II. Constructionen zur anomalen Dispersion; von E. Ketteler.

Dringt Licht unter senkrechtem Einfall in ein absorbirendes Mittel, so bestehen, wie ich in zwei früheren Aufsätzen¹⁾ erwiesen zu haben glaube, zwischen dem Refractionscoëfficienten a , dem Extinctionscoëfficienten b und der der Schwingungsdauer proportionalen Wellenlänge λ die sehr einfachen Beziehungen:

$$(1) \quad \begin{cases} a^2 - b^2 - 1 = \sum \frac{D \lambda_m^2 (\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2}, \\ 2ab = \sum \frac{D \lambda_m^2 g \lambda}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2}. \end{cases}$$

Darin bedeutet D die Dispersionsconstante als Maass der Wechselwirkung zwischen Aether- und Körpermaterie, g die Reibungsconstante der letzteren und λ_m die charakteristische Wellenlänge des entsprechenden Absorptionsstreifens. Die Summenzeichen beziehen sich auf die Anzahl der vorkommenden Absorptionen, resp. auf die verschiedenen durch den Aether in Mitschwingungen versetzten heterogenen Molecularqualitäten. Endlich ist der Extinctionscoëfficient b mit dem aus der directen photometrischen Messung hervorgehenden Absorptionscoëfficienten k durch die Definitionsgleichungen verknüpft:

$$(2) \quad \frac{2\pi}{\lambda} b = k, \quad b = k \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Heisst ferner Δ der Phasenunterschied zwischen den Schwingungen irgend welcher Molecularqualität und denen des Aethers, so hat man für die Abhängigkeit desselben von der Wellenlänge die Relation:

$$(3) \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{g \lambda}{\lambda^2 - \lambda_m^2}.$$

Und vergleicht man das absorbirende Mittel mit einem ideell durchsichtigen, in welchem das Arbeitsverhältniss der Körper- und Aethertheilchen das gleiche ist, so heisse der Ausdruck:

1) Ketteler, Wied. Ann. **7**, p. 658. 1879; Carl's Repert. **16**, p. 221 und Berl. Monatsber. Nov. 1879.

$$(4) \quad N^2 - 1 = \sqrt{(a^2 - b^2 - 1)^2 + 4a^2b^2}$$

die reducirte brechende Kraft des ersteren. Dieselbe ist indess mehr für anisotrope als für isotrope Mittel von Bedeutung.

Setzen wir jetzt zur Abkürzung:

$$a^2 - b^2 - 1 = \Sigma x, \quad 2ab = \Sigma y,$$

so ergibt sich:

$$a^2 - b^2 = 1 + \Sigma x, \quad a^2 + b^2 = \sqrt{(1 + \Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2}$$

und demnach:

$$(5) \quad \begin{cases} 2a^2 = \sqrt{(1 + \Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2} + (1 + \Sigma x), \\ 2b^2 = \sqrt{(1 + \Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2} - (1 + \Sigma x). \end{cases}$$

Die erstere der durch diese beiden Gleichungen repräsentirten Curven soll im Folgenden die Refractionscurve, die zweite die Absorptionscurve genannt werden. Zu ihnen tritt als dritte die durch Gleichung:

$$(6) \quad N^2 = 1 + \sqrt{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2}$$

dargestellte Curve der reducirten Brechungsverhältnisse.

Es ist nun meine Absicht, diese Curven dem Leser zur unmittelbaren Anschauung zu bringen und sie unter möglichst verschiedenen Bedingungen zu verfolgen. Habe ich früher einmal zur Erreichung eines ähnlichen Zieles den Weg der Rechnung eingeschlagen¹⁾, so wähle ich heute den der Construction. Derselbe ist eben unter den vorliegenden Verhältnissen der kürzere und zugleich auch der übersichtlichere.

