bestimmen mit d_i die Berührungsebenen von Π im Punkte I' , deren Spuren auf σ eben jene Tangenten sind. Ähnlich ergibt sich die Tangente von C^3 im Scheitel J' .

Die cubische Fläche Π geht offenbar durch die Gerade $\overline{IJ}$ und hat in ihrer Nähe den Charakter eines infinitesimalen, durch zwei Geraden begrenzten Flächenstreifens. Bezeichnet man nämlich mit H den zweiten Schnittpunkt von $\overline{IJ}$ mit Σ , und mit H' einen Nachbarpunkt von H auf Σ , so ist die durch H' zu d_i und d_j geführte Transversale h eine Erzeugende von Π , und die Nachbarerzeugenden h und $\overline{IJ}$ begrenzen den erwähnten Flächenstreifen. Hierdurch erlangen wir die Construction der

Berührungsebene von Π in einem beliebigen Punkte M der Geraden $\overline{IJ}$; denn wir kennen die Berührungsebenen des genannten Flächenstreifens in drei seiner Punkte, nämlich die Ebenen $(p d_i)$, $(p d_j)$, q in den Punkten I, J, H , wobei p wiederum die Gerade $\overline{IJ}$ bezeichnet.

Eine beliebige, durch $\overline{IJ}$ gelegte Ebene σ schneidet die Fläche Π in der Geraden $\overline{IJ}$ und in einem Kegelschnitte; da I ein Doppelpunkt des Schnittes ist, so geht der Kegelschnitt durch den Punkt I und schneidet die Gerade $\overline{IJ}$ in einem weiteren Punkte, der sich als Berührungspunkt der Ebene σ mit obigem Flächenstreifen sofort ergibt.

Damit eine Ebene σ die Fläche Π in einer Geraden und in einem Kegelschnitte schneide, muss in den ein-zweigliederigen Büscheln J' und I' der gemeinsame Strahl $\overline{J'I'}$ sich selbst entsprechen, d. i. die Ebenen $(I' d_j)$ und $(J' d_i)$ der oben erwähnten Ebenenbüscheln müssen einander entsprechen, d. h. diese Ebenen müssen einander auf der Linie Σ begegnen; dies erheischt, dass auch ihre Schnittlinien $\overline{I'J'}$ den Kegelschnitt Σ treffe und also eine Erzeugende von Π sei. Die durch Erzeugende geführten ebenen Schnitte sind demnach allein aus einer Geraden und einem Kegelschnitte zusammengesetzt. Soll ein solcher Schnitt durch den Punkt I gehen, so muss er nothwendig durch die zugehörige Erzeugende, d. i. durch die Gerade $\overline{IJ}$ gelegt werden.

26. Betrachten wir endlich die durch einen Kegelschnitt Σ und zwei windschiefe Geraden d_i, d_j , welche Σ in den Punkten I, J treffen, gelegte Regelfläche. Ist A ein beliebiger Punkt von Σ , so sind $(A d_i)$, $(A d_j)$ entsprechende Ebenen zweier projectivischer Ebenenbüschel mit den Achsen d_i, d_j , und es erfüllt demnach ihre Schnittlinie a eine Regelfläche zweiter Ordnung Π . Der geometrische Ort aller Geraden, welche die Linien Σ, d_i, d_j treffen, besteht offenbar aus der Fläche zweiter Ordnung Π und aus den Ebenen $(I d_j), (J d_i)$.

IV. Über die durch zwei Kegelschnitte gelegte biquadratische Regelfläche.

27. Das Problem, welches in diesem Capitel vollständig gelöst wird, ist das folgende: In den Ebenen q und q_1 sind die Kegelschnitte Σ , resp. Σ_1 gegeben; es sollen zwei Gerade d_i, d_j derart bestimmt werden, dass die durch Σ, d_i, d_j gelegte Regelfläche Π auch durch die Linie Σ_1 gehe.

Wir bezeichnen mit G, H , resp. G_1, H_1 die Schnittpunkte von Σ , resp. Σ_1 mit der Geraden $\varrho \varrho_1$ und ziehen zuvörderst den Fall in Betracht, in welchem die Kegelschnitte Σ und Σ_1 keinen gemeinsamen Punkt besitzen. — Bezeichnet man mit I, J die Schnittpunkte der gesuchten Geraden d_i, d_j mit der Ebene ϱ , so ist klar, dass der Schnitt der Fläche Π mit der Ebene ϱ aus dem Kegelschnitte Σ und der doppelt gezählten Geraden $\overline{IJ}$ besteht; geht nun Π durch die Linie Σ_1 , so müssen die Punkte G_1, H_1 auf diesem Schnitte liegen, und da sie nicht auf Σ liegen, müssen sie der Geraden $\overline{IJ}$ angehören; es schneiden somit die gesuchten Geraden d_i, d_j die Gerade $\varrho \varrho_1$, und der Kegelschnitt Σ_1 erscheint als die dem Kegelschnitt Σ halbperspectivisch entsprechende Linie, d_i und d_j als Leitlinien vorausgesetzt.

Um die vorgelegte Aufgabe zu lösen, hat man demnach alle halbperspectivischen Beziehungen zwischen den Systemen ϱ und ϱ_1 zu suchen, welche der Linie Σ die Linie Σ_1 zuordnen, d. h. alle collinearen Beziehungen zwischen ϱ und ϱ_1 , welche der Geraden $\varrho \varrho_1$ dieselbe Gerade, der Linie Σ die Linie Σ_1 zuordnen, wobei überdies die in $\varrho \varrho_1$ befindlichen collinearen Punktreihen reelle Doppelpunkte haben sollen.

Da die verlangten halbperspectivischen Beziehungen reellen Punkten wieder solche Punkte und den Punkten G, H die Punkte G_1, H_1 zuordnen sollen, so kann die vorgelegte Aufgabe nur dann Lösungen zulassen, wenn diese vier Punkte entweder alle reell oder alle imaginär sind. Durch zwei Kegelschnitte, deren einer die Schnittlinie ihrer Ebenen in reellen, der andere in imaginären Punkten trifft, geht somit keine Regelfläche mit zwei reellen Leitgeraden.

28. Soll eine Collineation hergestellt werden, welche einem gegebenen Kegelschnitte Σ einen gegebenen Kegelschnitt Σ_1 zuweist, so kann man drei Punkten A, B, C der ersten Linie irgend drei Punkte A_1, B_1, C_1 der zweiten entsprechen lassen; ordnet man dann dem Pole P von $\overline{AB}$ bezüglich Σ den bezüglich Σ_1 genommenen Pol P_1 von $\overline{A_1B_1}$ zu, so ist die verlangte Collineation offenbar hergestellt, und es ist klar, dass man auf diese Art jede der verlangten Collineationen erhält.

In reciproker Weise ergeben sich diese Collineationen auch dadurch, dass man drei Tangenten a, b, c von Σ irgend drei Tangenten a_1, b_1, c_1 von Σ_1 und der Polare p des Schnittpunktes (a, b) die Polare p_1 des Schnittpunktes (a_1, b_1) zuordnet.

29. Kehren wir nun zu der im Art. 27 gestellten Aufgabe zurück, um zuvörderst den Fall zu erledigen, wo die vier Punkte G, H, G_1, H_1 alle verschieden und reell sind.

Die gesuchte halbperspectivische Beziehung ordnet den Punkten G, H nothwendig die Punkte G_1, H_1 oder H_1, G_1 zu; also sicherlich dem Punkte P den Punkt P_1 , wenn P und P_1 die Pole von q, q_1 bezüglich Σ und Σ_1 bezeichnen. Man ordne einem beliebigen Punkte A von Σ einen beliebigen Punkt A_1 von Σ_1 zu, construiere die Tangenten a, a_1 dieser Linien in diesen Punkten und bezeichne mit B, B_1 die Schnittpunkte derselben mit q, q_1 .

Bezieht man nun die Systeme q und q_1 dadurch collinear auf einander, dass man den Punkten G, H, P, A die Punkte G_1, H_1, P_1, A_1 zuordnet, so wird dem Kegelschnitt Σ der Kegelschnitt Σ_1 , der Geraden $\overline{GH}$ die Gerade $\overline{G_1H_1}$, d. h. wiederum $\overline{GH}$, der Tangente a die Tangente a_1 und somit dem Punkte B der Punkt B_1 collinear entsprechen. In den collinearen auf q, q_1 befindlichen Reihen sind somit den Punkten G, H, B die Punkte G_1, H_1, B_1 zugeordnet. Ist die Richtung $(GH B)$ im Sinne Staudts*) der Richtung $(G_1 H_1 B_1)$ entgegengesetzt, so werden die Doppelpunkte I, J dieser Reihen sicherlich reell sein, und die angegebene Collineation ist eine der gesuchten halbperspectivischen Beziehungen. Nachdem man die Doppelpunkte I, J construiert, erhält man nach Art. 18 sofort die Leitgeraden d, d_1 der halbperspectivischen Systeme.

Sind jedoch die angeführten Richtungen übereinstimmend, so genügt es, den Punkten G, H resp. die Punkte H_1, G_1 zuzuordnen; dann sind die Reihen $GH B \dots$ und $H_1 G_1 B_1 \dots$ entgegengesetzt projectivisch, besitzen somit reelle Doppelpunkte und ergeben eine Lösung des Problems. Um jedoch alle Lösungen abzuleiten, stellen wir folgende Betrachtung an.

30. Der Punkt I , in welchem eine der beiden Leitgeraden die Linie q, q_1 trifft, kann auf q, q_1 beliebig gewählt werden; es genügt nämlich, einem Punkte A von Σ einen solchen Punkt A_1 von Σ_1 zuzuordnen, dass die den Punkten A, G, H, P die Punkte A_1, G_1, H_1, P_1 zuordnende Collineation auf q, q_1 zwei projectivische Reihen mit reellen Doppelpunkten, wovon einer in I , festlege. Dies erreicht man leicht folgendermaßen:

Ist der gewählte Punkt I außerhalb der Linien Σ und Σ_1 , so lege man durch ihn zu ihnen Tangenten und wähle ihre Berührungspunkte als entsprechende Punkte A, A_1 ; man erhält so zwei der gesuchten halbperspectivischen Beziehungen. Jede dieser Collineationen ordnet nämlich der Linie Σ die Linie Σ_1 ,

*) Geometrie der Lage, Art. 112.

der Tangente von Σ in A die Tangente von Σ_1 in A_1 und somit dem Punkte I wiederum I zu. Überdies ist klar, dass es außer diesen zwei keine andere Lösung gibt, in welcher eine der Leitgeraden durch den Punkt I gieng.

Ist aber der gewählte Punkt I innerhalb beider Linien Σ und Σ_1 , so ziehe man die Verbindungsgeraden $\overline{IP}$ und $\overline{IP_1}$; einen der beiden Schnittpunkte der ersten Geraden mit Σ wähle man für den Punkt A , und einer der Schnittpunkte der zweiten Geraden mit Σ_1 sei A_1 . Dies ergibt wieder zwei Lösungen, u. zw. die einzig existierenden, in welchen durch I eine der Lichtgeraden geht.

In beiden Fällen ergibt sich leicht die Leitgerade d_i , u. zw. im ersten als Schnittlinie der Ebenen (IAA_1) und (IPP_1) , im zweiten, indem man zwei weitere collineare Punkte B, B_1 zu Hilfe nimmt, als Schnittgerade der Ebenen (IBB_1) und (IPP_1) . Wird hierauf der andere Doppelpunkt J der in q, q_1 liegenden collinearen Reihen bestimmt, so ergibt sich die zweite Leitgerade d_j als Schnittlinie der Ebenen (JAA_1) , (JPP_1) .

Den noch erübrigenden Fall, dass der auf q, q_1 gewählte Punkt I innerhalb des einen und außerhalb des anderen der beiden Kegelschnitte Σ, Σ_1 liegt, ziehen wir nicht in Betracht, da er bei zwei unendlich nahen Kegelschnitten Σ und Σ_1 nicht auftreten kann, und in der beabsichtigten Verwendung dieser Betrachtungen es sich nur um solche Kegelschnitte handeln wird.

31. Der Lösung der im Art. 27 formulierten Aufgabe für den Fall, dass alle vier Punkte G, H, G_1, H_1 imaginär sind, schicken wir in diesem Artikel eine Hilfsbetrachtung voraus.

Es sei Σ ein beliebiger Kegelschnitt und M, N zwei bezüglich Σ conjugierte Punkte, durch welche zu Σ die reellen Tangenten m, m' , resp. n, n' gehen mögen. Die der Diagonalseite $\overline{MN}$ des vollständigen Vierseits $mm'nn'$ gegenüberliegende Diagonalecke P ist der Pol von $\overline{MN}$, und da M, N conjugierte Punkte sind, ist MNP ein Polardreieck. Hieraus folgt aber sofort, dass die durch zwei conjugierte Punkte M, N zum Kegelschnitt geführten Tangenten m, m', n, n' vier harmonische Tangenten sind. Schneidet sie nämlich die Tangente n' resp. in den Punkten μ, μ', ν, ν' , wo ν' der Berührungspunkt von n' und somit auf der Polare $\overline{MP}$ des Punktes N gelegen ist, so werden die Punkte μ, μ', ν, ν' aus P durch vier harmonische Strahlen projiciert, wie man aus dem vollständigen Vierseit $mm'nn'$ sofort ersieht.

