FORZE D'ATTRITO ED EQUAZIONI DEL MOVIMENTO NEI SISTEMI LIBERI.

Nota di E. DANIELE.

La considerazione esplicita dei vincoli è condizione essenziale perchè sussista la definizione di forza d'attrito quale fu data dal sig. Painlevé e da me estesa a sistemi materiali qualunque ¹⁾. Ricorderò difatti che le forze d'attrito sono definite, nel caso più generale, da queste due proprietà: 1° il loro lavoro virtuale è uguale a quello delle resistenze complessive, — 2° le formole

$$(1) \quad \delta x_i = \delta t \sum_j e_{ij} p_j$$

debbono fornire le componenti d'uno spostamento virtuale, essendo $x_1, \dots, x_n$ le coordinate (di specie qualunque) del sistema, p_j la forza d'attrito relativa alla coordinata x_j , ed e_{ij} il complemento algebrico del coefficiente E_{ij} della forza viva nel determinante di questi coefficienti, diviso per il determinante medesimo. È appunto da queste due proprietà che si dedusse l'espressione analitica delle p come forme lineari di certi parametri μ in numero eguale al grado di libertà del sistema ²⁾: a base di quella deduzione stavano le equazioni dei vincoli o, se si vuole, le equazioni nelle δx_i che definiscono uno spostamento virtuale.

Supponiamo ora che sia dato un sistema olonomo, che chiameremo (X), a N coordinate $X_1 \dots X_N$ e che mediante le equazioni dei vincoli si siano espresse le X in funzione di n ($< N$) parametri indipendenti $x_1 \dots x_n$; consideriamo allora il sistema (x) che risulta definito da queste n coordinate. In tali condizioni, se non vi ha più luogo a discorrere di resistenze vincolari, rimangono però sempre le resistenze dovute all'attrito, e dovrà essere possibile prenderle in considerazione.

1) Painlevé; *Leçons sur l'intégr. des éq. de la méc.*, 5^{me} leçon; *Leçons sur le frott.*; Paris, Hermann, 1895; Daniele: *Sulla teoria mecc. dell'attrito*; N. Cim. 1904.

2) Form. (9) della mia Nota citata.

Ora, delle loro due proprietà fondamentali enunciate la prima cessa d'averne un significato, per la mancanza delle resistenze vincolari; la seconda, a sua volta, non aggiunge nulla di nuovo, per essere le δx_i arbitrarie. L'esprimere le ρ_i mediante forme lineari delle μ , che rappresentava la riduzione di un sistema di elementi incogniti ad un altro contenente un numero minore di elementi, non ha quindi più, in un sistema materiale non soggetto a legami, che un'importanza formale.

L'aspetto però che si può dare alle forze d'attrito, ed in conseguenza alle equazioni del movimento, è abbastanza notevole perchè sia forse non inutile il considerare brevemente l'accennato caso meccanico; il quale, inoltre, diversifica essenzialmente, per ciò che riguarda le espressioni definitive delle forze d'attrito da introdursi nelle equazioni, dai casi in cui compaiono esplicitamente i vincoli, come verrà mostrato in fine.

1. L'espressione delle forze d'attrito, quale è data nella mia Nota citata, cioè

$$(2) \quad \rho_i = \sum_j \sum_s E_{ij} b_{js} \mu_s,$$

continua ad essere applicabile al caso di un sistema materiale ad n coordinate indipendenti. Se difatti $x, \dots, x_n$ sono le coordinate del sistema, si potranno assumere esse stesse come parametri q , ponendo

$$x_1 = q_1, \dots, x_n = q_n;$$

ed allora

$$b_{js} = \begin{cases} 1 & (j = s) \\ 0 & (j \text{ diverso da } s) \end{cases}$$