Zunächst beachte man, dass sich mittelst der Beziehungen:

$$\cos A = \frac{\lambda^2 - \lambda_m^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2}}, \quad \sin A = \frac{g \lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2}}$$

die Werthe von x , y auch so schreiben:

$$x = \frac{D \lambda_m^2}{g \lambda} \sin A \cos A, \quad y = \frac{D \lambda_m^2}{g \lambda} \sin^2 A.$$

Setzen wir jetzt:

$$\frac{D \lambda_m^2}{g \lambda} = d, \quad \frac{D \lambda_m^2}{g \lambda_m} = \frac{D}{G} = d_m,$$

1) Ketteler, Wied. Ann. 1. p. 340. 1877.

so kommt kürzer:

$$(7) \quad x = d \sin \Delta \cos \Delta, \quad y = d \sin^2 \Delta, \quad d = d_m \frac{\lambda_m}{\lambda}.$$

Entsprechend schreibe ich statt Gl. (3):

$$(8) \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{g'}{\lambda - \lambda_m}, \quad g' = g \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_m}.$$

Dies vorausgesetzt, soll die in Rede stehende Construction zunächst in Strenge durchgeführt und sodann durch zwei Näherungsmethoden vereinfacht werden.

I. Correctes Verfahren. a) Das gegebene Mittel sei einfach, sodass nur ein Absorptionsstreifen vorkommt. Man denke sich (Taf. II B. Fig. 1) die Wellenlängen vom Anfangspunkte O ab auf der Abscissenaxe OX abgetragen, und es sei $OP = \lambda$, $OM = \lambda_m$, also $PM = \lambda - \lambda_m$. Man mache alsdann $OP' = OP$, lege an P' senkrecht zu OP' die Gerade $P'F' = g$, verbinde F' mit M und ziehe durch O die zu $F'M$ Parallele $A'O$. Dieselbe schneidet das in P errichtete Perpendikel PQ in einem Punkte A , für welchen:

$$AP = A'P' = g',$$

und so wird folglich Winkel $AMP = \Delta$.

Construirt man ferner im Abstände $OL' = \lambda_m$ eine zu OP' Parallele $Q'L'$, verlängert $P'F'$ bis Q' , zieht OQ' und durch Punkt G' im Abstände $OG' = d_m$ die zu $P'Q'$ Parallele $G'H'$, so ist:

$$G'H' = d.$$

Diese Länge trage man auf dem Perpendikel in P von A ab auf, sodass $AB = d$ wird, und beschreibe darum einen Kreis. Die Verlängerte MA trifft denselben in einem Punkte E , für welchen:

$$AE = d \sin \Delta,$$

und deren Projectionen werden sein:

$$AD = d \sin \Delta \cos \Delta = x, \quad DE = d \sin^2 \Delta = y.$$

Zieht man endlich durch A die zu OX Parallele CA und macht ihre Länge $CA = c = 1$, so ist:

$$CD = 1 + x,$$

und die Verbindungslinie CE wird:

$$CE = \sqrt{(1+x)^2 + y^2}.$$

Folglich ist:

$$(9) \quad a^2 = \frac{1}{2}(CE + CD), \quad b^2 = \frac{1}{2}(CE - CD) \quad \text{und:} \\ (10) \quad N^2 = CA + AE.$$

Einem beliebigen Punkte P entspricht sonach eine bestimmte Entfernung $AP=g'$ und ein bestimmter Kreisdurchmesser $AB=d$. Selbstverständlich kann man die sämtlichen Punkte A und B auch auf dem nämlichen über M errichteten Perpendikel abtragen. Die Winkel A erhalten dann aber eine entgegengesetzt gerichtete Oeffnung, und dementsprechend wird die Linie CA rechts (statt wie bisher links) von A anzulegen sein (vgl. Taf. IIB. Fig. 2).

b) Wären mehrere Absorptionsstreifen vorhanden, so gehören zum beliebigen Punkte P (Taf. IIB. Fig. 1) mehrere Punkte M . Einem jeden derselben entsprechen auf PQ verschiedene Punkte A und B und verschiedene Verbindungslinien MA . Man zeichne alsdann zwei Linien:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{D} = c + \Sigma AD, \quad \mathfrak{D}\mathfrak{E} = \Sigma DE$$

und behandle sie als Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks $\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}$, alsdann ist wieder:

$$(9b) \quad a^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{C}\mathfrak{E} + \mathfrak{C}\mathfrak{D}), \quad b^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{C}\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{D}),$$

und entsprechend:

$$(10b) \quad N^2 = \mathfrak{C}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{E}.$$

Wie vorhin lässt sich natürlich auch diesmal jeder Einzelkreis oberhalb des Endpunktes M seiner charakteristischen Abscisse λ_m verzeichnen.