Es seien nun Σ, Σ_1 zwei gegebene Kegelschnitte, M, N zwei bezüglich Σ , und M_1, N_1 zwei bezüglich Σ_1 conjugierte Punkte. Die durch M, N zu Σ gehenden Tangenten mögen m, m', n, n' ,

die durch M_1, N_1 zu Σ_1 geführten mögen m_1, m'_1, n_1, n'_1 heißen. Die Collineation, welche den Strahlen m, m', n, n' die Strahlen m_1, m'_1, n_1, n'_1 zuordnet, ordnet dem Kegelschnitt Σ den Kegelschnitt Σ_1 zu. Nach der vorausgeschickten Betrachtung ist nämlich Σ die Umhüllende aller Geraden, welche die vier Geraden m, m', n, n' in vier harmonischen Punkten schneiden, und die zu Σ collineare Linie ist demnach die Umhüllende aller m_1, m'_1, n_1, n'_1 in vier harmonischen Punkten schneidenden Geraden, also die Linie Σ_1 . Dies folgt übrigens auch so: Die festgelegte Collineation ordnet der Diagonalecke P die Diagonalecke P_1 , der Geraden $\overline{MP}$ die Gerade $\overline{M_1P_1}$ und somit dem Berührungspunkte ν der ersteren den Berührungspunkt ν_1 der letzteren, und also dem Kegelschnitt Σ den Kegelschnitt Σ_1 zu.

32. Nun ergibt sich leicht die Lösung der im Art. 27 gestellten Aufgabe in dem Falle, dass alle vier Punkte G, H, G_1, H_1 von einander verschieden und imaginär sind.

Man wähle auf der Geraden $\overline{q q_1}$ den Punkt M beliebig und lege durch ihn zu Σ die Tangenten m, m' ; mit N werde der Schnittpunkt der Polare von M bezüglich Σ und der Geraden $\overline{q q_1}$ bezeichnet, mit n, n' die durch N zu Σ geführten Tangenten. Die Punkte M, N sind natürlich bezüglich Σ conjugiert.

Man wähle ebenso den Punkt M_1 beliebig auf $\overline{q q_1}$, ziehe durch ihn die Tangenten m_1, m'_1 zu Σ_1 , und ziehe durch den Schnittpunkt N_1 der Polare von M_1 mit $\overline{q q_1}$ zu Σ_1 die Tangenten n_1, n'_1 .

Legt man eine Collineation dadurch fest, dass man den Strahlen m, m', n, n' die Strahlen m_1, m'_1, n_1, n'_1 zuordnet, so entspricht der Geraden $\overline{MN}$ die Gerade $\overline{M_1N_1}$, und die Collineation ist halbperspectivisch, wenn die Doppelpunkte der in $\overline{q q_1}$ liegenden collinearen Punktreihen reell sind. Nach dem vorhergehenden Artikel ordnet diese Collineation der Linie Σ die Linie Σ_1 zu.

Die Diagonalseite $\overline{(m n) (m' n')}$ des vollständigen Vierseits $m m' n n'$ möge die Gerade $\overline{q q_1}$ im Punkte Q schneiden; die collineare Gerade $\overline{(m_1 n_1) (m'_1 n'_1)}$ wird $\overline{q q_1}$ in dem entsprechenden Punkte Q_1 schneiden. Sind die Reihen $M N Q \dots$ und $M_1 N_1 Q_1 \dots$ entgegengesetzt projectivisch, so haben sie sicherlich reelle Doppelpunkte; sind sie aber einstimmig projectivisch, so genügt es, die Bezeichnung der Punkte M_1, N_1 in N_1, M_1 umzuändern, um sie zu entgegengesetzt projectivischen Reihen zu machen. Dies kann auch anders erreicht werden, wobei die Punkte M_1, N_1 ihre Bezeichnung behalten, was im nachfolgenden Artikel zu beachten ist. Die Diagonalseite $\overline{(m n') (m' n)}$ des oben betrach-

teten Vierseits trifft $\overline{q q_1}$ in dem zu Q bezüglich M, N harmonischen Punkte Q' , woraus folgt, dass die Richtungen (MNQ) und (MNQ') einander entgegengesetzt sind. Es genügt demnach, die Seiten n, n' mit n', n zu bezeichnen, um auf $\overline{q q_1}$ entgegengesetzt projectivische Reihen zu erhalten. — Bestimmt man die Doppelpunkte I, J dieser Reihen, so folgen die Leitgeraden d_i, d_j der gefundenen halbperspectivischen Beziehung wie im Art. 30.

33. Man sieht wieder leicht ein, dass der Punkt I , in welchem eine der Leitgeraden die Schnittlinie $\overline{q q_1}$ trifft, beliebig gewählt werden kann. Hierzu bemerke man, dass die im vorhergehenden Artikel festgelegte halbperspectivische Beziehung dem Punkte M den Punkt M_1 zuordnete, und dass dies zwei auf $\overline{q q_1}$ ganz beliebig gewählte Punkte waren. Legen wir demnach die beiden Punkte M und M_1 in einen beliebigen Punkt I von $\overline{q q_1}$, so ist der gemachte Ausspruch erwiesen und gleichzeitig eine Construction der zugehörigen Leitgeraden d_i, d_j gewonnen.

Da jetzt die auf $\overline{q q_1}$ liegenden collinearen Reihen immer reelle Doppelpunkte besitzen, gibt jede der beiden im vorigen Artikel betrachteten Zuordnungen eine Lösung. Hierdurch sind offenbar alle Lösungen gewonnen.

34. Betrachten wir nun den Specialfall, in welchem Σ und Σ_1 einen Punkt gemein haben. Mit G, H und G_1, H_1 wiederum die Schnittpunkte von Σ und Σ_1 mit $\overline{q q_1}$ bezeichnet, mögen G und G_1 als zusammenfallend angenommen werden.

In diesem Artikel sollen alle Leitgeraden d_i, d_j bestimmt werden, welche mit Σ eine Regelfläche vierter Ordnung Π bestimmen, die auch durch Σ_1 geht. Die Geraden d_i, d_j treffen somit weder Σ noch Σ_1 ; sind I, J ihre Spuren auf der Ebene q , so besteht der Schnitt der Ebene q mit der Fläche Π aus dem Kegelschnitt Σ und der zweifach gezählten Geraden $\overline{IJ}$, woraus man schließt, dass der Punkt H_1 auf $\overline{IJ}$ liegen muss. Ebenso ergibt sich durch Betrachtung des Schnittes mit der Ebene q_1 , dass der Punkt H auf der Geraden $\overline{I_1 J_1}$ liegen muss, mit I_1 und J_1 die Schnittpunkte der Leitgeraden d_i, d_j mit der Ebene q_1 bezeichnet. Fallen die Geraden $\overline{IJ}$ und $\overline{I_1 J_1}$ nicht zusammen, so besitzt Π vier Doppelgerade $\overline{IJ}, \overline{I_1 J_1}, d_i, d_j$, was unmöglich ist, wenn Π nicht in Flächen zweiter Ordnung zerfällt; letzterer Fall kann zu keiner Lösung führen, da zwei Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Punkte nicht auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen können. Man muss somit annehmen, dass die

Geraden $\overline{IJ}$ und $\overline{I_1 J_1}$ zusammenfallen und natürlich mit der Geraden $\varrho \varrho_1$ identisch sind, d. h. dass d_i und d_j die Gerade $\varrho \varrho_1$ treffen. Die Erzeugenden von Π bestimmen demnach auf Σ und Σ_1 entsprechende Punkte zweier halbperspectivischer Systeme ϱ und ϱ_1 . Die Punkte I, J sind die Doppelpunkte der in $\varrho \varrho_1$ liegenden collinearen Reihen, weshalb dem Punkte G der Punkt H_1 und dem Punkte H der Punkt G_1 entsprechen muss; und natürlich dem Pole P der Pol P_1 der Geraden $\varrho \varrho_1$ bezüglich Σ , resp. Σ_1 . Dies ergibt folgende Construction der Leitgeraden:

Man ordne einem beliebigen Punkte A von Σ einen Punkt A_1 von Σ_1 zu derart, dass die projectivischen Reihen $BGH\dots$ und $B_1 H_1 G_1\dots$ reelle Doppelpunkte I, J besitzen, mit B, B_1 die Schnittpunkte der Geraden $\overline{AP}, \overline{A_1 P_1}$ mit $\varrho \varrho_1$ bezeichnet. Die den Punkten A, G, H, P die Punkte A_1, H_1, G_1, P_1 zuordnende Collineation ist dann halbperspectivisch und ordnet dem Kegelschnitte Σ die Linie Σ_1 zu. Ihre Leitgeraden d_i, d_j sind die Schnittlinien der Ebenen $(I, A, A_1), (I, P, P_1)$, resp. $(J, A, A_1), (J, P, P_1)$.

Es ist klar, dass man einen der Punkte I, J , z. B. I , auf $\varrho \varrho_1$ beliebig wählen und dann die verlangte halbperspectivische Beziehung, welche Σ der Linie Σ_1 zuordnen soll, in eben derselben Weise festlegen und ihre Leitgeraden d_i, d_j construieren kann, wie es im Art. 30 geschehen ist.

Die durch Σ, d_i, d_j gehende Regelfläche Π hat die Doppelgerade $\overline{IJ}$, und die Ebene ϱ_1 schneidet Π außer in dieser Geraden noch in dem durch den Punkt G gehenden Kegelschnitt Σ_1 . Nennt man G', H' zwei auf Σ gelegene Nachbarpunkte von G, H , ferner g, h die durch dieselben zu d_i, d_j geführten Transversalen, so begrenzt $\varrho \varrho_1$ oder p mit g einen auf Π gelegenen infinitesimalen Streifen, und ebenso p mit h ; nach Art. 22 muss die Ebene ϱ_1 diese Streifen in den Punkten G_1 und H_1 berühren. Den ersten Streifen berührt jedoch im Punkte G_1 oder G die Ebene ϱ , woraus man schließt, dass ϱ_1 den ersten Streifen im Punkte H_1 und den zweiten im Punkte G_1 oder G berührt. Die Ebenen $\pi_i = (p d_i), \pi_j = (p d_j), \varrho, \varrho_1$ berühren somit den ersten Streifen in den Punkten I, J, G, H_1 und den zweiten Streifen in den Punkten I, J, H, G_1 , woraus die Gleichheit der Doppelverhältnisse folgt

$$(I, J, H, G) = (I, J, G, H_1) = (\pi_i \pi_j \varrho \varrho_1).$$

35. Betrachten wir jetzt den Fall, dass eine der Leitgeraden d_i, d_j die Linie Σ oder Σ_1 trifft. Die durch Σ, d_i, d_j gelegte Regelfläche zerfällt dann in eine Ebene und in eine cubische

Fläche Π . Sind I, J wiederum die Spuren der Leitgeraden auf der Ebene ϱ , so schneidet diese Ebene die Fläche Π in dem Kegelschnitte Σ und in der Geraden $\overline{IJ}$, und der Punkt H_1 des Schnittes muss sich auf $\overline{IJ}$ befinden; ebenso folgt mit Hilfe des Schnittes mit ϱ_1 , dass H auf der Geraden $\overline{I_1 J_1}$ liegen muss, mit I_1, J_1 die Spuren der Leitgeraden auf ϱ_1 bezeichnet. Beachtet man, dass die Σ schneidende Leitgerade d_i eine Doppelgerade der Fläche Π ist und dass ihre Spur I_1 auf ϱ_1 ein Doppelpunkt des aus Σ_1 und einer Geraden bestehenden Schnittes ist, so folgt, dass I_1 auf Σ_1 liegen muss, d. h. dass d_i auch die Linie Σ_1 treffen muss. Dies führt leicht zu der folgenden Construction der Leitgeraden d_i, d_j .

Man wähle auf Σ und Σ_1 , resp. die Punkte I und I_1 beliebig, jedoch nicht in der Geraden ϱ, ϱ_1 , und wähle ihre Verbindungslinie $\overline{II_1}$ zur Leitgeraden d_i . Durch diese Geraden lege man zwei Ebenen α, λ , von denen die erste Σ und Σ_1 noch in den Punkten K, K_1 , die zweite in L, L_1 treffen mag. Die Geraden $\overline{KK_1}, \overline{LL_1}, \overline{IH_1}, \overline{I_1 H}$ schneiden die Gerade d_i und besitzen noch eine gemeinschaftliche Transversale d_j , die bekanntlich leicht construiert werden kann. *) Die durch Σ, d_i, d_j geführte cubische Regelfläche geht dann auch durch Σ_1 , und d_i, d_j sind zwei der verlangten Leitgeraden.

Man bezeichne mit J und J_1 die Punkte, in welchen die Transversale d_j die Geraden $\overline{IH_1}, \overline{I_1 H}$ trifft, d. i. die Spuren von d_j auf den Ebenen ϱ und ϱ_1 . Die Gerade $\overline{IJ_1}$ ist auf der cubischen Fläche Π ; denn d_i ist eine Doppelgerade dieser Fläche und $\overline{I_1 J_1}$ hat mit der Fläche die Punkte I_1, K_1, J_1 gemein, von denen der erste für zwei Schnittpunkte zählt. Der Schnitt der Fläche mit der Ebene ϱ_1 besteht somit aus der Geraden $\overline{I_1 J_1}$ und einem durch die Punkte G_1, H_1, K_1, L_1, I_1 gehenden Kegelschnitt, d. i. aus Σ_1 . Es liegt also Σ_1 auf der Fläche Π , wie behauptet wurde.

Es erübrigt, den Fall in Betracht zu ziehen, dass die Gerade d_i die Linien Σ und Σ_1 in ihrem gemeinsamen Punkte G trifft. Der Schnitt mit der Ebene ϱ zeigt wieder, dass der Punkt H_1 auf der Geraden $\overline{IJ}$ liegen muss, d. h. dass J in die Gerade ϱ, ϱ_1 fällt; es schneiden somit beide Geraden d_i, d_j die Gerade ϱ, ϱ_1 und bestimmen somit zwischen ϱ und ϱ_1 eine halbperspectivische Beziehung, welche Σ die Linie Σ_1 zuordnet, und umgekehrt.