La (2) si riduce quindi a

$$(3) \quad \rho_i = \sum_j E_{ij} \mu_j.$$

Con questo non si è però fatto, nella rappresentazione parametrica delle ρ , un passo più in là, poichè colle (3) non

si fa altro che operare sulle ρ una sostituzione lineare invertibile; dalle (3) si ricaverebbe

$$(3') \quad \mu_j = \sum_i E_{ij} \rho_i.$$

In realtà, siccome nelle (1) le δx_i sono affatto arbitrarie, tutte le volte che si sia eseguita sulle ρ una sostituzione lineare invertibile si potrà sempre dire che si sono rappresentate parametricamente le ρ . Del resto, l'equivalenza perfetta, anche dal lato meccanico, delle ρ e delle μ , risulta dall'osservare che il lavoro virtuale delle forze d'attrito si può scrivere, in virtù delle (3), sotto la forma

$$\sum \rho_i \delta x_i = \sum \mu_i \varepsilon_i,$$

essendo $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ delle quantità infinitesime legate alle δx_i dalle relazioni

$$(4) \quad \delta x_i = \sum_j c_{ij} \varepsilon_j,$$

cioè costituiscono un sistema speciale di caratteristiche di uno spostamento virtuale del sistema materiale dato: le ρ e le μ non sono dunque altro che le forze d'attrito relative a due diverse specie di caratteristiche. Il rappresentare analiticamente le forze d'attrito colla formola (3) fa sì che il caso in discorso, di un sistema libero, rientri in quello generale di un sistema con vincoli qualunque.

2. La rappresentazione accennata non solo è opportuna analiticamente, ma in certo modo s'impone, se noi pensiamo il sistema non soggetto a legami dedotto da un altro con un numero maggiore di coordinate, ma collo stesso grado di libertà. Consideriamo, come si fece in principio, un sistema (X) a N coordinate $X_1 \dots X_N$ legate da m equazioni finite contenenti, se si vuole, anche il tempo, e nella sua forza viva sia

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j F_{ij} X'_i X'_j$$

la parte omogenea di 2° grado nelle X' ; siano ancora $x_1 \dots x_n$ i parametri indipendenti mediante i quali si esprimono le X in virtù delle equazioni dei vincoli, e che noi assumiamo come

coordinate del sistema che fu chiamato (x) . Indicando con $\mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_N$ le forze d'attrito, si ha, applicando la (2), ove si dovrà scrivere $b_{js} = \frac{\partial X_j}{\partial x_s}$:

$$(5) \quad \mathbf{P}_i = \sum_j \sum_s F_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial x_s} \mu_s ,$$

ed il lavoro virtuale di queste forze è dato da

$$\delta L = \sum \mathbf{P}_i \delta X_i .$$

Ma dalle relazioni

$$(6) \quad X_i = X_i(x_1 \dots x_n t)$$

ricaviamo le altre

$$\delta X_i = \sum_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h} \delta x_h ,$$

che ci esprimono le componenti di uno spostamento virtuale di (X) in un dato istante mediante le componenti di uno spostamento virtuale di (x) nell'istante medesimo. Sostituendo in δL si ha :

$$\delta L = \sum_h \delta x_h \sum_i \mathbf{P}_i \frac{\partial X_i}{\partial x_h} ;$$

ponendo

$$(7) \quad \sigma_h = \sum_i \mathbf{P}_i \frac{\partial X_i}{\partial x_h} ,$$

σ_h è nient'altro che la forza d'attrito relativa alla coordinata x_h nel sistema ridotto (x) . Le (5) ci permettono di esprimere le σ_h mediante le μ ; si ha difatti, sostituendo nella (7) :

$$(8) \quad \sigma_h = \sum_s E_{hs} \mu_s ,$$

essendo

$$(9) \quad E_{hs} = \sum_i \sum_j F_{ij} \frac{\partial X_i}{\partial x_h} \frac{\partial X_j}{\partial x_s} .$$

Vogliamo ora calcolare le forze d'attrito di (x) secondo la formola (3). La forza viva τ di (x) si ottiene ricavando dalla (6)

$$X'_i = \frac{\partial X_i}{\partial t} + \sum_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h} x'_h$$

e sostituendo nella forza viva di (X) ; tenendo presente la (9), la parte di τ omogenea di 2° grado nelle x' è

$$\tau_2 = \frac{1}{2} \sum_h \sum_k E_{hk} x'_h x'_k.$$

Allora le forze d'attrito ρ_h sono date da

$$\rho_h = \sum_k E_{hk} \mu_k,$$

e quindi sono le stesse σ_h delle (8). Così, l'esprimere le forze d'attrito di un sistema libero mediante le (3) equivale a considerare il sistema come dedotto da un altro vincolato, coll'eliminazione dei legami.

