SOPRA LA COSTRUZIONE DEI RIFLETTORI.

di UMBERTO CISOTTI.

È noto che se si colpisce una superficie speculare parabolica con un fascio di raggi uscenti dal foco, i corrispondenti raggi riflessi risultano tutti paralleli all'asse.

Ciò accade rigorosamente se si tratta di una superficie geometrica e con molta approssimazione per un riflettore metallico.

Il fenomeno è un po' più complesso quando si tratta di riflettori nei quali la superficie speculare è protetta da una lastra di vetro. Poichè mentre nel primo caso non c'è da tener conto che del semplice fenomeno della riflessione, nel secondo interviene anche la rifrazione dei raggi attraverso il vetro.

Ecco come qualitativamente possiamo renderci conto del fenomeno. Un raggio incidente incontra la superficie σ , che separa il vetro dall'aria, penetra attraverso il vetro, accostandosi alla normale, indi batte contro la superficie speculare τ , si riflette e, ripassando attraverso σ dal vetro all'aria, si rifrange nuovamente allontanandosi dalla normale alla superficie.

In queste condizioni un riflettore parabolico ed a faccie (σ e τ) parallele fra loro, non è più atto a trasformare un fascio di raggi uscenti da un punto in un fascio di raggi paralleli.

Di ciò si sono ben reso conto i costruttori.

Per tentativi si è riesciti ad ottenere una speciale forma di riflettore a faccie parallele, che risponde molto bene ai voluti requisiti ¹⁾.

1) Le officine Galileo di Firenze posseggono degli stampi in acciaio che servono ottimamente allo scopo. Devo questa ed altre indicazioni ancora alle cortesi comunicazioni del ch. prof. Lori, cui porgo i miei sentiti ringraziamenti.

Nella presente nota mi sono proposto di studiare la questione dal punto di vista teorico e sono arrivato alla seguente conclusione.

Assegnata una superficie rotonda σ ed un punto L fuori di essa e sull'asse, risulta *univocamente determinata (con sole operazioni in termini finiti)* una seconda superficie rotonda τ tale che, considerando σ e τ come faccie (rispettivamente anteriore e posteriore) di un riflettore i raggi luminosi uscenti da L emergono tutti nella direzione dell'asse.

E reciprocamente, assegnata una superficie rotonda τ ed un punto fuori di essa e sull'asse, risulta univocamente determinata una seconda superficie σ tale che considerando σ e τ come faccie (anteriore e posteriore) di un riflettore, questo si comporta nel modo voluto.

La sopraccennata corrispondenza fra σ e τ non ha più luogo: o quando σ è una calotta sferica ed L è il centro della sfera, od anche quando σ è un piano normale all'asse.

Ora il colonnello Mangin nella costruzione di un proiettore ¹⁾ assegnò a σ precisamente la forma sferica e fissò per L il centro della superficie stessa.

La figura 1 mostra chiaramente il comportamento di un generico raggio uscente da L nel proiettore Mangin.

È manifesto che il colonnello Mangin nell'assegnare a τ la forma sferica si è limitato ad una soluzione approssimata.

Fig 1

1) Violle. Cours de Physique, T. II, pag. 463.

Il Fresnel ¹⁾ ideò invece un riflettore da lui chiamato *lente a scala* costituito da una lente piano-convessa di piccola apertura, circondata da una serie di anelli concentrici calcolati in modo che il fuoco della lente centrale coincida col fuoco della superficie di ciascun anello.

Ma dal punto di vista della effettiva costruzione interessa che le due faccie σ e τ sieno parallele.

Ed è in vista di ciò che mi sono proposto ancora di determinare la forma che ad esse compete in questa ipotesi, limitandomi ad un primo risultato approssimato: supponendo cioè così piccolo lo spessore del riflettore rispetto alla distanza focale da poterne risguardare il rapporto come quantità di primo ordine ²⁾.

Ritenendo σ e τ superficie di rotazione, esse sono determinate quando sieno assegnate le loro rispettive sezioni meridiane s_σ e s_τ .

Questa osservazione ci permette di trattare la questione a due dimensioni.

1. — Sia s la linea di separazione di due mezzi ottici nel piano delle due variabili x_1, x_2 . Assunta in detto piano una coppia di assi cartesiani ortogonali, sieno $-X_j$ ($j=1, 2$) i coseni direttori di un generico raggio i incidente in s , Y_j quelli del corrispondente raggio rifratto r (considerato nello stesso verso); n l'indice di rifrazione relativo ai due mezzi.