*) Staudt, Geometrie der Länge, Art. 306.

In jeder solchen Beziehung sind H, H_1 , ebenso wie die bezüglich Σ und Σ_1 genommenen Pole PP_1 entsprechende Punkte, so dass sich diese Construction der Leitgeraden ergibt:

Man wähle auf Σ und Σ_1 den Punkt A , resp. A_1 beliebig, bezeichne mit B, B_1 die Schnittpunkte der Geraden $\overline{AP}, \overline{A_1P_1}$ mit q, q_1 , und lege zwischen q und q_1 eine halbperspectivische Beziehung dadurch fest, dass man den Punkten A, G, H, P die Punkte A_1, G_1, H_1, P_1 zuordnet. Die zugehörigen Leitgeraden d_i, d_j lösen die Aufgabe.

36. Es möge nun der Fall erörtert werden, in welchem die gegebenen Kegelschnitte Σ und Σ_1 zwei gemeinsame Punkte besitzen.

Nehmen wir an erster Stelle an, dass die verlangten Leitgeraden d_i, d_j , d. h. die so bestimmten Geraden, dass die durch dieselben und Σ gelegte Regelfläche Π auch Σ_1 enthält, die Gerade q, q_1 nicht treffen. Die Fläche Π hat die Doppelgeraden $d_i, d_j, \overline{IJ}$, wenn I, J wieder die Spuren von d_i, d_j auf q bezeichnen. Sind I_1, J_1 die Spuren derselben auf q_1 , so besteht der Schnitt der Fläche mit q_1 aus dem Kegelschnitte Σ_1 und einer weiteren Linie zweiter Ordnung Σ_2 , so dass die durch Σ_1 und Σ_2 vorgestellte Linie vierter Ordnung in I_1, J_1, K Doppelpunkte besitzt, mit K die Spur von $\overline{IJ}$ auf der Ebene q_1 bezeichnet. Es müssen somit die Punkte I_1, J_1 auf Σ_1 liegen, und die Linie Σ_2 aus den Geraden $\overline{I_1K}, \overline{J_1K}$ bestehen. Da sich ähnlich ergibt, dass die Punkte I, J auf Σ liegen müssen, schließen wir Folgendes:

Legt man durch zwei Kegelschnitte Σ, Σ_1 mit zwei gemeinsamen Punkten eine Regelfläche, welche zwei q, q_1 nicht schneidende Gerade d_i, d_j zu Leitgeraden hat, so treffen diese Leitgeraden sowohl Σ als auch Σ_1 , und die Regelfläche besteht aus einer Fläche zweiter Ordnung und aus den Ebenen $(Id_j), (Id_i)$.

Alle diese Leitgeraden erhält man folgendermaßen: Man wähle auf Σ und Σ_1 je einen Punkt A und A_1 (außerhalb der gemeinsamen Punkte G, H) und die Verbindungslinie zur Linie d_i . Jede durch d_i gelegte Ebene trifft Σ und Σ_1 noch in je einem Punkte B, B_1 , und die Verbindungslinie $\overline{BB_1}$ erfüllt eine Regelfläche zweiter Ordnung. Eine beliebige Erzeugende dieser Fläche, die mit d_i zu demselben System gehört, kann als Leitgerade d_j genommen werden. Durch die Linien Σ und Σ_1 gehen zwei Kegel zweiter Ordnung; wählt man die Gerade d_i so, dass sie durch den Scheitel eines dieser Kegel geht, so erfüllt die Gerade $\overline{BB_1}$ diesen Kegel und die Leitgeraden d_i, d_j schneiden sich in diesem Falle im Kegelscheitel.

37. Nehmen wir an zweiter Stelle an, dass die Leitgeraden d_i, d_j die Schnittlinie q, q_1 treffen; dann bestimmen sie zwischen q und q_1 eine halbperspectivische Beziehung, welche Σ die Linie Σ_1 zuordnet, und umgekehrt. Diese Beziehung ordnet dem Punkte G den Punkt $G_1 \equiv \bar{G}$ und dem Punkte H den Punkt $H_1 \equiv \bar{H}$ zu oder den Punkten G, H , resp. die Punkte H_1, G_1 .

In beiden Fällen entspricht dem Pole P von q, q_1 bezüglich Σ der bezüglich Σ_1 bestimmte Pol P_1 derselben Geraden. Es ergeben sich also alle gesuchten Leitgeraden, im Falle die Punkte G, H reell sind, folgendermaßen:

Man lege zwischen den Systemen q und q_1 eine halbperspectivische Beziehung dadurch fest, dass man den Punkten A, G, H, P die Punkte A_1, G_1, H_1, P_1 zuordnet, mit A, A_1 zwei beliebige Punkte der Linie Σ , resp. Σ_1 bezeichnet. Die Leitgeraden gehen durch den Punkt G , resp. H , u. zw. sind es die Schnittlinien der zwei Ebenen (GAA_1) , (GPP_1) , resp. (HAA_1) , (HPP_1) . — Durchläuft der Punkt A den Kegelschnitt Σ , so durchläuft der collineare Punkt A_1 die Linie Σ_1 , und die Ebenen (Ad_j) , (Ad_i) haben eine Schnittlinie, welche eine Regelfläche zweiter Ordnung erfüllt, so dass der eben betrachtete Fall als ein Specialfall des im vorhergehenden Artikel erledigten aufgefasst werden kann.

Oder man lege zwischen den Systemen q und q_1 eine halbperspectivische Beziehung dadurch fest, dass man den Punkten A, G, H, P die Punkte A_1, H_1, G_1, P_1 zuweist, mit A, A_1 wiederum zwei beliebige auf Σ , resp. Σ_1 gewählte Punkte bezeichnet, derart jedoch, dass die projectivischen Reihen $B, G, H \dots$ und $B_1, H_1, G_1 \dots$ reelle Doppelpunkte I, J besitzen; hierbei bedeuten B, B_1 die Schnittpunkte von $\overline{AP}$ und $\overline{A_1P_1}$ mit q, q_1 . Die Leitgeraden dieser Collineation sind die gesuchten Geraden d_i, d_j . Da die Punkte I, J, G, H mit den Punkten I_1, J_1, H_1, G_1 , d. i. mit I, J, H, G projectivisch sind, so sind I, J, G, H harmonische Punkte.

Man kann offenbar wiederum einen der Punkte I, J auf q, q_1 beliebig wählen. Die Festlegung der die Aufgabe lösenden halbperspectivischen Beziehung, sowie die Construction der Leitgeraden d_i, d_j geschieht wie in Art. 30.

Sind zweitens die Punkte G, H imaginär, so müssen, da die gesuchten Leitgeraden d_i, d_j reell sein sollen, den Punkten G, H , resp. die Punkte H_1, G_1 halbperspectivisch zugeordnet werden.

Man kann wiederum einen der Punkte I, J auf q, q_1 beliebig wählen, z. B. I , und die Construction der immer reellen Leitgeraden d_i, d_j so wie im Art. 33 durchführen. Aus der dort angestellten Betrachtung ergibt sich, dass nun die Punkte N, N_1 zusammenfallen, da ja M, N bezüglich Σ und M_1, N_1 bezüglich Σ_1

conjugiert waren, nun aber, da $G \equiv G_1$ und $H \equiv H_1$ ist, beide Kegelschnitte Σ und Σ_1 auf q, q_1 dieselben Paare conjugierter Punkte bestimmen. Es ist somit der zweite Doppelpunkt J zum ersten I bezüglich Σ und Σ_1 conjugiert, genau so wie es im Falle reeller Punkte G, H war.

Dies ergibt für den Fall, dass Σ und Σ_1 zwei imaginäre Punkte gemein haben, die folgende Lösung: Durch einen beliebigen Punkt I von q, q_1 lege man zu Σ die Tangenten m, m' und zu Σ_1 die Tangenten m_1, m'_1 ; durch den zu I hinsichtlich Σ oder Σ_1 conjugierten Punkt N von q, q_1 lege man zu Σ und Σ_1 die Tangenten n, n' , resp. n_1, n'_1 . Die gesuchte halbperspectivische Collineation ist dadurch festgelegt, dass man den Geraden m, m', n, n' resp. die Geraden m_1, m'_1, n_1, n'_1 zuordnet; ihre Leitgeraden ergeben sich als die Schnittlinien der Ebenen $(m, m_1), (m', m'_1)$ resp. $(n, n_1), (n', n'_1)$ — Es ergeben sich nur zwei Lösungen, da die collinear entsprechenden Geraden $(m, n), (m', n')$, $(m_1, n_1), (m'_1, n'_1)$ sich nicht auf q, q_1 treffen dürfen, da dieser Schnittpunkt ein sich selbst entsprechender Punkt, also der dritte Doppelpunkt der auf q, q_1 gelegenen collinearen Reihen wäre; dies aber hätte die perspectivische Lage der ebenen Systeme q und q_1 zur Folge. In der That ersieht man aus dem vollständigen Σ umschriebenen Vierseit m, m', n, n' , dass die Diagonalseiten $(m, n), (m', n')$, $(m, n'), (m', n)$ die Diagonalseite q, q_1 in zwei Punkten Q, Q' treffen, die sowohl G, H als auch M, N harmonisch trennen. Dasselbe gilt aber von den Diagonalseiten $(m_1, n_1), (m'_1, n'_1)$, $(m_1, n'_1), (m'_1, n_1)$ des dem Kegelschnitte Σ_1 umschriebenen Vierseits m_1, m'_1, n_1, n'_1 ; sie treffen somit q, q_1 in denselben Punkten Q, Q' . Es müssen demnach die entsprechenden Seiten der beiden Vierseite derart gewählt werden, dass die Gerade $(m_1, n_1), (m'_1, n'_1)$ durch den Punkt Q' und die Gerade $(m_1, n'_1), (m'_1, n_1)$ durch den Punkt Q gehe; dass dieser Anforderung auf zweierlei Art entsprochen werden kann, ist klar.

Gleichzeitig ersieht man, dass man auf zweierlei Art den Geraden m, m' die Geraden m_1, m'_1 und den Geraden n, n' die Geraden n_1, n'_1 zuordnen kann, so dass sich je zwei entsprechende Diagonalseiten des eben angeführten Vierseits auf q, q_1 treffen. Durch jede dieser Zuordnungen ist eine perspectivische Collineation festgelegt, deren Centrum der Scheitel eines der beiden durch Σ und Σ_1 gehenden Kegel ist.

Ein interessanter Specialfall ergibt sich, wenn Σ und Σ_1 zwei in parallelen Ebenen gelegene Kreise vorstellen. Unsere Construction ergibt dann unendlich viele Geradenpaare d_i, d_j von solcher Lage, dass durch die Linien $\Sigma, \Sigma_1, d_i, d_j$ eine Regelfläche

geht, und zwar gehen durch jeden Punkt von $\overline{q q_1}$, d. h. parallel zu jeder Geraden von q zwei solche Gerade.

38. Stellen wir uns die Frage, ob es außer den in den zwei vorhergehenden Artikeln bestimmten Leitgeraden d_i, d_j noch andere Leitgerade gibt. Von diesen müsste eine, etwa d_i , die Gerade $\overline{q q_1}$ schneiden, die andere aber nicht. Man bezeichne wieder mit I, J die Spuren von d_i, d_j auf q , mit I_1, J_1 die Spuren auf q_1 ; der Punkt I_1 fällt mit I zusammen. Es wird vorausgesetzt, dass die durch Σ, d_i, d_j geführte Regelfläche Π auch durch Σ_1 gehe.

Bedeutet A einen die Linie Σ beschreibenden Punkt, so sind die Ebenen $(A d_i), (A d_j)$ entsprechende Ebenen zweier Ebenenbüschel, die in zwei-zweigligdriger Beziehung stehen; ihre Schnittlinie erfüllt die Fläche Π . Der Schnitt dieser Ebenenbüschel mit der Ebene q_1 sind zwei Strahlenbüschel I_1, J_1 in einer ebensolchen Beziehung, und diese müssten den Kegelschnitt Σ_1 erzeugen; dies erheischt aber, dass der gemeinsame Strahl $\overline{I_1 J_1}$ beider Büschel sich selbst doppelt entspreche. Dieser Strahl ist als Element des Büschels J_1 die Spur der Ebene $(I d_j)$, der im ersten Ebenenbüschel die Ebene $(J d_i)$ zweifach zugeordnet ist, deren Spnr auf q_1 die Gerade $\overline{I_1 J_1}$ nicht sein kann, da dann die Geraden d_i, d_j in einer Ebene, nämlich in (I, J, J_1) gelegen wären (vgl. Art. 21).

Ein ähnlicher Schluss kann in dem Falle gemacht werden, dass I in einen der Punkte G, H fällt, d. i. im Falle von ein-zweigligdrigen Büscheln. Wir sahen überdies am Schlusse des Art. 26, dass die durch G gelegten Ebenen, welche Π in einem Kegelschnitte treffen, durch die Gerade $\overline{IJ}$ gehen; die Ebene q_1 des Kegelschnittes Σ_1 geht wohl durch den Punkt G , aber nicht durch die Gerade IJ , so dass die angenommene Lage der Leitgeraden d_i, d_j als unmöglich erscheint.

Die in den zwei vorhergehenden Artikeln gegebenen Lösungen erschöpfen somit alle Lösungen d_i, d_j für den Fall, dass die zwei gegebenen Kegelschnitte zwei Punkte gemein haben.