3. Un esempio semplicissimo di sistema non vincolato, soggetto all'azione dell'attrito, si ha in un punto mobile su una superficie scabra, quando i punti della superficie, data colla sua equazione cartesiana $f(x y z) = 0$ (che rappresenta il vincolo), si riferiscano ad un sistema di coordinate curvilinee u, v . La forza viva del punto, supposto di massa uno, è data, nel sistema cartesiano, da

$$T = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

ed in corrispondenza si ottiene per le forze d'attrito

$$\rho_x = \frac{\partial x}{\partial u} \mu_1 + \frac{\partial x}{\partial v} \mu_2, \quad \rho_y = \frac{\partial y}{\partial u} \mu_1 + \frac{\partial y}{\partial v} \mu_2, \quad \rho_z = \frac{\partial z}{\partial u} \mu_1 + \frac{\partial z}{\partial v} \mu_2.$$

Il loro lavoro virtuale è

$$\begin{aligned} \delta L &= \rho_x \delta x + \rho_y \delta y + \rho_z \delta z \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \mu_1 + \frac{\partial x}{\partial v} \mu_2 \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \delta v \right) + \dots \\ &= (E \mu_1 + F \mu_2) \delta u + (F \mu_1 + G \mu_2) \delta v, \end{aligned}$$

essendo

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

il quadrato dell' elemento lineare della superficie nelle coordinate curvilinee $u v$. Pertanto le forze d' attrito relative a queste coordinate sono

$$(10) \quad \rho_u = E \mu_1 + F \mu_2, \quad \rho_v = F \mu_1 + G \mu_2.$$

Il sistema libero dedotto dal precedente coll' eliminazione del vincolo è quello in cui le coordinate sono u e v , e la forza viva è

$$\frac{1}{2} (E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2),$$

che è la T precedente ove si ponga

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v);$$

si vede subito che l' applicazione della (3) conduce, per le forze d' attrito, alle stesse ρ_u e ρ_v trovate ora. Ciò è conforme a quanto si disse in generale nel n. precedente.

Nell' esempio attuale è facile riconoscere la relazione geometrica che passa fra le ρ e le μ . Le $\rho_x \rho_y \rho_z$ rappresentano le proiezioni, sugli assi cartesiani, della forza d' attrito applicata al punto mobile; indicandone con $\sigma_u \sigma_v \sigma_w$ le proiezioni ortogonali sulle tangenti alle linee $u v$ e sulla normale w alla superficie, si trova:

$$(11) \quad \sigma_u = \frac{1}{\sqrt{E}} (E \mu_1 + F \mu_2), \quad \sigma_v = \frac{1}{\sqrt{G}} (F \mu_1 + G \mu_2), \quad \sigma_w = 0.$$

La $\sigma_w = 0$ dice che la forza d' attrito è tangente alla superficie; dalle due prime poi, confrontate colle (10), si ricava

$$(12) \quad \sigma_u = \frac{\rho_u}{\sqrt{E}}, \quad \sigma_v = \frac{\rho_v}{\sqrt{G}},$$

e queste dicono che ρ_u e ρ_v differiscono solo pei fattori $\sqrt{E}$ e $\sqrt{G}$ risp. dalle proiezioni ortogonali della forza d' attrito sulle tangenti alle linee coordinate. Calcoliamo ora le componenti oblique della medesima forza nelle medesime direzioni. Chia-

mando σ_u e σ_v queste componenti, e θ l'angolo ($< \pi$) delle linee uv , abbiamo, fra le componenti oblique e quelle ortogonali, le relazioni

$$\overline{\sigma_u} = \frac{\sigma_u - \sigma_v \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \overline{\sigma_v} = \frac{\sigma_v - \sigma_u \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