I coseni direttori della normale a s sono proporzionali a $X_j + n Y_j$ ($j=1, 2$) cioè se rappresentiamo per un momento con

$$f(x_1, x_2) = 0$$

l'equazione di s , ricordando che le $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sono pure proporzio-

1) Violle. Loco citato, pag. 464.

2) Avevo già ultimato queste mie ricerche, quando il ch. prof. Leri mi comunicò la preferenza data oggidì, anche nella nostra Marina, ai riflettori parabolici metallici, nei quali si sono ottenuti dei vantaggi notevoli.

Tuttavia non credo che sia priva di interesse (oltre i teoremi generali) la soluzione approssimata che presento e che, almeno teoricamente, ha qualche vantaggio su quelle già conosciute.

nali ai coseni direttori della normale in un generico punto a s , avremo indicato con k un coefficiente di proporzionalità

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = k (X_j + n Y_j) \quad (j = 1, 2).$$

Ora sieno $x_j + dx_j$ le coordinate di un punto di s , infinitamente vicino al punto di coordinate x_j , dovremo avere

$$\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = 0,$$

e per la precedente

$$(1) \quad \sum_j (X_j + n Y_j) dx_j = 0.$$

Possiamo dunque dire che, assegnati due raggi i ed r , i cui coseni direttori sieno rispettivamente

$$-X_j \text{ e } Y_j \quad (j = 1, 2)$$

potremo riguardare il raggio r proveniente da i mediante rifrazione di indice n , purchè esista una linea s su cui è verificata la (1) ¹⁾.

2. — Siano s_σ e s_τ due linee qualsiasi che determinano le tre regioni A, B, C; i un raggio proveniente da A incidente in s_σ in un punto P di coordinate x_j ; r il corrispondente raggio rifratto, attraversante B, che incontra s_τ in un punto Q di coordinate y_j ($j = 1, 2$); r_1 la prosecuzione di r in C. Chiamiamo n l'indice di rifrazione tra i mezzi A e B; n quello relativo ai due mezzi B e C.

Se indichiamo con $-X_j$ ($j = 1, 2$) i coseni direttori di i , i coseni direttori di r sono

$$\frac{y_1 - x_1}{PQ}, \quad \frac{y_2 - x_2}{PQ},$$

1) Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, T. II, pag. 275, ed anche T. Levi-Civita, Complementi al teorema di Malus-Dupin, Rendiconti Accad. dei Lincei, 1900.

ovvero posto

$$(2) \quad \Delta = \overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

Fig. 2

i coseni direttori di r sono

$$-\frac{\partial \Delta}{\partial x_1} \quad \text{e} \quad -\frac{\partial \Delta}{\partial x_2}$$

oppure

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y_2}.$$

Indichiamo ancora con Y_j i coseni direttori di r_1 ; per la (1) dovremo avere sopra s''

$$(3) \quad \sum_{j=1}^2 \left(X_j - n \frac{\partial \Delta}{\partial x_j} \right) dx_j = 0$$

e sopra s'

$$(4) \quad \sum_{j=1}^2 \left(-\frac{\partial \Delta}{\partial y_j} + n_1 Y_j \right) dy_j = 0,$$

dove intenderemo le X_j funzioni di x_j e le Y_j funzioni delle sole y_j ($j=1, 2$).

Se il raggio r subisce in Q , in particolare una riflessione è

$$n_1 = -1,$$

e la (4) diviene

$$(4') \quad \sum_{i,j} \left(Y_j + \frac{\partial \Delta}{\partial y_j} \right) dy_j = 0.$$

Diciamo r' il raggio riflesso e $P' (x'_j)$ il suo punto di incontro con la s_σ : i coseni direttori di r' , che abbiamo già indicati con Y_j sono, ponendo

$$(5) \quad \Delta' = \overline{P'Q} = \sqrt{(x'_1 - y_1)^2 + (x'_2 - y_2)^2},$$

$$Y_j = - \frac{\partial \Delta'}{\partial y_j} = \frac{\partial \Delta'}{\partial x'_j} \quad (j = 1, 2).$$

Per queste, la (4') diviene

$$\sum_{i,j} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial y_j} - \frac{\partial \Delta'}{\partial y_j} \right) dy_j = 0,$$

dalla quale scende che sopra s_τ dev'essere

$$\Delta - \Delta' = \text{costante}.$$

La costante del secondo membro è nulla, se si suppone che s_σ ed s_τ ammettano un asse di simmetria: per es. l'asse delle x_1 . Infatti allora il raggio $x'_2 = 0$ è normale alla s_σ ed alla s_τ , r coincide con r' e P con P' e quindi per questa coppia particolare $\Delta = \Delta'$; ma $\Delta - \Delta' = \text{cost.}$ per qualsiasi coppia quindi sarà sempre

$$(4'') \quad \Delta = \Delta'.$$

Se chiamiamo i' il raggio emergente da P' e indichiamo con X'_j ($j = 1, 2$) i suoi coseni direttori, per la (1) dovremo avere sopra s_σ ancora la relazione

$$(6) \quad \sum_{i,j} \left(- \frac{\partial \Delta'}{\partial x'_j} + \frac{1}{n} X'_j \right) dx'_j = 0.$$