39. Es erübrigt noch den Fall zu betrachten, in welchem der eine der beiden Kegelschnitte Σ, Σ_1 die Gerade $\overline{q q_1}$ berührt, oder alle beide.

Berührt Σ die Gerade $q q_1$ im Punkte G , während Σ_1 diese Gerade in zwei reellen oder imaginären, aber von G verschiedenen Punkten G_1, H_1 schneidet, so müssten nach Art. 27 die Leitgeraden d_i, d_j die Gerade $\overline{q q_1}$ treffen. Sie würden demnach

zwischen den ebenen Systemen ϱ und ϱ_1 eine halbperspectivische Beziehung festlegen, die der Linie Σ die Linie Σ_1 zuordnen würde, was unmöglich ist, da Σ die Gerade $\varrho \varrho_1$ berührt, Σ_1 aber die entsprechende Gerade, d. i. wieder $\varrho \varrho_1$, nicht berührt. In dem eben betrachteten Falle existieren somit keine Leitgeraden, d. h. keine zwei Geraden d_i, d_j , derart gelegen, dass die durch Σ, d_i, d_j geführte Regelfläche auch Σ_1 enthalte.

Berührt zweitens Σ die Gerade $\varrho \varrho_1$ im Punkte G , geht ferner Σ_1 auch durch diesen Punkt G und trifft $\varrho \varrho_1$ überdies im Punkte H_1 , so schließen wir nach Art. 34 und 35, dass die gesuchten Leitgeraden entweder zwischen ϱ und ϱ_1 eine halbperspectivische, die Linien Σ und Σ_1 einander zuordnende Beziehung festlegen müssten, was hier offenbar wieder unmöglich ist, oder dass der erste im Art. 35 betrachtete Fall Platz greifen muss; es wäre unnütz, die dort gegebene Construction der Leitgeraden d_i, d_j von neuem anzuführen.

Wenn drittens die Kegelschnitte Σ und Σ_1 die Gerade $\varrho \varrho_1$ in den Punkten G , resp. G_1 berühren, so kann man offenbar auf unendlich viele Arten zwischen ϱ und ϱ_1 eine halbperspectivische Beziehung festlegen, die Σ die Linie Σ_1 zuordnet. Man wähle die in $\varrho \varrho_1$ fallenden Punkte I, J der gesuchten Leitgeraden beliebig, führe durch I zu Σ und Σ_1 die Tangenten a, a_1 und durch J die Tangenten b, b_1 . In den auf $\varrho \varrho_1$ gelegenen projectivischen Reihen, die I, J zu Doppelpunkten und G, G_1 zu zwei entsprechenden Punkten haben, bestimme man zwei weitere entsprechende Punkte M, M_1 und lege durch sie zu Σ , resp. Σ_1 die Tangente m , resp. m_1 . Die Collineation, welche den Geraden a, b, m, p die Geraden a_1, b_1, m_1, p_1 , wo p und p_1 die Gerade $\varrho \varrho_1$ bedeuten, zuordnet, ist halbperspectivisch, I, J sind die Doppelpunkte der auf $\varrho \varrho_1$ gelegenen collinearen Reihen, G und G_1 sind entsprechende Punkte derselben, und demnach Σ und Σ_1 collinear entsprechende Linien. Die Leitgeraden dieser halbperspectivischen Systeme sind die gesuchten Geraden d_i, d_j .

Berühren die Kegelschnitte Σ und Σ_1 die Gerade $\varrho \varrho_1$ in demselben Punkte, so ist dies ein specieller Fall des in Art. 36 und 37 betrachteten und erledigten Falles, in welchem Σ und Σ_1 zwei gemeinsame Punkte hatten.

V. Über die Leitgeraden eines Flächenstreifens, den zwei unendlich nahe Kegelschnitte ohne gemeinsamen Punkt begrenzen.

40. Ein infinitesimaler Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) sei durch den Kegelschnitt Σ und sieben Berührungsebenen gegeben. Die Schnittlinie $\varrho \varrho_1$ der Ebenen von Σ und Σ_1 ist dann vollständig be-

stimmt und kann nach Art. 10 construiert werden. Schneidet $\overline{\varrho\varrho_1}$ die Linie Σ in reellen Punkten, so schneidet der Nachbarkegelschnitt Σ_1 die Gerade $\overline{\varrho\varrho_1}$ auch in reellen Punkten; sind aber jene Schnittpunkte imaginär, so sind es auch diese. Nach dem vorhergehenden Capitel können demnach zwei Gerade d_i, d_j so bestimmt werden, dass die durch Σ, d_i, d_j gelegte Regelfläche auch durch Σ_1 gehe, d. h. dass diese Regelfläche längs Σ dieselben Berührungsebenen wie der gegebene infinitesimale Streifen besitze.

Und umgekehrt, handelt es sich um die Construction zweier Geraden d_i, d_j der Eigenschaft, dass die durch einen beliebigen Punkt A von Σ zu ihnen geführte Transversale in die im Punkte A construierte Berührungsebene des Streifens falle, so erwäge man, dass diese Transversale den Nachbarkegelschnitt Σ_1 treffen muss, und dass daher Σ_1 auf der durch Σ, d_i, d_j gelegten Regelfläche liegt. Je zwei dieser Anforderung genügende Gerade d_i, d_j mögen Leitgerade des infinitesimalen Flächenstreifens ($\Sigma\Sigma_1$) heißen.

Sind zwei Leitgerade d_i, d_j des Streifens bekannt, so ist die Berührungsebene in einem beliebigen Punkte des Streifens durch die erwähnte Transversale und die Tangente von Σ sofort bestimmt. In diesem Capitel werden die Leitgeraden eines Flächenstreifens ($\Sigma\Sigma_1$) construiert und ihre Anordnung untersucht in dem Falle, dass Σ und Σ_1 ohne gemeinsamen Punkt sind; im folgenden Capitel für den Fall, dass Σ und Σ_1 einen oder zwei gemeinsame Punkte haben.

41. Im Art. 10 wurde die Schnittlinie $\overline{\varrho\varrho_1}$ construiert und gezeigt, wie entschieden werden kann, ob die Nachbarkegelschnitte Σ und Σ_1 , welche den durch Σ und sieben Berührungsebenen gegebenen Flächenstreifen begrenzen, sich schneiden oder nicht. Nehmen wir an, dass der am angegebenen Orte an erster Stelle angeführte Fall eintrete, dass also Σ und Σ_1 keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

Nach Art. 27 sind dann je zwei Leitgeraden des gegebenen Flächenstreifens gleichzeitig Leitgeraden einer halbperspectivischen Collineation zwischen den Systemen ϱ und ϱ_1 , welche dem Kegelschnitte Σ den Kegelschnitt Σ_1 zuordnet. Bezeichnen wiederum G, H und G_1, H_1 die Schnittpunkte von Σ und Σ_1 mit der Geraden $\overline{\varrho\varrho_1}$, ferner P und P_1 die bezüglich Σ und Σ_1 genommenen Pole dieser Geraden, so muss jede solche halbperspectivische Collineation den Punkten G, H, P die Punkte G_1, H_1, P_1 zuordnen, wenn G_1 den Nachbarpunkt von G und H_1 jenen von H bezeichnet. Letzteres folgt aus dem Umstande, dass

die Ebenen ϱ und ϱ_1 von einander unendlich wenig abweichen, und dass die geforderte halbperspectivische Beziehung den Punkten von ϱ Punkte in ϱ_1 zuordnet, die ihnen unendlich nahe liegen. Übrigens ergibt sich dies auch durch die folgende Überlegung:

Es mögen wiederum I, J die Punkte bezeichnen, in denen die Leitgeraden d_i, d_j die Gerade $\varrho \varrho_1$ treffen, ferner π_i, π_j die durch $\varrho \varrho_1$ und d_i , resp. d_j gelegten Ebenen. Sind den Punkten G, H die Punkte G_1, H_1 collinear zugeordnet, so hat man wie im Art. 24 die Doppelverhältnissgleichheiten

$$(IJG G_1) = (\pi_i \pi_j \varrho \varrho_1),$$

$$(IJH H_1) = (\pi_i \pi_j \varrho \varrho_1).$$

Da jedoch die Ebenen ϱ und ϱ_1 Nachbarebenen sind, so differiert der Wert des Doppelverhältnisses $(\pi_i \pi_j \varrho \varrho_1)$ unendlich wenig von der Einheit, woraus man schließt, dass G, G_1 sowohl, als auch H, H_1 Nachbarpunkte sein müssen.

42. Nach Art. 30 und 33 kann der Punkt I , in welchem eine der zwei Leitgeraden die Schnittlinie $\varrho \varrho_1$ trifft, beliebig gewählt werden. Wählt man I außerhalb der Linie Σ , und somit auch außerhalb der unendlich nahen Linie Σ_1 , führt durch diesen Punkt zu Σ die Tangenten, deren Berührungspunkte S und T sein mögen, so ordnet die verlangte halbperspectivische Beziehung den Geraden $\overline{IS}, \overline{IT}$ die durch I zu Σ_1 geführten Tangenten $\overline{IS}_1, \overline{IT}_1$, deren Berührungspunkte S_1, T_1 zu den Punkten S, T Nachbarpunkte sind. Die Ebenen $(ISS_1), (ITT_1)$ sind offenbar die Berührungsebenen σ, τ des gegebenen infinitesimalen Flächenstreifens in den Punkten S, T und die gesuchte Leitgerade d_i erscheint als die Schnittlinie der Ebenen σ, τ ,

Da dem Pol P halbperspectivisch der Pol P_1 entspricht, so schneidet die Verbindungsline $\overline{PP_1}$ die Leitgerade d_i , d. h. die Ebenen σ, τ treffen einander auf $\overline{PP_1}$. Erwägt man, dass die Punkte S, T mit dem Pole P in einer Geraden liegen, so hat man diesen Satz:

Construirt man die Berührungsebenen des Streifens in Punkten, die mit dem Pole P in einer Geraden liegen, so treffen ihre Schnittgeraden insgesamt die Verbindungsline der Nachbarpole $\overline{PP_1}$.

Hierdurch ist eine Construction der Verbindungsline $\overline{PP_1}$ gewonnen; es genügt, zwei Punkte I zu wählen, die zwei zu-

gehörigen Schnittlinien $\overline{\sigma \tau}$ zu construieren und zu ihnen durch den Pol P die Transversale zu ziehen.

43. Wählt man jedoch den Punkt I innerhalb Σ , also auch innerhalb Σ_1 , was nur in dem Falle geschehen kann, wenn Σ die Schnittlinie $\overline{q q_1}$ in reellen Punkten trifft, so wissen wir nach Art. 30, dass man eine halbperspectivische Beziehung zwischen q und q_1 herstellen kann, die der Linie Σ die Linie Σ_1 zuordnet und deren eine Leitgerade durch den Punkt I geht; indessen kann die am angegebenen Orte gegebene Construction der Leitgeraden jetzt, wo die Kegelschnitte Σ und Σ_1 unendlich nahe sind, unmittelbar nicht verwendet werden. Wir stellen deshalb folgende Betrachtung an:

Es sei I ein auf $\overline{q q_1}$ beliebig gewählter Punkt, innerhalb oder außerhalb Σ ; durch ihn geht eine Leitgerade d_i des gegebenen infinitesimalen Flächenstreifens, während die andere d_j die Gerade $\overline{q q_1}$ im Punkte J treffen möge. Man lege durch I eine Gerade, welche Σ in den Punkten A, B schneiden mag. Die halbperspectivische, durch die Leitgeraden d_i, d_j festgelegte Beziehung ordnet den Punkten A, B von Σ die Nachbarpunkte A_1, B_1 von Σ_1 zu, und die Verbindungslinie $\overline{A_1 B_1}$ geht natürlich auch durch den Punkt I . Da die Geraden $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ in der Ebene (IAA_1) liegen, so schneiden sie sich, und da beide die Gerade d_j treffen, welche durch den außerhalb jener Ebene liegenden Punkt J geht, so muss d_j durch den Schnittpunkt E der Geraden $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}$ gehen; allein die Gerade $\overline{AA_1}$ liegt in der Berührungsebene α des Punktes A , und $\overline{BB_1}$ in der Berührungsebene β des Punktes B , und somit E auf der Schnittlinie $\alpha\beta$. Es treffen sich also im Punkte E die Geraden $\alpha\beta$ und d_j , wodurch der folgende Satz gewonnen ist:

Die in je zwei mit dem Punkte I auf einer Geraden gelegenen Punkten von Σ construierten Berührungsebenen des infinitesimalen Flächenstreifens ergeben Schnittlinien, die insgesamt die zweite Leitgerade d_j treffen.

Dies liefert sofort die zweite Leitgerade d_j , sobald der Punkt I auf $\overline{q q_1}$ gewählt ist; die Construction vereinfacht sich auf Grund des Umstandes, der im Art. 45 bewiesen werden wird, dass die Punkte I, J ein Paar einer gewissen Involution bilden. Es genügt, zum Punkte I den involutorisch entsprechenden J zu bestimmen und durch diesen zu den Geraden $\overline{PP_1}$ und $\alpha\beta$ die Transversale zu ziehen; diese Transversale ist die Leitgerade d_j . Ganz ebenso ergibt sich die Leitgerade d_i mittelst

der Berührungsebenen α', β' der Punkte A', B' , in welchen irgend eine durch J in ϱ gezogene Gerade den Kegelschnitt Σ trifft. Da diese Constructionen von dem Umstande, ob I oder J innerhalb oder außerhalb Σ liegen, unabhängig sind, so sieht man, dass durch jeden Punkt von ϱq_1 eine Leitgerade des gegebenen Flächenstreifens geht, und ist deren Construction durch die eben angestellten Betrachtungen gewonnen.