Si ha, come è noto,

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}};$$

di qui e dalle (11) otteniamo :

$$(12') \quad \overline{\sigma_u} = \mu_1 \sqrt{E}, \quad \overline{\sigma_v} = \mu_2 \sqrt{G}.$$

La relazione cercata fra le $\rho_u \rho_v$ e le $\mu_1 \mu_2$ è contenuta nelle due coppie di formole (12) e (12'). Mentre, cioè, ρ_u e ρ_v , *divise* risp. per $\sqrt{E}$ e $\sqrt{G}$, danno le proiezioni *ortogonali* della forza d'attrito sulle direzioni coordinate, μ_1 e μ_2 , *moltiplicate* per le stesse funzioni, ne danno le proiezioni *oblique* su quelle direzioni medesime.

4. Analogo all'esempio precedente è quello del movimento d'una sfera in contatto con un piano. Supposto che il piano sia fisso, assumiamolo come piano xy ; ammettiamo poi che la sfera sia omogenea, e diciamone M la massa, A il momento d'inerzia rispetto a un diametro qualunque, r il raggio. Le forze d'attrito si trovano calcolate nella mia Nota « L'attrito nel movimento di un solido in contatto con un piano » al n. 8¹⁾. Le coordinate ivi scelte per fissare la posizione della sfera nello spazio sono i tre angoli d'Eulero $\psi \phi \theta$ relativi ad una terna d'assi $\xi \eta \zeta$ fissi nella sfera e coll'origine nel suo centro, e le coordinate $\alpha \beta \gamma$ di quest'ultimo rispetto agli assi $x y z$ fissi nello spazio. Nell'ipotesi che alla sfera non s'imponga altro legame all'infuori del contatto col piano xy , le equazioni dei vincoli si riducono ad una sola, $\gamma = r$, e le sei

1) Nuovo Cimento, 1905, Marzo.

forze d' attrito si esprimono in funzione di cinque parametri μ colle formole

$$\begin{aligned}\rho_{\psi} &= A (\mu_1 + \mu_2 \cos \theta), & \rho_{\varphi} &= A (\mu_1 \cos \theta + \mu_2), & \rho_{\theta} &= A \mu_3, \\ \rho_{\alpha} &= M \mu_4, & \rho_{\beta} &= M \mu_5, & \rho_{\gamma} &= 0.\end{aligned}$$

Dal sistema vincolato a sei coordinate si passa immediatamente ad un sistema libero con una coordinata di meno, assumendo a coordinate indipendenti $\psi \varphi \theta \alpha \beta$. Per la forma speciale che ha il vincolo nel nostro caso, $\gamma = \text{cost.}$, le espressioni del lavoro virtuale e della forza viva del sistema libero si deducono da quelle del primo sopprimendo i termini contenenti risp. $\delta \gamma$ e γ' ; con ciò le forze d' attrito nel sistema libero risultano le stesse $\rho_{\psi} \rho_{\varphi} \rho_{\theta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta}$ quali sono date dalle formole che precedono.

Come nel primo esempio, possiamo vedere anche qui l' esatta equivalenza geometrica fra le ρ e le μ . Intanto μ_4 e μ_5 sono proporzionali a ρ_{α} e ρ_{β} , che sono le proiezioni, sugli assi x e y , dell' attrito di strisciamento, ed il fattore di proporzionalità è una costante; così pure μ_3 differisce solo per un fattore costante da ρ_{θ} , che è la proiezione ortogonale, sulla linea dei nodi N, dell' asse momento della coppia d' attrito. Dalle formole che danno ρ_{ψ} e ρ_{φ} ricaviamo poi :

$$A \mu_1 = \frac{\rho_{\psi} - \rho_{\varphi} \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad A \mu_2 = \frac{\rho_{\varphi} - \rho_{\psi} \cos \theta}{\sin^2 \theta};$$