II. Erstes Näherungsverfahren. Wenn, wie gezeigt, die Länge $AP=g'$ zugleich mit λ fortwährend wächst und vom Ausgangswerthe o auf den Extremwerth g ansteigt, und wenn umgekehrt der Kreisdurchmesser $AB=d$ zwischen den Extremwerthen ∞ und o fortwährend abnimmt, so ist doch diese Veränderlichkeit gegenüber der raschen Aenderung des Phasenunterschiedes A zu beiden Seiten von M selbst für eine grössere Spectralbreite noch wenig bemerkbar. Construirt man daher beispielsweise für das optische Spectrum etwa die den Abscissen $\lambda = \frac{3}{4}\lambda_m, = \lambda_m, = \frac{5}{4}\lambda_m$ entsprechenden g' und d nach vorstehender Regel und trägt die zuge-

hörigen Punkte A und B auf ihren Perpendikeln auf, so wird es genügen, die des ersten und zweiten, und ebenso die des zweiten und dritten durch Gerade zu verbinden und für irgend welches intermediäre Perpendikel die Durchschnittspunkte desselben mit diesen Geraden als genähert richtige Punkte A, B wie bisher zu behandeln.

III. Zweites Näherungsverfahren. a) Das Mittel sei einfach. Am raschesten lässt sich die Construction ausführen, wenn man sich mit einem solchen Grade von Annäherung begnügt, resp. sich zu beiden Seiten der Mittelabszisse auf ein so schmales Feld beschränkt, dass für alle Punkte desselben g' und d als constant betrachtet werden dürfen. Wir nehmen also M als hinlänglich weit vom Coordinatenanfangspunkt entfernt, setzen $g' = \frac{1}{2}g$, $d = d_m$ und verzeichnen naturgemäss den einzigen erforderlichen Kreis oberhalb M (vgl. Taf. IIB. Fig. 2). Innerhalb der hier fixirten Genauigkeitsgrenze sind offenbar auch die Coëfficienten b und k der Gl. (2) einander proportional. Indem ich bezüglich des weiteren wieder auf die Vorschrift der Formeln (9) verweise, bemerke ich nur noch, dass die in Rede stehende Construction mit der von Hrn. Helmholtz ¹⁾ angegebenen zusammenfällt, sofern man die von links ab gezählten (den Schwingungsdauern proportionalen) Wellenlängen durch die von rechts ab gezählten (den Schwingungszahlen proportionalen) reciproken Werthe derselben ersetzt denkt.

Ich habe nun nach diesem Verfahren die Curven der Fig. 2—5 Taf. IIB. construirt.

In Taf. IIB. Fig. 2 sind in willkürlichem Maasse gemessen:

$$c = 2, \quad g' = \frac{1}{2}, \quad d = 1.$$

Die zugehörige Absorptionscurve I und Refractionscurve I erheben sich über der Abscissenaxe XX . Man sieht, dass für die Abscisse OII des Scheitelpunktes G der ersteren die letztere das Niveau c in H schneidet. Nennen wir diese Abscisse λ_μ , so ist sie kleiner als λ_m .

Die dritte Curve der reducirten Brechungsverhältnisse

1) Helmholtz, Pogg. Ann. 154. p. 594. 1875.

liegt symmetrisch zum Mittelpunkte M ; sie nähert sich asymptotisch dem Niveau c .