44. Nachdem die Verbindungslinie $\overline{PP_1}$ auf die im Art. 42 angegebene Art construirt worden, betrachte man einen beliebigen Punkt I auf ϱq_1 , die durch ihn zu Σ geführten Tangenten $\overline{IS}$, $\overline{IT}$ und die Berührungsebenen σ, τ des Streifens in den Punkten S, T . Der Punkt, in welchem die beiden Ebenen σ, τ die Gerade $\overline{PP_1}$ treffen, heiße V , so dass die Verbindungslinie $\overline{IV}$ die Leitgerade d_i ist. Es soll nun der Zusammenhang der Punkte I von ϱq_1 mit den Punkten V von $\overline{PP_1}$ näher untersucht werden.

Durch den Punkt I gehen zwei von den durch V gehenden Berührungsebenen des Streifens; ist V gegeben und sucht man I , so hat man also vor allem die vier durch V gehenden Berührungsebenen zu betrachten. Hierzu (Art. 5) möge Σ_1 aus V auf ϱ in den Kegelschnitt Σ_1 projiciert werden; dieser Kegelschnitt berührt offenbar die Geraden $\overline{PG_1}$, $\overline{PH_1}$ in den Punkten G_1 , resp. H_1 . Die den Kegelschnitten Σ und Σ_1 gemeinsamen Tangenten sind die Spuren der vier gesuchten Berührungsebenen. Erwägt man jedoch, dass der Punkt P sowohl hinsichtlich Σ , als auch hinsichtlich Σ_1 die nämliche Polare $\overline{GH} \equiv \overline{G_1H_1}$ besitzt, so schließen wir nach einem bekannten Satze, dass sich die vier Σ und Σ_1 gemeinsamen Tangenten zu zweien auf der Geraden ϱq_1 in Punkten I und I' schneiden, die ein Paar einer mit dem Büschel der Kegelschnitte Σ_1 projectivischen Involution bilden. Dieses Kegelschnittbüschel ist aber (Art. 5) projectivisch mit der Reihe der Punkte V , wodurch erwiesen ist, dass die Reihe der Punkte V auf $\overline{PP_1}$ mit der Reihe der Punkte I auf ϱq_1 ein-zweigliedrig zusammenhängt; dass nämlich die Punktpaare I, I' eine mit der Reihe der Punkte V projectivische Involution bilden.

Da auch die zweite Leitgerade d_j als Schnittlinie von zwei durch den Punkt J geführten Berührungsebenen des Streifens erscheint, so sind d_i und d_j Erzeugende jener Regelfläche, welche die Verbindungslinie $\overline{VI}$ entsprechender Punkte der eben angeführten ein-zweigliedrigen Reihen erfüllt. Hierdurch ist der folgende Satz gewonnen:

Alle Leitgeraden eines von zwei unendlich nahen Kegelschnitten ohne gemeinsamen Punkt begrenzten Flächenstreifens erfüllen eine Fläche dritter Ordnung mit den Leitlinien $\overline{\varrho q_1}, \overline{PP_1}$, von welchen die zweite eine Doppelgerade der Fläche ist.

Gleichzeitig hat man eine Construction dieser Fläche.

45. Die im Vorhergehenden bestimmten halbperspectivischen Beziehungen ordnen (Art. 41) dem Punkte G den Nachbarpunkt G_1 und dem Punkt H den Nachbarpunkt H_1 zu. Die Doppelpunkte I, J der auf ϱq_1 gelegenen collinearen Reihen bilden demnach ein Paar der durch die Paare G, H und L, M festgelegten Involution, wenn mit L, M die zwei Punkte bezeichnet werden, welche gleichzeitig die Punkte G, H und G_1, H_1 harmonisch trennen.

Es handelt sich somit vor allem um die Construction der Doppelpunkte L, M der durch die unendlich nahen Punktepaare G, H und G_1, H_1 bestimmten Involution, oder kürzer der Involution $[G, H; G_1, H_1]$.

Es seien D, E zwei Punkte von Σ , in denen die Berührungsebenen δ, ε des infinitesimalen Flächenstreifens gegeben oder bekannt sind. Durch jeden Punkt V der Schnittlinie $\overline{\delta\varepsilon}$ gehen außer δ, ε noch zwei Berührungsebenen, und ihre Berührungspunkte F_1, F_2 bilden Paare einer auf Σ gelegenen Involution, deren auf ϱq_1 befindliches Centrum O nach Art. 6 leicht construiert werden kann. Wird die Linie Σ_1 aus V auf die Ebene ϱ projiciert, so erhält man einen durch die Punkte D, E, F_1, F_2, G_1, H_1 gehenden Kegelschnitt Σ'_1 . Hieraus schließt man, dass die durch die Punkte D, E, F_1, F_2 gehenden Kegelschnitte auf der Geraden ϱq_1 die Involution $[G, H; G_1, H_1]$ fixieren; die Linie Σ schneidet nämlich das Paar G, H , die Linie Σ_1 das Paar G_1, H_1 heraus. Zum Kegelschnittbüschel mit den Basispunkten D, E, F_1, F_2 gehört auch der von den Geraden $\overline{DE}$ und $\overline{F_1F_2}$ gebildete Kegelschnitt, und dieser schneidet ϱq_1 in den Punkten O' und O , wenn mit O' eben der Schnittpunkt der Geraden $\overline{DE}$ und ϱq_1 bezeichnet wird. Es ist somit die gesuchte Involution $[G, H; G_1, H_1]$ durch die zwei Punktepaare G, H und O, O' bestimmt.

Ist das Punktepaar G, H imaginär, so verschaffe man sich statt seiner ein weiteres reelles Punktepaar dieser Involution dadurch, dass man ϱq_1 mit einem anderen degenerierten Kegelschnitt des Büschels, z. B. dem aus den Geraden $\overline{DF_1}, \overline{EF_2}$ gebildeten, zum Schnitte bringt.

Der zu einem beliebigen Punkt I zugeordnete Punkt J ergibt sich nun als der ihm in der Involution $[G, H; G_1, H_1]$

entsprechende. Man projiciere aus einem beliebigen Punkte R von Σ zwei reelle Punktepaare dieser Involution auf Σ , so erhält man zwei reelle Paare und also auch das Centrum S der entsprechenden Involution auf Σ ; die Polare s von S bezüglich Σ ist die Verbindungslinie der Doppelpunkte L', M' dieser Involution. Die Verbindungslinie der Punkte G, H ist $q\overline{q_1}$, und demnach ist der Schnittpunkt S' der Geraden s und $q\overline{q_1}$ das Centrum jener auf Σ gelegenen Involution, in welche die Involution $[G, H; L, M]$ aus R projiciert wird. Ist dieser Punkt S' construiert, ergibt sich sofort der dem Punkte I zugeordnete Punkt J ; man projiciere I aus R auf Σ in den Punkt I' , construiere den zweiten Schnittpunkt J' der Geraden $I'S'$ mit Σ und projiciere ihn aus R auf $q\overline{q_1}$ in den gesuchten Punkt J .

46. Hat die durch die Punktepaare I, J gebildete Involution $[G, H; L, M]$ reelle Doppelpunkte, so sind die einem dieser Doppelpunkte entsprechenden Leitgeraden d_i, d_j unendlich nahe und bestimmen einen infinitesimalen Flächenstreifen, der mit dem gegebenen Streifen ($\Sigma \Sigma_1$) folgendermaßen zusammenhängt:

Ist A ein beliebiger Punkt von Σ , so berührt die Ebene (Ad_i) den geradlinigen infinitesimalen Streifen (d_i, d_j) in einem Punkte A' , dessen Verbindungslinie mit dem Punkte A in die Berührungsebene des Streifens ($\Sigma \Sigma_1$) im Punkte A fällt.

Diese zwei geradlinigen Flächenstreifen können leicht construiert werden. Man construiere die Doppelpunkte der Involution $[G, H; L, M]$ und die entsprechende Leitgerade $d_i \equiv d_j$; die Berührungsebenen α, β, γ des Streifens ($\Sigma \Sigma_1$) in drei Punkten A, B, C liefern sofort die Berührungspunkte der Ebenen (Ad_i) $(Bd_i), (Cd_i)$ mit dem infinitesimalen Streifen (d_i, d_j) ; es sind dies die Schnittpunkte der Geraden d_i mit den Ebenen α, β, γ . Durch die Berührungsebenen in drei Punkten ist der geradlinige infinitesimale Streifen bestimmt.

VI. Über die Leitgeraden eines Flächenstreifens, der durch zwei sich schneidende unendlich nahe Kegelschnitte begrenzt wird.

47. Ein durch zwei Nachbarkegelschnitte begrenzter Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) sei durch Σ und sieben Berührungsebenen gegeben, und es möge die in Art. 10 abgeleitete Construction ergeben, dass die Kegelschnitte Σ und Σ_1 einen Punkt G gemein haben. Die Schnittpunkte der Linien Σ und Σ_1 mit $q\overline{q_1}$ mögen wieder mit G, H und G_1, H_1 bezeichnet und vorausgesetzt werden, dass G und G_1 zusammenfallen.

Mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Ebenen q und q_1 unendlich nahe verlaufen, schließt man so wie im Art. 41, dass die im Art. 34 gegebene Lösung in dem jetzigen Falle entfällt; es ordnete die am angeführten Orte festgelegte halbperspectivische Beziehung dem Punkte G den Punkt H_1 zu, da doch nach Art. 41 in unserem Falle je zwei entsprechende Punkte von Σ und Σ_1 unendlich nahe liegen müssen. Es erübrigen jedoch die beiden im Art. 35 angeführten Arten von Leitgeraden.

Die erste dieser zwei Lösungen lautet jetzt offenbar folgendermaßen:

Man wähle auf Σ einen beliebigen Punkt I , construiere in ihm die Berührungsebene des gegebenen Streifens ($\Sigma \Sigma_1$) und ziehe in ihr durch I eine beliebige Gerade d_i . Durch d_i und einen beliebigen Punkt A von Σ lege man die Ebene ($A d_i$) und schneide mit ihr die Berührungsebene α des Streifens in A in der Geraden a . Alle so abgeleiteten Geraden a haben außer d_i noch eine gemeinschaftliche Transversale d_j , die die Verbindungsline $\overline{IH}$ ebenfalls schneidet und die leicht construiert werden kann. Die Geraden d_i, d_j sind Leitgerade des gegebenen infinitesimalen Streifens ($\Sigma \Sigma_1$).

Bei der zweiten, im Art. 35 gegebenen Lösung muss die eine Leitgerade, z. B. d_i , durch den Punkt G gelegt werden, die andere, d_j , schneidet dann gleichfalls die Gerade $q q_1$. Die verlangten Leitgeraden legen zwischen den ebenen Systemen q, q_1 eine halbperspectivische Beziehung fest, die den Punkten G, H resp. die Punkte G_1, H_1 und der Linie Σ die Linie Σ_1 zuordnet; und natürlich dem Pole P von $q q_1$ bezüglich Σ den Pol P_1 dieser Geraden bezüglich Σ_1 . Diese Beziehung ist demnach vollkommen bestimmt, wenn man den Punkten M, G, H, P die Punkte M_1, G_1, H_1, P_1 collinear zuordnet, mit M einen beliebigen Punkt von Σ und mit M_1 einen auf Σ_1 gelegenen Nachbarpunkt, und somit mit $\overline{MM_1}$ eine beliebige, durch den Punkt M in der Berührungsebene μ des Streifens ($\Sigma \Sigma_1$) im Punkte M geführte Gerade bezeichnet.

Hieraus folgt aber sofort, dass der zweite auf $q q_1$ gelegene Doppelpunkt J beliebig gewählt werden kann, und dass die in Art. 42 und 43 angestellten Betrachtungen auch hier Geltung haben.

Wählt man also den Punkt J auf $q q_1$ außerhalb Σ , sind S, T die Berührungspunkte der durch J zu Σ geführten Tangenten und σ, τ die in S und T construierten Berührungsebenen des gegebenen Streifens ($\Sigma \Sigma_1$), so ist die Schnittlinie von σ und τ die Leitgerade d_j .

Construiert man ferner nach Art. 9 die Berührungsebene ι des gegebenen Streifens im Punkte I oder G , so enthält diese Ebene die Verbindungslinie $\overline{PP_1}$, die auch d_j schneiden muss; es ist also $\overline{PP_1}$ als Verbindungslinie des Punktes P mit dem den drei Ebenen ι, σ, τ gemeinschaftlichen Punkte construiert.

Wird der Punkt J auf $\overline{\varrho\varrho_1}$ außerhalb oder innerhalb Σ gewählt und durch ihn eine Gerade geführt, die Σ in den Punkten A, B trifft, so folgt nach Art. 43, dass die Schnittlinie der in A und B construierten Berührungsebenen α, β des gegebenen Streifens die Leitlinie d_i trifft. Die Gerade d_i ist somit als Verbindungslinie des Punktes G mit dem Schnittpunkte der drei Ebenen ι, α, β construiert.

Nun erhält man leicht die Gerade d_j auch in dem Falle, dass durch den auf $\overline{\varrho\varrho_1}$ gewählten Punkt J zu Σ keine reellen Tangenten gehen. Nachdem die Gerade d_i auf die eben angeführte Art construiert, erwäge man, dass die Ebene (Ad_i) den A collinear entsprechenden Punkt A_1 enthält, der sich natürlich auch in der Berührungsebene α befindet; es ist also die Schnittlinie der Ebenen (Ad_i) und α die Gerade $\overline{AA_1}$. Sie wird von der gesuchten Leitgeraden d_j getroffen, und es ist somit d_j die durch den Punkt J zu den Geraden $\overline{AA_1}, \overline{PP_1}$ geführte Transversale.