ora ρ_{ψ} e ρ_{φ} sono le proiezioni ortogonali dell' asse momento della coppia d' attrito sull' asse z e sull' asse ζ' , mentre θ indica l' angolo compreso fra questi due assi : quindi i secondi membri delle ultime due formole rappresentano le proiezioni oblique, fatte parallelamente ai piani ζN e $z N$, del medesimo asse momento sulle medesime direzioni z e ζ . Mentre adunque, riferendo quell' asse momento alla terna $z \zeta N$, le $\rho_{\psi} \rho_{\varphi} \rho_{\theta}$ ci danno le sue proiezioni *ortogonali* sui tre assi, invece $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ ce ne danno (a meno del fattore costante A) le proiezioni *oblique*.

1) Per il significato geometrico di $\rho_{\psi} \rho_{\varphi} \rho_{\theta}$ cfr. ad es. Klein-Sommerfeld : Th. des Kreisels, p. 109.

5. Le relazioni fra le ρ e le μ sono contenute nelle formule (3), oppure nelle equivalenti (3'). Queste relazioni si possono mettere sotto un'altra forma, che permette di dare un aspetto caratteristico alle equazioni del movimento d'un sistema libero. Introduciamo due funzioni **P** e **M** col porre

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j E_{ij} \mu_i \mu_j, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \rho_i \rho_j;$$

P e **M** sono due forme quadratiche reciproche l'una dell'altra, che si ottengono dalla parte T_2 della forza viva e dalla sua forma reciproca sostituendo le μ alle coordinate della velocità e le ρ ai termini $\frac{\partial T_2}{\partial \dot{x}_i}$ nelle coordinate dell'impulso.

Facendo uso delle funzioni **P** e **M** le (3) e (3') si scrivono

$$(13) \quad \rho_i = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_i}, \quad (13') \quad \mu_j = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_j};$$

le equazioni di Lagrange

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = U_i + \rho_i$$

diventano allora, se supponiamo inoltre che esista la funzione potenziale U delle forze applicate U_i :

$$(14') \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_i}.$$

Se poi si introduce la funzione S di Appell ¹⁾

$$S = \frac{1}{2} \int_{\tau} k (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) d\tau,$$

dove $\xi \eta \zeta$ sono coordinate cartesiane di punto, τ è lo spazio occupato dai punti $\xi \eta \zeta$ e k la densità, si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial S}{\partial x_i},$$

¹ Les mouvements de roulement en dynamique, p. 45, (Scientia, 4°).

per cui le (14') diventano

$$(14'') \quad \frac{\partial S}{\partial x_i'} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial P}{\partial \mu_i}.$$

Le singole equazioni del movimento contengono dunque tre termini, che si formano prendendo le derivate di tre funzioni diverse rispetto a tre diverse serie di variabili; due poi di queste funzioni, cioè S e P , dipendono, oltre che dalle variabili rispetto a cui si derivano, anche dalle x e dalle x' .

In luogo della P si può far comparire la funzione M : basta moltiplicare la (14) per e_{ij} e sommare per tutti i valori di i ; con ciò si ha:

$$\sum_i e_{ij} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x_i'} - \frac{\partial T}{\partial x_i} - U_i \right) = \sum_i e_{ij} p_i = \mu_j = \frac{\partial M}{\partial p_j}.$$

Si noti che questa operazione, mediante la quale si risolvono le (14) rispetto alle μ , conduce pure alla loro risoluzione rispetto alle x' . Difatti abbiamo.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x_i'} = \sum_r E_{ri} x_r'' + \sum_r \sum_s \frac{\partial E_{si}}{\partial x_r} x_r' x_s' + P_i$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \frac{\partial E_{rs}}{\partial x_i} x_r' x_s' + Q_i,$$

ove P_i e Q_i sono polinomi di 1° grado nelle x' ; ne segue

$$\sum_i e_{ij} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x_i'} - \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = x_j'' + \sum_r \sum_s A_{rs}^{(j)} x_r' x_s' + \Xi_j,$$