3. — Consideriamo la congruenza dei raggi incidenti i passanti tutti per uno stesso punto L , la cui distanza dal ge-

nerico punto P di s_σ indichiamo con ρ , e la congruenza dei raggi emergenti i' , normale alle linee coordinate x_2 .

Posto

$$(7) \quad F = \rho, \quad F' = x'_1$$

avremo

$$(8) \quad X_j = \frac{\partial F}{\partial x_j}, \quad X'_j = \frac{\partial F'}{\partial x'_j} \quad (j = 1, 2).$$

Per queste la (3) e la (6) divengono rispettivamente

$$\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} - n \frac{\partial \Delta}{\partial x_j} \right) dx_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial F'}{\partial x'_j} - n \frac{\partial \Delta'}{\partial x'_j} \right) dx'_j = 0,$$

dalle quali scende che sopra s_σ devono essere soddisfatte le

$$(9) \quad \begin{cases} F(x_1, x_2) - n \Delta = \text{costante} \\ F'(x'_1, x'_2) - n \Delta' = \text{costante.} \end{cases}$$

Da queste, tenendo conto della (4') si ha la relazione

$$(10) \quad F'(x'_1, x'_2) - F(x_1, x_2) = \text{costante};$$

dove alla costante del secondo membro si può assegnare un valore tale che per un particolare punto di coordinate x_1 la F cioè ρ abbia un valore prefissato.

4. — Sia ora s_σ una linea simmetrica rispetto all'asse x_1 definita dall'equazione

$$(11) \quad \Phi(x_1, x_2) = 0,$$

e sia L un punto prefissato sull'asse x_1 e del resto qualunque, purchè non situato sopra s_σ , nel piano delle variabili x_i ($i = 1, 2$).

Si stabilisca sopra s_σ una corrispondenza di punti tale che al generico punto di coordinate x_i corrisponda un altro punto le cui coordinate x'_i sieno legate alle prime dalla relazione

(10) dove F ed F' hanno il significato espresso dalle (7) e dove la costante del secondo membro risulta determinata in modo che per $x'_i = x$ la F , cioè ρ ha un valore ben determinato per la opportuna scelta fatta del punto L .

Basterà a tal uopo assegnare come corrispondenti ad ogni coppia di valori x_i che soddisfanno la (11), i valori di x'_i definiti dalla (10) e dalla (11), dove al posto delle x_i si pongono le x'_i .

Sia s_τ una seconda linea la quale risulti determinata mediante s_σ nel seguente modo.

Ad ogni coppia di punti corrispondenti x_i e x'_i di s_σ si faccia corrispondere un punto y_i di s_τ , equidistante dai due punti x_i ed x'_i e la cui distanza comune Δ sia definita dalla prima delle (9).

In tali condizioni possiamo riguardare il fascio di parallele $x_i = \text{cost.}$ proveniente dal fascio di raggi ρ uscenti da L mediante rifrazione di indice n attraverso a s_σ , riflessione su s_τ e nuova rifrazione di indice $\frac{1}{n}$ attraverso s_σ .

Infatti perciò è necessario e basta che sopra s_σ sieno soddisfatte le (9) e sopra s_τ la (4"). Ora quest'ultima è soddisfatta per la costruzione stessa di s_τ . Osserviamo inoltre che la prima delle (9) e la (10), tenuto conto della (4"), equivalgono alle (9).

Possiamo concludere che *assegnata una linea s_σ simmetrica rispetto ad un asse ed un punto L sull'asse, e fuori di essa, risulta univocamente determinata una seconda linea s_τ , tale che ad un fascio di raggi uscenti da L incidenti in s_σ corrisponde un fascio di raggi paralleli emergenti da s_σ .*

5. — Dopo ciò sembrerebbe naturale che, assegnata la s_τ si potesse determinare, con operazioni altrettanto semplici, la corrispondente s_σ .

Invece, come ora vedremo, data l'equazione di s_τ , l'equazione in termini finiti di s_σ dipende dalla integrazione di una equazione funzionale. Sia

$$(12) \quad \psi(y_1, y_2) = 0$$

l'equazione definisce la s_τ , e sia L un punto prefissato dell'asse e del resto qualunque, perchè non situato su s_τ .