Hieraus ersieht man, dass durch jeden Punkt J von $\overline{\varrho\varrho_1}$ eine Leitgerade des gegebenen infinitesimalen Flächenstreifens geht, während die andere durch den Punkt G in der Ebene ι verläuft; gleichzeitig ist eine Construction beider Leitgeraden bestimmt.

48. Um den geometrischen Ort aller eben betrachteten Leitgeraden zu finden, erwäge man, dass die durch den Punkt J gehenden Berührungsebenen σ, τ sich auf der Geraden $\overline{PP_1}$ in einem gewissen Punkte V treffen; hierdurch ist einem beliebigen Punkte J der Geraden $\overline{\varrho\varrho_1}$ ein gewisser Punkt V auf $\overline{PP_1}$ zugeordnet. Ist umgekehrt der Punkt V auf $\overline{PP_1}$ gegeben und sucht man den zugehörigen Punkt J von $\overline{\varrho\varrho_1}$, so projiciere man Σ_1 aus V auf die Ebene ϱ in den Kegelschnitt Σ'_1 , der offenbar die Geraden $\overline{PG_1}, \overline{PH_1}$ in den Punkten G_1 , resp. H_1 berühren wird. Die Linien Σ und Σ_1 haben demnach im Punkte $G \equiv G_1$ eine gemeinsame Tangente, und da die Gerade $\overline{\varrho\varrho_1}$ bezüglich dieser beiden Kegelschnitte denselben Pol P besitzt, so werden sich die weiteren zwei gemeinsamen Tangenten von Σ und Σ'_1 auf $\overline{\varrho\varrho_1}$ in dem verlangten Punkte J schneiden; es

sind dies die Spuren der durch V außer ι gehenden zwei Berührungsebenen des gegebenen Flächenstreifens ($\Sigma \Sigma_1$).

Das Büschel der Kegelschnitte Σ_1 ist bekanntlich projectivisch mit der Reihe der Punkte J und offenbar auch projectivisch mit der Reihe der Punkte V ; es sind also auch diese zwei Reihen projectivisch, und die Verbindungslinie $\overline{JV}$ ihrer entsprechenden Punkte erfüllt demnach eine Regelfläche zweiter Ordnung. Die Gerade d_i , welche in der Ebene ι durch den Punkt G beliebig gelegt werden kann, erfüllt ein Strahlenbüschel. Somit gilt der Satz:

Der geometrische Ort der Leitgeraden d_i, d_j eines von zwei Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Punkte begrenzten infinitesimalen Streifens, die die Schnittlinie $\overline{q q_1}$ treffen, besteht aus der Berührungsebene ι des Streifens in jenem gemeinsamen Punkte und aus einer Fläche zweiter Ordnung.

49. Wir wollen nun einen infinitesimalen Streifen in Betracht ziehen, der von zwei Kegelschnitten Σ und Σ_1 begrenzt wird, die zwei gemeinsame Punkte G, H besitzen. Die Berührungsebenen des Streifens werden von dem bekannten Kegel zweiter Classe eingehüllt und die Leitgeraden sind demnach zu ihrer Construction von keiner Wichtigkeit; sie sollen indessen der Vollständigkeit wegen doch hervorgehoben werden.

Alle Leitgeraden eines solchen Streifens folgen leicht durch die Betrachtungen der Art. 36 und 37, wobei zu bemerken ist, dass die zweite im letzteren Artikel aufgeführte Lösung jetzt aus dem Grunde entfällt, weil die verlangte halbperspectivische Beziehung den Punkten von q in q_1 Nachbarpunkte zuordnen muss und daher den Punkten G, H die resp. Punkte H, G nicht entsprechen können. — Die zwei an der angeführten Stelle erübrigenden Lösungen bilden nunmehr eine einzige Lösung. Die im Art. 37 gegebene Lösung zeigt, dass man auch jetzt die Leitgerade d_i beliebig durch den Punkt G in der Berührungsebene dieses Punktes führen kann, und dass die durch d_i gelegten Ebenen die Berührungsebenen in den Erzeugenden einer Fläche zweiter Ordnung schneiden. Die Gerade d_j geht durch den Punkt H , und zwar ist es die mit d_i demselben Systeme angehörnde Erzeugende jener Fläche. Diese Lösung ist aber mit der im Art. 36 gegebenen im Wesen identisch, obwohl an jener Stelle die Leitgerade d_i durch einen beliebigen Punkt von Σ in der Berührungsebene desselben geführt wurde; in der That sind in dem Falle, den wir betrachten, die Punkte G, H in keiner Weise bevorzugt, da man offenbar den gegebenen Streifen durch

Σ und irgend einen unendlich nahen ebenen Schnitt des oben erwähnten Kegels begrenzen kann.

50. Die in diesem und dem vorgehenden Capitel geleistete Bestimmung der Leitgeraden eines infinitesimalen Flächenstreifens ($\Sigma \Sigma_1$) wurde unter der stillschweigenden Voraussetzung gemacht, dass die Gerade $\overline{q q_1}$ den Kegelschnitt Σ in zwei, reellen oder imaginären, aber verschiedenen Punkten schneidet. Es erübrigt noch den Fall zu erörtern, wenn Σ die Gerade $\overline{q q_1}$ berührt.

Es sei demnach ein infinitesimaler Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) gegeben durch den Kegelschnitt Σ , die diesen Kegelschnitt berührende Gerade $\overline{q q_1}$ und die Berührungsebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ in fünf Punkten A, B, C, D, E von Σ . Die Betrachtungen des Cap. I können sofort zur Geltung gebracht werden, wenn man in ihnen nur voraussetzt, dass die Punkte G und H zusammenfallen; die im Art. 9 gegebene Construction der Berührungsebene des Streifens in einem beliebigen Punkte F von Σ bleibt bestehen. Geschieht es, dass der am angeführten Orte construierte Punkt O nicht auf die Linie Σ fällt, so ist die Einhüllende aller Berührungsebenen des Streifens ($\Sigma \Sigma_1$) von der vierten Classe und enthält außer Σ nur noch einen Kegelschnitt Σ_2 ; dieser berührt die Ebene q in dem Pol P von $\overline{q q_1}$, bezüglich Σ , d. i. im Berührungspunkte G der Geraden $\overline{q q_1}$ mit Σ ; denn jetzt repräsentiert (Art. 13) Σ zwei zusammenfallende auf der einhüllenden developpablen Fläche gelegene Kegelschnitte. Da der gemachten Voraussetzung zufolge diese developpable Fläche von der vierten Classe ist, muss angenommen werden, dass der Nachbarkegelschnitt Σ_1 die Gerade $\overline{q q_1}$ in zwei verschiedenen Punkten trifft, von denen keiner mit G zusammenfällt. Hieraus folgert man aber nach Art. 39, dass in dem betrachteten Falle der infinitesimale Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) keine Leitgeraden besitzt.

Fällt jedoch der Punkt O auf den Kegelschnitt Σ , also in den Punkt P , so geht durch einen beliebigen Punkt der Geraden $\overline{\delta \varepsilon}$ außer δ und ε nur noch eine Berührungsebene des Streifens ($\Sigma \Sigma_1$), und dieser ist von der dritten Classe. Hieraus schließt man, dass entweder α) angenommen werden muss, dass der Nachbarkegelschnitt Σ_1 ebenfalls die Gerade $\overline{q q_1}$ berührt, und zwar in einem zu G oder P benachbarten Punkte G_1 (Art. 56), oder β) dass Σ_1 durch G geht und $\overline{q q_1}$ noch in einem Nachbarpunkte H_1 schneidet. Die developpable, den Kegelschnitten Σ und Σ_1 umschriebene Fläche, welche

aus einer Fläche dritter Classe und aus dem Ebenenbüschel mit der Achse $q q_1$ besteht, enthält keinen weiteren Kegelschnitt mehr; da nämlich Σ die Ebene q_1 berührt, gilt Σ_1 für zwei, und da Σ_1 die Ebene q berührt, gilt auch Σ für zwei auf jener developpablen Fläche gelegene Kegelschnitte. Die Construction des Art. 9 gibt auch in diesem Falle die Berührungsebene des Streifens in jedem Punkte von Σ .

Auf Grund der unter α) ausgesprochenen Ansicht können die Spuren I, J der Leitgeraden d_i, d_j des Streifens nach Art. 39 auf der Geraden $q q_1$ beliebig gewählt werden; die Leitgeraden d_i, d_j erhält man dann auf Grund des im Art. 43 gegebenen Satzes. Zieht man also durch I eine Gerade, welche Σ in zwei Punkten L, M schneidet, construirt in ihnen die Berührungsebenen λ, μ des gegebenen Streifens ($\Sigma \Sigma_1$), so trifft die Gerade d_j die Schnittlinie $\lambda \mu$; da sich die Leitgerade d_j überdies in der Berührungsebene ν des Punktes N befindet, in welchem eine durch J zu Σ geführte Tangente diesen Kegelschnitt berührt, so erscheint d_j als die Verbindungslinie von J mit dem Schnittpunkt der drei Ebenen λ, μ, ν . Ähnlich construirt man die Leitgerade d_i .

Stellt man sich auf den unter β) ausgesprochenen Standpunkt, so erhält man die anderen Leitgeraden des Streifens, welche $q q_1$ nicht treffen, nach Art. 45 folgendermaßen: In einem beliebigen Punkte A von Σ construirt man die Berührungsebene und wähle eine in ihr durch A beliebig geführte Gerade als Leitgerade d_i . Die durch d_i gelegten Ebenen schneiden die Berührungsebenen des Streifens in Geraden, welche eine gemeinsame Transversale d_j zulassen, die zweite Leitgerade des Streifens.

Die im Art. 9 gegebene Construction des Punktes O wird auch jetzt illusorisch, wenn die ebenen fünf Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ durch einen Punkt V gehen. Dann liegt der infinitesimale Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) auf einem Kegel zweiter Ordnung mit dem Scheitel V und die Anordnung der Berührungsebenen ist klar. Alle Leitgeraden d_i, d_j eines solchen Streifens sind durch die Betrachtungen der Art. 36 und 37 gegeben.

VII. Einige analytische Betrachtungen.

51. In Hinsicht auf die in den vorausgehenden Capiteln vorkommenden infinitesimalen Betrachtungen dürften einige zur Erhärtung der gewonnenen Resultate dienende analytische Untersuchungen nicht unnütz erscheinen.

Es mögen x_1, x_2, x_3, x_4 homogene, bezüglich des Tetraeders I, II, III, IV genommene Punktkoordinaten und $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die Coordinaten der Ebene

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

bezeichnen. Der die Fläche II erzeugende Kegelschnitt Σ sei durch die Gleichungen

$$\sum_{(i,k)} a_{ik} x_i x_k = 0 \text{ oder } A = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4; a_{ik} = a_{ki}),$$

$$\sum_{(j)} b_j x_j = 0 \text{ oder } B = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

gegeben; die 14 Coefficienten a und b sind gegebene Functionen einer Veränderlichen t .

Der Kegelschnitt Σ ist auch durch eine Gleichung in den Ebenencoordinaten ξ gegeben

$$(1) \quad \sum_{(i,k)} \alpha_{ik} \xi_i \xi_k = 0 \text{ oder } C = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4; \alpha_{ik} = \alpha_{ki}),$$

wobei die Coefficienten α auf bekannte Weise aus den Größen a und b gebildet sind. Da die letzte Gleichung für jedes t einen Kegelschnitt repräsentiert, so muss die Discriminante

$$A = \sum \pm (\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{44}),$$

für jedes t verschwinden, demnach auch ihre Derivirte, so dass man schreiben kann

$$(2) \quad A = 0, \quad \frac{dA}{dt} = 0.$$

Die Gleichungen

$$C(t) = 0, \quad C(t + dt) = 0$$

repräsentieren zwei Nachbarkegelschnitte Σ , resp. Σ_1 der Fläche II; beide zusammen bestimmen die diesen Kegelschnitten umschriebene developpable Fläche. Diese ist somit durch die Gleichungen

$$(3) \quad C = 0, \quad \frac{dC}{dt} = 0$$

bestimmt. Um die auf ihr gelegenen Kegelschnitte zu bestimmen,

bildet man die Discriminante der quaternären quadratischen Form $C + \lambda \frac{dC}{dt}$:

$$\varphi(\lambda) = \sum \pm (\alpha_{11} + \lambda \alpha'_{11}, \alpha_{22} + \lambda \alpha'_{22}, \alpha_{33} + \lambda \alpha'_{33}, \alpha_{44} + \lambda \alpha'_{44}),$$

mit α'_{ik} die nach t genommene Derivierte von α_{ik} bezeichnet; die gesuchten Kegelschnitte haben die Gleichung

$$C + \lambda \frac{dC}{dt} = 0,$$

mit λ die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$(4) \quad \varphi(\lambda) = 0$$

bezeichnet.

Da $\varphi(0) = A = 0$ ist, ist 0 eine dieser Wurzeln und liefert den Kegelschnitt Σ . Dieser zählt aber für zwei Kegelschnitte der Fläche (3), da $\lambda = 0$ eine doppelte Wurzel von (4) ist; man findet nämlich leicht

$$\varphi'(0) = \frac{dA}{dt} = 0,$$

nach der zweiten Gleichung (2).

52. Die zwei weiteren Wurzeln von (4) geben zwei weitere auf der developpablen Fläche (3) gelegene Kegelschnitte Σ_2 und Σ_3 . Diese Linien berühren die Ebene q von Σ , und zwar in dem bezüglich Σ genommenen Pole P der Geraden q , welche den Ebenen q und q_1 der Nachbarkegelschnitte Σ und Σ_1 gemein ist.