essendo

$$A_{rs}^{(j)} = \sum_i e_{ij} \left(\frac{\partial E_{is}}{\partial x_r} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_{rs}}{\partial x_i} \right)$$

e Ξ_j avendo lo stesso significato di P_i e Q_i . Alle equazioni del movimento si può quindi dare la seguente forma, che mette anche meglio in luce l' analogia formale fra i termini $\frac{\partial S}{\partial x_i'}$ e $\frac{\partial P}{\partial \mu_i}$ della (14''):

$$(15) \quad x_j'' + 2 \sum_{r,s} \left\{ \begin{matrix} r & s \\ j \end{matrix} \right\} x_r' x_s' + \Xi_j = \sum_i e_{ij} U_i + \mu_j \\ = \sum_i e_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial M}{\partial p_j};$$

con $\left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ j \end{smallmatrix} \right\}$ si sono indicati i simboli di Christoffel di 2^a specie calcolati rispetto alla forma T_2 , e la somma del primo membro è estesa a tutte le combinazioni binarie dei valori $1 \dots n$ degli indici; il polinomio Ξ_j manca poi ogni volta che la forza viva T si riduce alla forma T_2 , cioè il sistema libero (x) si può far provenire da un sistema olonomo (X) i cui vincoli non dipendono dal tempo.

6. Accenneremo ancora alla forma che prendono le forze d'attrito quando a componenti della velocità si scelgano non già le x' , ma n caratteristiche $p_1 \dots p_n$ di specie qualunque. Se

$$(16) \quad x'_i = y_i + \sum_r x_{ir} p_r$$

sono le relazioni che passano fra le derivate delle coordinate e le caratteristiche p (dove le y_i e le x_{ir} sono funzioni delle x e di t), avremo un sistema di spostamenti virtuali al tempo t prendendo

$$(16') \quad \delta x_i = \sum_r x_{ir} \delta \omega_r,$$

indicando $\delta \omega_1 \dots \delta \omega_n$ delle quantità infinitesime indipendenti. La parte omogenea di 2^o grado della forza viva del sistema, espressa colle x' , sia

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j E_{ij} x'_i x'_j;$$

allora la forza d'attrito relativa alla coordinata x_i è data dalla (3), ed esprimendo, mediante le (16'), il lavoro virtuale delle p_i in funzione delle $\delta \omega$,

$$\sum p_i \delta x_i = \sum_h \delta \omega_h \sum_i \sum_j E_{ij} x_{ih} \mu_j,$$

troviamo che le forze d'attrito $\overline{\rho}$ relative alle caratteristiche p sono date da

$$(17) \quad \overline{\rho_h} = \sum_i \sum_j E_{ij} x_{ih} \mu_j.$$

Questa formola non va confusa colla (2) che contiene l'espressione generale delle forze d'attrito, come si vede os-

servando la diversa distribuzione degli indici nelle due formole.

In $\overline{\rho_h}$ si può introdurre, in luogo dei coefficienti E_{ij} di T_2 , quelli della forza viva calcolata in funzione delle caratteristiche p . Chiamando, in quest'ultima, $\overline{T}_2$ l'analogo di T_2 , abbiamo

$$\overline{T}_2 = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \overline{E}_{rs} p_r p_s, \quad \overline{E}_{rs} = \sum_i \sum_j E_{ij} x_{ir} x_{js}.$$

D'altra parte si ricava dalle (16):

$$p_r = \sum_i X_{ir} (x'_i - y_i),$$

essendo X_{ir} il complemento algebrico di x_{ir} nel determinante di questi coefficienti, diviso pel determinante stesso; sostituendo in $\overline{T}_2$, coll'osservare che la parte omogenea di 2° grado nelle x' che ne risulta deve coincidere con T_2 , si deduce:

$$E_{ij} = \sum_r \sum_s \overline{E}_{rs} X_{ir} X_{js}.$$

La forza d' attrito $\overline{\rho_h}$ diventa allora

$$(17) \quad \overline{\rho_h} = \sum_j \sum_s \overline{E}_{hj} X_{sj} \mu_s,$$

e se, accanto a questa, scriviamo la

$$(18) \quad \overline{\rho_h} = \sum_i x_i h_i \rho_i$$

che segue dalla (17) confrontata colla (3), si ha nelle formole (3), (17) [oppure (17')], (18) il sistema completo di relazioni che intercedono fra le forze d' attrito ρ relative alle coordinate x , le μ relative al sistema speciale di caratteristiche definito dalle (4), e le $\overline{\rho}$ relative ad un sistema di caratteristiche qualunque.