Dalla eliminazione di y_1 e y_2 dalle (12) e (4') e dalla prima delle (9) si ottiene una relazione tra le x_j e x'_j ($j = 1, 2$).

Da questa e dalla (10) si possono ricavare le x'_j in funzione delle x_j :

$$(13) \quad x'_j = f_j(x_1, x_2). \quad (j = 1, 2).$$

Ammissa per un istante la esistenza della s_σ , la sua equazione sia la (11), che possiamo immaginare risolta rispetto alla x_2 e precisamente sia

$$(11') \quad x_2 = \bar{\Phi}(x_1).$$

Consideriamo nei secondi membri delle (13) le f_j funzioni della sola x_1 direttamente e per mezzo delle (11'). Diciamo allora $\Phi(x_1)$ una funzione che soddisfa alla relazione

$$(14) \quad \Phi(f_1) = f_2;$$

dico che

$$\Phi(x_1) = \bar{\Phi}(x_1)$$

e quindi che l'equazione di s_σ è per la (11')

$$x_2 = \Phi(x_1).$$

Notiamo perciò che da

$$x'_2 = \Phi(x'_1),$$

e dalle (13) scende

$$f_2 = \Phi(f_1)$$

la quale non è altro che la (14).

La determinazione della s_σ dipende adunque dall'integrazione della equazione funzionale (14).

6. — Riferendoci al num. 4 osserviamo che assegnata la s_σ affinchè si possa stabilire su essa la corrispondenza dei punti x_i ed x'_i in modo che ad ogni coppia di valori x_i che rendono soddisfatta la (11) corrispondano i valori di x'_i definiti dalla

(10) e dalla (11), nella quale le x_i vanno sostituite con le x'_i , è necessario e basta che nè la F e nè la F' che compariscono nel primo membro della (10) abbiano valore costante sopra s_σ .

Infatti, nel caso contrario la (10) diverrebbe o

$$F'(x'_1, x'_1) = \text{cost.}$$

oppure

$$F(x_1, x_1) = \text{cost.}$$

e non sarebbe più possibile far corrispondere nel modo richiesto al generico punto x_i di s_σ un altro punto x'_i della stessa curva. Notiamo inoltre che la esistenza della s_τ dipende unicamente dalla possibilità di poter stabilire sopra s_σ la accennata corrispondenza.

Vi sono adunque solamente due casi, in cui assegnata la s_σ non si può determinare la corrispondente s_τ , e cioè quando F ed F' hanno valore costante, ovvero per le (7) quando

$$\rho = \text{cost. e } x'_1 = \text{cost.}$$

Nel primo caso s_σ è una circonferenza ed L è il suo centro, sul secondo s_σ è una retta parallela all'asse delle ordinate.

7. — Vediamo se nella corrispondenza univoca tra s_σ ed s_τ stabilita al numero 4, si può fare in modo che s_τ coincida con s_σ .

È manifesto che in tal caso s_σ agirà solo come profilo di riflessione.

Dovrà essere $\Delta = \Delta' = 0$ ed essendo inoltre $x'_1 = x_1$, la (10) definisce il profilo s_σ .

Per le (7), la (10) diviene allora

$$(10'') \quad x_1 - \rho = \text{cost.},$$

dove

$$\rho = \sqrt{(x_1 - a)^2 + x_1^2},$$

essendo a la ascissa del punto L .

La (10'') è l'equazione di una parabola.

In particolare, facendo

$$a = \frac{p}{4}$$

e chiamando $-\frac{p}{4}$ la costante del secondo membro, la precedente equazione definisce la parabola

$$x_2^2 = p x_1.$$

Il punto L è in tal caso lo stesso foco della parabola.

8. — Supponiamo ora che s_σ ed s_τ sieno linee parallele. Mi propongo di determinare l'equazione di s_σ . Mi limiterò al caso in cui lo spessore costante del profilo speculare sia tale da poter riguardare il rapporto di esso alla distanza focale come quantità di primo ordine.

Chiamiamo x ed y gli assi coordinati; x_1, y_1 le coordinate del punto P in cui il generico raggio incidente incontra s_σ ; x_2, y_2 le coordinate del punto P₂ in cui il corrispondente raggio emergente sorte da s_σ .

La (10) per le (7) diviene

$$x_2 = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{4}\right)^2 + y_1^2} - \frac{p}{4},$$

avendo chiamato $\frac{p}{4}$, 0 le coordinate del centro del fascio dei raggi incidenti e $-\frac{p}{4}$ la costante del secondo membro.