Um dies zu zeigen, bemerke man, dass die Coordinaten ξ der Ebene q den vier Gleichungen genügen,

$$(5) \quad \alpha_{i1} \xi_1 + \alpha_{i2} \xi_2 + \alpha_{i3} \xi_3 + \alpha_{i4} \xi_4 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

woraus man schließt, dass die Ebene q bezüglich aller Flächen $C + \lambda \frac{dC}{dt} = 0$ denselben Pol P besitzt, mag λ welchen Wert immer haben, also speciell bezüglich Σ_2 , Σ_3 und der Fläche $\frac{dC}{dt} = 0$. Allein die Ebene q berührt die letztere Fläche, und es fällt somit P in die Ebene q . In der That, es lautet die Gleichung des bezüglich dieser Fläche genommenen Poles von q

$$(6) \quad \eta_1 \sum_{(i)} \alpha'_{1i} \xi_i + \eta_2 \sum_{(i)} \alpha'_{2i} \xi_i + \eta_3 \sum_{(i)} \alpha'_{3i} \xi_i + \eta_4 \sum_{(i)} \alpha'_{4i} \xi_i = 0,$$

mit ξ die Coordinaten von ϱ und mit η die laufenden Coordinaten bezeichnet; und dieser Gleichung genügen die Werte $\eta_i = \xi_i$, falls man hat

$$(7) \quad \sum_{(i,k)} \alpha'_{ik} \xi_i \xi_k = 0,$$

welche Bedingung auch wirklich erfüllt ist. Bezeichnet man nämlich mit A_{ik} den dem Elemente α_{ik} zugeordneten Minor von A , so kann die zweite Gleichung (2) geschrieben werden

$$(8) \quad \sum_{(i,k)} \alpha'_{ik} A_{ik} = 0,$$

und da nach (5)

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = A_{i1} : A_{i2} : A_{i3} : A_{i4} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

und hieraus mit Rücksicht auf $A_{ik} = A_{ki}$ geschlossen wird, dass die zehn Producte $\xi_i \xi_k$ den zehn Größen A_{ik} proportional sind, so folgt aus (8) sofort die zu erweisende Gleichung (7).

Es liegt somit der bezüglich Σ_2 oder Σ_3 genommene Pol P von ϱ in ϱ , und es berühren demnach Σ_2 und Σ_3 die Ebene ϱ im Punkte P . Es erübrigt nachzuweisen, dass P der Pol der Geraden $\overline{\varrho \varrho_1}$ bezüglich Σ ist.

Wird (5) differentiiert, so erhält man

$$(9) \quad \sum_{(k)} \alpha_{ik} d\xi_k + dt \sum_{(k)} \alpha'_{ik} \xi_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

wobei der Summationsindex k auch die Werte 1, 2, 3, 4 annimmt.

Schreibt man die Werte $\frac{d\xi}{dt}$ in der Gestalt $-\frac{1}{dt} \xi + \frac{1}{dt} (\xi + d\xi)$, so sieht man, dass die Ebene $\frac{d\xi}{dt}$ durch die Gerade $\overline{\varrho \varrho_1}$ geht; sie hat demnach bezüglich des Kegelschnittes Σ denselben Pol wie die Gerade $\overline{\varrho \varrho_1}$. Der Pol der Ebene $\frac{d\xi}{dt}$ bezüglich Σ hat aber die Gleichung

$$\eta_1 \sum_{(i)} \alpha_{1i} \frac{d\xi_i}{dt} + \dots + \eta_4 \sum_{(i)} \alpha_{4i} \frac{d\xi_i}{dt} = 0,$$

d. i. mit Rücksicht auf (9)

$$\eta_1 \sum_{(i)} \alpha'_{1i} \xi_i + \dots + \eta_4 \sum_{(i)} \alpha'_{4i} \xi_i = 0,$$

welches die Gleichung (6) des Punktes P ist.

53. Wir wollen nun den speciellen Fall betrachten, dass die Gerade $\overline{q q_1}$ den Kegelschnitt Σ berührt, d. h. wir setzen voraus, dass die Ebene $\frac{d\xi}{dt}$ oder kürzer ξ' diesen Kegelschnitt berührt, dass also die Gleichung gilt

$$(10) \quad \sum_{(i,k)} \alpha_{ik} \xi_i' \xi_k' = 0.$$

Schreibt man die Gleichung (9) in der Form

$$\alpha_{i1} \xi_1' + \dots + \alpha_{i4} \xi_4' + \alpha'_{i1} \xi_1 + \dots + \alpha'_{i4} \xi_4 = 0,$$

multipliziert sie mit ξ_i' und bildet die Summe der für $i = 1, 2, 3, 4$ sich ergebenden Gleichungen, so erhält man

$$\sum_{(i,k)} \alpha_{ik} \xi_i' \xi_k' + \xi_1 \sum_{(i)} \alpha'_{i1} \xi_i' + \dots + \xi_4 \sum_{(i)} \alpha'_{i4} \xi_i' = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (10)

$$(11) \quad \xi_1 \sum_{(i)} \alpha'_{i1} \xi_i' + \dots + \xi_4 \sum_{(i)} \alpha'_{i4} \xi_i' = 0.$$

Dem vorhergehenden Artikel zufolge kann man setzen

$$\xi_i \xi_k = A_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

woraus durch Derivieren

$$\xi_i \xi_k' + \xi_k \xi_i' = A'_{ik}.$$

Dadurch erhält man

$$\sum_{(i,k)} \alpha'_{ik} A'_{ik} = \sum_{(i,k)} \xi_i \alpha'_{ik} \xi_k' + \sum_{(i,k)} \xi_k \alpha'_{ik} \xi_i',$$

das ist

$$\sum_{(i,k)} \alpha'_{ik} A'_{ik} = \sum_{(i)} \left(\xi_i \sum_{(k)} \alpha'_{ik} \xi_k' \right) + \sum_{(k)} \left(\xi_k \sum_{(i)} \alpha'_{ik} \xi_i' \right).$$

Da nach (11) jede der zwei Summen rechts gleich Null ist, so hat man

$$(12) \quad \sum_{(i,k)} \alpha'_{ik} A'_{ik} = 0.$$

Deriviert man die Gleichung (8) nach t , so erhält man

$$\sum_{(i,k)} \alpha'_{ik} A'_{ik} + \sum_{(i,k)} \alpha''_{ik} A_{ik} = 0,$$

wenn mit α''_{ik} die zweite Derivirte von α_{ik} nach t bezeichnet wird; mit Rücksicht auf (12) schließt man also, dass

$$(13) \quad \sum_{(i,k)} \alpha''_{ik} A_{ik} = 0.$$

Schreibt man nun

$$\varphi(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda^3 + C\lambda^4,$$

so folgt leicht durch Ausrechnung, dass

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = \sum_{(i,k)} \alpha''_{ik} A_{ik} + 2A$$

ist, woraus man mit Rücksicht auf $\frac{d^2 A}{dt^2} = 0$ und auf (13) erschließt

$$A = 0,$$

d. h. in dem betrachteten Falle ist $\lambda = 0$ eine dreifache Wurzel der Gleichung (4), so dass es also auf der den Nachbarkegelschnitten umschriebenen developpablen Fläche außer Σ nur noch einen Kegelschnitt gibt. Der specielle Fall einer vierfachen Wurzel $\lambda = 0$ kann nur dann eintreten, wenn die developpable Fläche in eine Fläche dritter Classe und ein Ebenenbüschel zerfällt; dies, sowie auch das im Art. 5 gegebene Resultat hat der Verfasser in der Note „Sur l'arrangement des plans tangents de certaines surfaces“, Mém. de la Soc. des sc. physiques et naturelles de Bordeaux, t. III, 1878, analytisch abgeleitet, worauf hier nur verwiesen werden mag.

54. In diesem Artikel möge der im Art. 9 gewonnene Satz von neuem erwiesen werden, dass ein von zwei unendlich nahen Kegelschnitten Σ und Σ_1 begrenzter Flächenstreifen bestimmt ist, sobald Σ nebst sieben Berührungsebenen des Streifens gegeben ist.

Der Kegelschnitt Σ sei wie im Art. 51 durch die Gleichung

$$\sum_{(i,k)} \alpha_{ik} \xi_i \xi_k = 0 \text{ oder } A = 0$$

gegeben, deren Discriminante natürlich verschwindet

$$\mathcal{A} = \sum \pm (\alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33} \alpha_{44}) = 0.$$

Ein Nachbarkegelschnitt Σ_1 bestimmt mit Σ eine entwickelbare Fläche vierter Classe, die nämlich beiden Linien umschrieben ist; von dieser ist nachzuweisen, dass sie durch sieben ihrer Berührungsebenen bestimmt ist.

Es sei

$$\sum_{(i,k)} \beta_{ik} \xi_i \xi_k = 0 \quad \text{oder} \quad B = 0$$

irgend eine der betrachteten entwickelbaren Fläche eingeschriebene Fläche zweiter Classe, so muss sie die gegebenen sieben Berührungsebenen $\xi^{(h)}$ berühren, wodurch sich für die β die sieben homogenen und linearen Gleichungen ergeben

$$(14) \quad \sum_{(i,k)} \beta_{ik} \xi_i^{(h)} \xi_k^{(h)} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, 7).$$

Da die entwickelbare Fläche zwei unendlich nahen Kegelschnitten Σ und Σ_1 umschrieben sein soll, muss $\lambda = 0$ eine doppelte Wurzel der Gleichung

$$|\alpha_{ik} + \lambda \beta_{ik}| = 0$$

sein, wenn die linke Seite dieser Gleichung die Discriminante von $\mathcal{A} + \lambda B$ bezeichnet; es muss also die nach λ gewonnene Derivierte der Discriminante verschwinden, und dies erfordert die Gleichung

$$\sum_{(i,k)} A_{ik} \beta_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, \dots, 4)$$

mit A_{ik} den zum Elemente α_{ik} gehörigen Minor von $\mathcal{A}$ bezeichnet. Bezeichnet man mit $\xi^{(8)}$ die Coordinaten der Ebene ϱ des Kegelschnittes Σ , so kann man nach Art. 53 setzen

$$A_{ik} = \xi_i^{(8)} \xi_k^{(8)},$$

so dass die letzte Gleichung lautet

$$(15) \quad \sum_{(i,k)} \beta_{ik} \xi_i^{(8)} \xi_k^{(8)} = 0,$$

analog den Relationen (14).

Die für die zehn Größen β aufgestellten acht linearen und homogenen Gleichungen (14) und (15) sind, wie gleich gezeigt werden soll, im allgemeinen unabhängig und haben demnach zwei unabhängige Lösungen.* Die Werte $\beta_{ik} = \alpha_{ik}$ bilden offenbar eine Lösung, denn sie genügen sowohl (14) als auch (15), da

$$\sum_{(i,k)} \alpha_{ik} A_{ik} = 4A = 0.$$

Ist somit $\beta_{ik} = \alpha'_{ik}$ eine andere von α_{ik} linear unabhängige Lösung der Gleichungen (14) und (15), so ist

$$\beta_{ik} = \mu \alpha_{ik} + \mu' \alpha'_{ik}$$

ihre allgemeine Lösung, mit μ und μ' zwei beliebige Größen bezeichnet.

Jede Berührungsebene der verlangten entwickelbaren Fläche genügt somit den Gleichungen

$$A = 0, \quad \mu \alpha + \mu' \sum_{(i,k)} \alpha'_{ik} \xi_i \xi_k = 0,$$

d. i. den Gleichungen

$$A = 0, \quad \sum_{(i,k)} \alpha'_{ik} \xi_i \xi_k = 0.$$

Die Gesamtheit dieser Tangentialebenen, d. i. der infinitesimale Streifen ($\Sigma \Sigma_1$) ist somit in der That durch die sieben gegebenen Berührungsebenen bestimmt.

Es erübrigt, darzuthun, dass die acht Gleichungen (14), (15) im allgemeinen linear unabhängig sind. Im entgegengesetzten Falle würden die acht Ebenen $\xi^{(3)}$, ($s = 1, 2, \dots, 8$) acht gemeinsame Tangentialebenen dreier Flächen zweiter Classe sein, die nicht einer Developpablen vierter Classe eingeschrieben sind; dies ist aber darum nicht möglich, da jene acht Ebenen von der zu einem Kegelschnitt degenerierten Fläche $A = 0$ berührt werden und die Ebene ϱ somit mehr als eine gemeinsame Berührungsebene der besagten drei Flächen repräsentiert. Dies gestaltet sich anschaulicher bei der reciproken Figur, in welcher ein Kegel zweiten Grades und auf ihm sieben Punkte gegeben sind; diese Punkte und der Kegelscheitel können nicht als die acht gemeinsamen Punkte dreier Flächen zweiten Grades, die nicht eine Linie gemein haben, auftreten, denn diese Flächen

*) Vergl. etwa „Monatshefte f. M. u. Ph.“, Jahrg. I, „Zur Theorie der bilinearen Formen“, Art. 10.

würden ein lineares Flächensystem festlegen, in das der Kegel gehören müsste, und der Scheitel desselben würde mehr als einen gemeinsamen Punkt aller Flächen des Systems repräsentieren.

55. Wir wollen zum Schlusse einen infinitesimalen Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$) unter Benützung gewöhnlicher Punktkoordinaten festlegen und diese Darstellung zur Untersuchung des im Art. 50 angeführten Falles verwenden, in welchem es keine Leitlinien gibt.