In corrispondenza ai tre sistemi di forze d' attrito abbiamo tre diverse forme per le equazioni del movimento: le (14) e (15) mettono in evidenza risp. le ρ e le μ , mentre le forze $\overline{\rho}$ son messe in vista nelle equazioni del Prof. Maggi ¹⁾

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{p}_s} = \sum_i \frac{dx_{is}}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_i} + \sum_i x_{is} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} + U_i \right) + \overline{p}_s,$$

1) Di alcune nuove forme delle equazioni della dinamica, applicabili ai sistemi anolonomi; Rend. Lincei, 1901.

dove T e $\bar{T}$ indicano la forza viva espressa mediante le x' o risp. mediante le p . Qualora nelle (16) manchino i termini y_i , ed i coefficienti x_{ir} non contengano esplicitamente il tempo (vale a dire, nel sistema vincolato da cui si può immaginare dedotto (x) i legami non dipendano dal tempo), si hanno come equazioni del moto quelle del Prof. Volterra, delle quali le precedenti del Maggi sono un'estensione:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_r \sum_k a_{sk}^{(r)} \frac{\partial T}{\partial p_r} p_k + \sum_i x_{is} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} + U_i \right) + \bar{p}_s^{-1}.$$

Qui T s'intende espressa dappertutto in funzione delle p , e si pone

$$a_{sk}^{(r)} = \sum_g e_{gr} (b_{sk}^{(g)} - b_{ks}^{(g)}), \quad b_{sk}^{(g)} = \sum_h x_{hk} \sum_i \sum_j E_{ij} \frac{\partial x_{is}}{\partial x_h} x_{jg}.$$

7. Da quanto s'è visto risulta che, limitandoci a discorrere in astratto di forze d'attrito, non vi ha alcuna differenza fra il caso di un sistema vincolato e quello di un sistema libero. La cosa va diversamente quando ci proponiamo di trovare per le forze d'attrito le espressioni definitive da introdursi nelle equazioni del movimento, in modo che queste diventino atte a determinarlo. Ricordiamo come si ottengono quelle espressioni in un sistema soggetto a legami. Accanto alle forze d'attrito vi sono le forze vincolari, le prime forme lineari dei parametri μ , le seconde dei parametri λ di Lagrange; fra le prime e le seconde intercedono delle relazioni, le quali traducono analiticamente le leggi sperimentali che regolano le azioni d'attrito nel sistema considerato. Risultano così delle equazioni fra le μ e le λ (nonchè le coordinate, le componenti della velocità e il tempo) sulla cui natura nulla si può dire in generale, ma che, in tutti i casi particolari studiati, sono in numero eguale alle μ e risolubili rispetto a

1) Sopra una classe di equazioni dinamiche, § 3; Atti Acc. Sc. Torino, 1898. Le equazioni stabilite dal Prof. Volterra corrispondono all'ipotesi che le x_i siano coordinate cartesiane; esse però conservano la stessa forma anche quando le x_i indicano coordinate qualunque, salvo che i coefficienti $a_{sk}^{(r)}$ hanno un'espressione alquanto più complicata.

queste. Supposto d'aver effettuata la risoluzione e di aver sostituito le μ nelle forze d'attrito, queste diventano funzioni delle λ , delle coordinate, delle componenti della velocità e del tempo; si eliminano, così, mediante le leggi sperimentali dell'attrito, i parametri μ , e quindi le funzioni incognite del problema tornano ad essere tante quante sono le equazioni da cui dipendono.