Ponendo

$$x_2 = x_1 + \varepsilon,$$

la precedente diviene

$$x_1 + \varepsilon = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{4}\right)^2 + y_1^2} - \frac{p}{4},$$

da cui si ricava

$$y_1^2 = p x_1 + 2 \varepsilon \left(x_1 + \frac{p}{4}\right) + \varepsilon^2.$$

Se introduciamo l'ipotesi che il rapporto $\frac{h}{p}$ tra lo spessore h e p sia quantità di primo ordine la (16) ci dice che $\frac{\epsilon}{p}$ è pure quantità di primo ordine e quindi di essa sono trascurabili le potenze superiori alla prima.

Per ciò la (15) diverrà

$$(15') \quad y^2 = p x + 2 \epsilon \left(x + \frac{p}{4} \right).$$

Inoltre in tale ipotesi, essendo il rapporto $\frac{\overline{P_1 P_2}}{p}$ quantità dello stesso ordine di $\frac{\epsilon}{p}$ e $\frac{\operatorname{tg} \theta}{p}$ che sono quantità di ordine superiore al primo, potremo porre nella (16)

$$\theta = 0, \quad \cot \psi = \operatorname{tg} \delta,$$

ed otterremo per ϵ l'espressione

$$(16') \quad \epsilon = 2 h \operatorname{tg} \delta \cos \phi;$$

ma è

$$\frac{\operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \delta} = n,$$

$$\cos \phi = \operatorname{sen} \lambda,$$

$$\operatorname{tg} \lambda = - \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_1+\epsilon}};$$

da queste tre relazioni si deduce

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_1+\epsilon}^2}}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\sqrt{n^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_1+\epsilon}^2 + n^2 - 1}}$$

Per queste la (16') diviene

$$\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1+\varepsilon}^2\right\} \left\{n^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1+\varepsilon}^2 + n^2 - 1\right\}}}$$

Ricavando dalla (15') la $\frac{dy}{dx}$ per $x = x_1 + \varepsilon$ e tenendo conto solamente dei termini di primo ordine si ottiene', ponendo x al posto di x_1 , per ε l'espressione

$$\varepsilon = \frac{8hx}{\sqrt{\{4x+p\} \{4(n^2-1)x + pn^2\}}},$$

e portando questa espressione nella (15'), ricaviamo in definitiva l'equazione di s_σ sotto la forma

$$(15'') \quad y^2 = px + 4hx \sqrt{\frac{4x+p}{4(n^2-1)x + pn^2}}.$$

10. — Applichiamo questo risultato ad un esempio pratico.

Si abbia un riflettore a faccie (σ e τ) parallele e rotonde, la cui sezione meridiana abbia per linea s_σ la curva definita dall'equazione (15'').

Sia inoltre

$$p = 1680 \text{ m.m.}$$

$$h = 10 \text{ m.m.}$$

$$n = 1,54$$

$$d = 900 \text{ mm. } ^1),$$

avendo indicato con d il diametro del parallelo massimo del riflettore.

Posta una sorgente luminosa nel punto L dell'asse di rotazione, che dista di $\frac{p}{4} = 420 \text{ mm.}$ dal vertice della superficie interna del riflettore, i raggi emergenti non dovrebbero uscire

¹⁾ Di questi dati si servono le officine Galileo di Firenze per la costruzione dei riflettori.

da una superficie cilindrica le cui generatrici sono parallele all'asse, e la cui direttrice è il parallelo massimo del riflettore, se questo rispondesse in modo perfetto alle condizioni volute. Ma rappresentando la (15) soltanto una soluzione approssimata, è ovvio che detta superficie cilindrica nel nostro caso si ridurrà ad una superficie conica di rotazione, avente per direttrice ancora il parallelo massimo e per vertice un punto dell'asse (verso il quale, lo specchio rivolge la sua convessità) tanto più lontano quanto più il riflettore si avvicina alle condizioni ideali.

Con un calcolo, che non presenta nessuna difficoltà concettuale, ed il cui sviluppo, piuttosto laborioso, omettiamo per brevità, si trova nel nostro caso, che la distanza del vertice del cono dal fuoco è di circa 17300 mm., essendo l'angolo di apertura del cono non superiore a $1^{\circ} 30'$ ¹⁾.

Alla distanza di 10 km. il nostro riflettore espande quindi i suoi raggi sopra una superficie del diametro di circa 500 m.

1) Nei riflettori costruiti dalle officine Galileo di Firenze, adoperando come sorgente luminosa la scintilla dell'arco voltaico, l'angolo di apertura del cono è di 3° .