Es seien x, y, z gewöhnliche Parallelkoordinaten, zwischen diesen sei eine lineare und eine quadratische Gleichung gegeben, und die Coefficienten in diesen Gleichungen seien gegebene Functionen einer Veränderlichen t , so stellen beide Gleichungen einen Kegelschnitt dar, dessen geometrischer Ort die Fläche Π sein mag. Es seien Σ und Σ_1 zwei Nachbarkegelschnitte von Π , entsprechend den Werten t und $t + \delta t$, und ϱ und ϱ_1 seien ihre Ebenen. Man wähle die Ebene ϱ zur xy -Ebene eines neuen Parallelkoordinatensystems x, y, z die Gerade $\varrho \varrho_1$ zur x -Achse. Es sei nun

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

oder

$$\varphi(xy) = 0$$

die Gleichung der Linie Σ in der xy -Ebene. Die Nachbarlinie Σ_1 liege in der Ebene

$$z = y \delta \varepsilon,$$

wo $\delta \varepsilon = \varepsilon \delta t$, also $\lim. \delta \varepsilon = 0$ ist, und die Parallelprojection von Σ_1 auf die xy -Ebene möge die Gleichung haben

$$(a_{11} + \delta a_{11})x^2 + 2(a_{12} + \delta a_{12})xy + \dots + a_{33} + \delta a_{33} = 0,$$

oder kürzer

$$\varphi(x, y) + \delta \varphi(x, y) = 0.$$

Die Werte δa_{ik} sind Differentiale von bekannten Functionen von t , also

das ist

$$\delta a_{ik} = \varrho_{ik} \delta \varepsilon,$$

$$\delta \varphi(x, y) = (\varrho_{11}x^2 + 2\varrho_{12}xy + \varrho_{22}y^2 + 2\varrho_{13}x + 2\varrho_{23}y + \varrho_{33})\delta \varepsilon,$$

mit ϱ_{ik} sechs bekannte Constanten bezeichnet.

Ist $x, y, 0$ ein beliebiger Punkt von Σ und $x + \delta x, y + \delta y, \delta z$ ein Nachbarpunkt auf Σ_1 , so gelten die Gleichungen

$$\delta z = (y + \delta y)\delta \varepsilon,$$

$$\varphi(x + \delta x, y + \delta y) + \delta \varphi(x + \delta x, y + \delta y) = 0,$$

welche, wenn man die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ berücksichtigt und nur die unendlich kleinen Größen von der Ordnung der Größe $\delta \varepsilon$ in Betracht zieht, geschrieben werden können

$$\delta z = y \delta \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \delta \varphi(x, y) = 0.$$

Macht man der Kürze wegen

$$\lambda = \varrho_{11} x^2 + 2 \varrho_{12} x y + \varrho_{22} y^2 + 2 \varrho_{13} x + 2 \varrho_{23} y + \varrho_{33},$$

so kann die letzte Gleichung geschrieben werden

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \lambda \frac{\delta z}{y} = 0.$$

Aus ihr ersieht man, dass der Nachbarpunkt $x + \delta x$, $y + \delta y$, δz in der Ebene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} (X - x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} (Y - y) + \frac{\lambda}{y} Z = 0$$

liegt, mit X, Y, Z die laufenden Coordinaten bezeichnet. Es ist demnach

$$(16) \quad y \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} (X - x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} (Y - y) \right] + \lambda Z = 0$$

die Gleichung der Berührungsebene des infinitesimalen Flächenstreifens ($\Sigma \Sigma_1$) im Punkte $x, y, 0$.

56. Betrachten wir nun speciell den Fall, dass Σ die Gerade $\varrho \varrho_1$ berührt. Man kann, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, Σ als Kreislinie voraussetzen und somit schreiben

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 2a y = 0.$$

Die Gleichung (16) lautet dann

$$(17) \quad \lambda Z + 2y [x X + (y - a) Y] - 2a y^2 = 0.$$

Die Schnittpunkte des Kegelschnittes Σ_1 mit der Geraden $\varrho \varrho_1$, d. i. mit der x -Achse haben zu Abscissen die Wurzeln der Gleichung

$$(1 + \delta a_{11}) x^2 + 2 \delta a_{12} x + \delta a_{33} = 0.$$

Der Coordinatenanfang ist der Berührungspunkt P der Linie Σ mit der Geraden $\overline{q} q_1$. Ist $\delta a_{33} \geq 0$, d. h. ist $q_{33} \geq 0$, so schneidet die Gerade $\overline{q} q_1$ den Kegelschnitt Σ_1 in zwei von P verschiedenen Punkten; ist $\delta a_{33} = 0$, $\delta a_{13} \geq 0$, d. h. ist $q_{33} = 0$, $q_{13} \geq 0$, so fällt einer dieser Schnittpunkte in den Punkt P , der andere ist durch die Gleichung

$$(1 + \delta a_{11})x + 2\delta a_{13} = 0$$

bestimmt; ist endlich $\delta a_{33} = \delta a_{13} = 0$, d. h. ist $q_{33} = q_{13} = 0$, so berührt die Gerade $\overline{q} q_1$ den Kegelschnitt Σ_1 im Punkte P .

Die Linie Σ_1 berührt überhaupt die Gerade $\overline{q} q_1$, falls die Gleichung gilt

$$(1 + \delta a_{11})\delta a_{33} - \delta a_{13}^2 = 0,$$

d. h. wenn die unendlich kleinen Größen höherer Ordnung ausgelassen werden, falls $\delta a_{33} = 0$ ist; es führt somit die Annahme, dass ein Schnittpunkt von Σ_1 mit $\overline{q} q_1$ in den Punkt P fällt, zu denselben Ergebnissen, wie die Annahme, dass Σ_1 die Gerade $\overline{q} q_1$ berührt, freilich in einem Nachbarpunkte zu P .

Die Fläche, welche alle Berührungsebenen (17) des gegebenen Flächenstreifens einhüllt, ist im Falle $q_{33} \geq 0$ von der vierten Classe; ist nämlich X, Y, Z ein beliebig gegebener Punkt, so ergeben sich die Berührungspunkte x, y der durch ihn gehenden Berührungsebenen des Streifens durch Auflösung der Gleichungen $\varphi(x, y) = 0$ und (17), und diese lassen vier von X, Y, Z abhängende Lösungen zu. Ist aber $q_{33} = 0$, so ist $x = 0, y = 0$ eine Lösung, was für Werte auch X, Y, Z sein mögen, und die erwähnte Einhüllende ist von der dritten Classe. Ist endlich $q_{33} = 0, q_{13} = 0$, so stellt die Gleichung (17), X, Y, Z als Constanten gedacht, einen in P die x -Achse berührenden Kegelschnitt vor, so dass sich nun bloß zwei von X, Y, Z abhängende Lösungen von (17) und $\varphi = 0$ ergeben; der infinitesimale Streifen ($\Sigma \Sigma_1$) ist in diesem Falle von der zweiten Classe.

Wir gehen nun an die Bestimmung der Leitgeraden des Streifens ($\Sigma \Sigma_1$), wobei wir den zuletzt betrachteten Fall eines Streifens zweiter Classe nicht in Betracht ziehen, so dass nur die zwei Annahmen $q_{33} \geq 0$ und $q_{33} = 0, q_{13} \geq 0$ erübrigen, die einen Streifen vierter, resp. dritter Classe charakterisieren. Im ersteren Falle müssten die Leitgeraden d_i, d_j die Gerade $\overline{q} q_1$ schneiden, im letzteren kann dies der Fall sein oder auch nicht (Art. 39). Es mögen in beiden Fällen jene Leitgeraden d_i, d_j

gesucht werden, welche $\overline{q} q_1$, d. h. die x -Achse treffen, und es seien

$$(18) \quad X + p Y + q = 0,$$

$$Z + r Y = 0$$

die Gleichungen von d_i , und

$$(19) \quad X + p' Y + q' = 0,$$

$$Z + r' Y = 0$$

jene von d_j .

Es sei A ein beliebiger Punkt $x, y, 0$ von Σ ; die Gleichungen der Ebenen $(A d_i), (A d_j)$ sind

$$(20) \quad r y (X + p Y + q) - (x + p y + q) (Z + r Y) = 0,$$

$$(21) \quad r' y (X + p' Y + q') - (x + p' y + q') (Z + r' Y) = 0,$$

und die durch sie bestimmte Gerade soll nach Annahme in der Berührungsebene (17) liegen, d. h. die drei Ebenen (17), (20), (21) sollen durch eine Gerade gehen. Da alle drei durch den Punkt A gehen, so genügt es auszudrücken, dass ihre Schnittlinien mit der Ebene $Y=0$ durch einen Punkt gehen; dies besagt aber die Gleichung

$$\begin{vmatrix} r, & x + p y + q, & q r \\ r', & x + p' y + q', & q' r' \\ 2 x, & -\lambda, & -2 a y \end{vmatrix} = 0,$$

die für jeden Punkt x, y erfüllt sein soll, der der Gleichung $q(x, y) = 0$ genügt. Ausgeschrieben lautet diese Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned} & 2 (q' r' - q r) x^2 + 2 [r' (a + p q') - r (a + p' q)] x y + \\ (22) \quad & + 2 a (p r' - p' r) y^2 + 2 q q' (r' - r) x + 2 a (q r' - \\ & - q' r) y + r r' (q' - q) \lambda = 0, \end{aligned}$$

und λ bedeutet hierin den quadratischen Ausdruck

$$q_{11} x^2 + 2 q_{12} x y + q_{22} y^2 + 2 q_{13} x + 2 q_{23} y + q_{33}.$$

Es muss somit die linke Seite von (22) mit $h \varphi(x, y)$, d. i. mit

$$h(x^2 + y^2 - 2ay)$$

identisch sein, mit h eine passend gewählte Constante bezeichnet. Dies gibt die folgenden sechs aus der Gleichheit der Coefficienten von $xy, x, 1, x^2, y^2, y$ fließenden Bedingungen

$$(23) \quad r'(a + p q') - r(a + p' q) + r r'(q' - q) \varrho_{12} = 0,$$

$$(24) \quad q q'(r' - r) + r r'(q' - q) \varrho_{13} = 0,$$

$$(25) \quad r r'(q' - q) \varrho_{33} = 0,$$

$$(26) \quad 2(q' r' - q r) + r r'(q' - q) \varrho_{11} = h,$$

$$(27) \quad 2a(p r' - p' r) + r r'(q' - q) \varrho_{22} = h,$$

$$(28) \quad a(q r' - q' r) + r r'(q' - q) \varrho_{23} = -a h.$$

Von den Leitgeraden setzen wir natürlich voraus, dass sie nicht in einer Ebene liegen, d. h. dass die Ungleichheiten gelten

$$q \geq q', \quad r \geq r',$$

ferner, dass keine von ihnen in die Ebene von Σ fällt, dass also

$$r \geq 0, \quad r' \geq 0.$$

Auf Grund dieser Ungleichheiten schließen wir aus (25), dass $\varrho_{33} = 0$ sein müsste; ist also $\varrho_{33} \geq 0$, d. h. ist der infinitesimale Flächenstreifen ($\Sigma \Sigma_1$), bei welchem Σ die Gerade $q \varrho_1$ berührt, von der vierten Classe, so besitzt er keine Leitgeraden, ein Ergebnis, das schon im Art. 50 abgeleitet wurde.

Es mag also der Flächenstreifen als von der dritten Classe vorausgesetzt werden, d. h. es sei $\varrho_{33} = 0$, $\varrho_{13} \geq 0$, so handelt es sich um die Bestimmung der Größen p, q, r, p', q', r', h den Gleichungen (23), (24), (26), (27), (28) gemäß. Vor allem ersieht man, dass der Wert $q = 0$ keiner Lösung angehören kann; denn dann würde die Gleichung (24) erfordern, dass

$$q' r r' \varrho_{13} = 0$$

sei, was unmöglich ist, da $q' \geq q$ von Null verschieden ist, und dasselbe von r, r', ϱ_{13} gilt. Ähnlich ergibt sich, dass auch q' von Null verschieden sein muss, also

$$q \geq 0, \quad q' \geq 0.$$

Nun sieht man leicht ein, dass, wie im Art. 50 gezeigt wurde, die Spuren der Leitgeraden d_i, d_j auf der x -Achse beliebig

gewählt werden können, freilich außerhalb des Punktes P , d. h. dass die Werte q, q' von Null verschieden beliebig gewählt werden können, und dass dann durch passende Wahl von p, r, p', r', h den obigen fünf Gleichungen genügt werden kann.

Hierzu dividire man die Gleichungen (24), (26), (27), (28) durch das nicht verschwindende Product $r r'$ und setze $\frac{h}{r r'} = k$, so hat man die vier äquivalenten Gleichungen

$$(24') \quad q q' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) + (q' - q) q_{13} = 0,$$

$$(26') \quad 2 \left(\frac{q'}{r} - \frac{q}{r'} \right) + (q' - q) q_{11} = k,$$

$$(27') \quad 2 a \left(\frac{p}{r} - \frac{p'}{r'} \right) + (q' - q) q_{23} = k,$$

$$(28') \quad a \left(\frac{q}{r} - \frac{q'}{r'} \right) + (q' - q) q_{23} = - a k.$$

Die Gleichungen (24'), (26'), (28') enthalten die drei Unbekannten $\frac{1}{r}, \frac{1}{r'}, k$ und linear; sie lassen eine einzige Lösung zu, da die Determinante der Coefficienten der Unbekannten den von Null verschiedenen Wert $2 q q' (q' - q)$ hat.

Die Unbekannten p, p' ergeben sich hiernach aus den Gleichungen (23), (27'), die wiederum linear sind und die von Null verschiedene Determinante $2 a (q - q')$ haben.

Hierdurch sind die einschlägigen, im Art. 50 gewonnenen Resultate aufs neue bestätigt.