L'eliminazione completa delle μ non riesce più in un sistema libero, ove non si ha più traccia di forze vincolari, se non risalendo al sistema vincolato dal quale il primo fu dedotto coll'eliminazione dei vincoli. Per chiarire la cosa riferiamoci ai due esempi dei n.ⁱ 3 e 4.

Nel moto di un punto sopra una superficie l'esperienza dice che l'attrito si manifesta con una forza direttamente opposta alla velocità istantanea del punto e proporzionale, in grandezza, alla pressione del punto contro la superficie. Le due equazioni che esprimono analiticamente questa legge conteranno dunque, oltre alle due μ onde si compongono le forze d'attrito, anche la pressione λ esercitata dal punto; ricavando le μ in funzione di λ e sostituendo nelle forze d'attrito, si introdurrà, accanto alle coordinate del sistema, la nuova incognita λ . Se ora il punto mobile si considera rappresentato dalle sue coordinate cartesiane legate dall'equazione della superficie (equazione del vincolo), abbiamo, per la determinazione delle tre coordinate e di λ , quattro equazioni; invece nel sistema libero, che corrisponde a rappresentare il punto colle sue coordinate curvilinee u, v , abbiamo due sole equazioni per il calcolo di u, v e λ , per cui non basterà la considerazione pura e semplice del sistema libero per determinarle.

Analogamente, nel moto di una sfera in contatto con un piano le leggi sperimentali dell'attrito danno luogo a cinque equazioni nelle μ e nella pressione totale della sfera in contatto col piano: questa pressione viene introdotta nelle equazioni del moto coll'eliminarne le μ , e figurerà come una nuova incognita del problema oltre alle coordinate. Nel sistema vincolato in cui la sfera è rappresentata dalle sei coordinate $\alpha \beta \gamma \psi \phi \theta$ abbiamo, per il calcolo di queste e della pres-

sione, sette equazioni, mentre ne abbiamo solo cinque nel sistema libero nel quale insieme colla pressione si hanno da calcolare le cinque coordinate $\alpha \beta \psi \phi \theta$.

In generale possiamo dire che le leggi sperimentali dell'attrito, essendo le stesse per il sistema vincolato (X) e per il sistema libero (x), introducono, nelle forze d'attrito del secondo, degli elementi incogniti che si compongono mediante le forze vincolari del primo, e che le equazioni del moto di (x), eguali in numero alle coordinate, non bastano a determinare. Per giungere a questo occorre risalire al sistema (X). Noi sappiamo ¹⁾ che le corrispondenti equazioni differenziali, insieme colle equazioni dei vincoli, permettono di calcolare le forze vincolari, ossia le λ , in funzione esclusivamente delle coordinate X, delle velocità X' e del tempo, senza che intervengano affatto le forze d'attrito. Sostituendo alle X e X' le loro espressioni in funzione delle x e x' , le $\lambda(x, x', t)$ si potranno allora introdurre nelle forze d'attrito del sistema (x), nel quale, così, figureranno come uniche incognite le coordinate x .

Il procedimento col quale si sono eliminate, dalle equazioni differenziali di (x), le azioni vincolari non contiene' alcun circolo vizioso, come si potrebbe pensare osservando che, ridotto una prima volta il sistema (X) al sistema (x) si ritorna al primo per eliminare nel secondo le λ . Confrontando difatti (X) con (x) dopo che se ne sono eliminate, coi calcoli accennati, le λ , si trova che le equazioni del primo sistema sono in numero di $N + m$, se N è il numero delle coordinate X e m quello delle equazioni dei vincoli, mentre nel secondo le equazioni si riducono a $N - m$ fra le coordinate x . Siccome poi (X) e (x) non sono altro, in fondo, che due diverse rappresentazioni di uno stesso sistema materiale, così quei calcoli, che non importano nessuna integrazione, raggiungono l'effetto di semplificare il sistema di equazioni differenziali da cui dipende il suo moto.

1) V. la mia Nota "Sulla teoria mecc. dell'attrito", n. 4.