In Taf. II B. Fig. 3 sind zunächst:

$$c = 2, \quad d = 2$$

gewählt und sind die bezüglichen Curven als II_a , II_b , II_c unterschieden, jenachdem sie sich beziehen auf:

$$g' = \frac{1}{2}, \quad = \frac{1}{4}, \quad = \frac{1}{8}.$$

Dieselben erheben sich resp. über den Axen XX , $X'X'$, $X''X''$. Den sämtlichen Scheitelpunkten G , G' , G'' und ebenso den zugehörigen Punkten H , H' , H'' entspricht natürlich das gleiche A . Man übersieht so, wie bei Constant-erhaltung des Verhältnisses $\frac{D}{G}$ die Zunahme von G auf Absorption wie Refraction verbreiternd und abflachend einwirkt. Wächst dagegen bei constantem G das Verhältniss $\frac{D}{G}$ (Taf. II B. Fig. 2 u. 3), so wachsen zugleich die Krümmungen mit; die Ausweichungen vom allgemeinen Niveau stellen sich als nahezu verdoppelt dar, während im horizontalen Sinne nur verhältnissmässig geringe Verschiedenheiten auftreten.

Sämmtliche bisher gewonnenen Absorptionscurven verfließen nahezu symmetrisch, indem sie sich nach rechts und links der Abscissenaxe asymptotisch nähern. Die zugehörigen Refractionscurven bestehen in Einklang mit der Erfahrung aus einem Berge und einem vorangehenden Thal. Während der Uebergang zwischen beiden verhältnissmässig steil abfällt, ist der Verfluss auf den anderen Seiten ein weit langsamerer; die Curven wenden sich hier allmählich asymptotisch dem Niveau c zu. Im übrigen bemerkt man, dass die Differenz zwischen der Höhe des Berges und der Tiefe des Thales in Fig. 3 Taf. II B. mehr hervortritt als in Fig. 2 Taf. II B.

Diese Asymmetrien werden sichtbarer, wenn man caeteris paribus die Grösse c abnehmen lässt. Der Fig. 4 Taf. II B. sind die Werthe:

$$c = 1, \quad d = 2, \quad g' = \frac{1}{2}$$

zu Grunde gelegt, sodass also das im Ausgangspunkte C_2 errichtete Perpendikel den Kreis (s. Taf. II B. Fig. 3) tangirt.

Es hat das zur Folge, dass Absorptionscurve III und Refractionscurve III einen Punkt *S* miteinander gemein haben.

Die jetzt folgenden Curven IV der Fig. 5 Taf. II B. sind mittelst der Längen:

$$c = \frac{1}{2}, \quad d = 2, \quad g' = \frac{1}{2}$$

erhalten. Man bemerkt schon bei den Curven III, deutlicher aber bei den Curven IV, das horizontale Auseinandergehen der Punkte *G* und *H*. Die Absorptionscurve fällt rechts steiler ab als links, und bei der Refractionscurve ist die Höhe des Berges auf Kosten der Tiefe des Thales gestiegen. Da bei der betreffenden Construction der Ausgangspunkt *C*₁ (s. Taf. II B. Fig. 3) eine solche Lage hat, dass das in ihm errichtete Perpendikel den Kreis zweimal schneidet, so gibt es zwei verschiedene *A*, für welche *CD* verschwindet, folglich *a*² und *b*² einander gleich werden. Dementsprechend schneiden sich Absorptionscurve IV und Refractionscurve IV in zwei Punkten *S*₁ und *S*₂, und ist für die intermediär liegenden Wellenlängen die Differenz *a*²—*b*² negativ. Dies ist in der That bei den Erscheinungen der Metallreflexion das häufigere Vorkommniss. Innerhalb des optischen Spectrums wächst der Refractionscoefficient *a* für sämtliche Metalle zugleich mit der Wellenlänge, während dagegen der Extinctionscoefficient derselben mit Zunahme der Wellenlänge für einige ansteigt, für andere abnimmt. Für Metalle ist sonach *c* erheblich kleiner als *d*.

Wollte man endlich zur Gewinnung des Extremfalles $\frac{c}{d} = 0$ setzen, so würden Refractions- und Absorptionscurve wiederum symmetrisch und insofern einander ähnlich, als das Thal der erstern verschwinden würde. Zudem würden die Schnittpunkte *S* nunmehr mit den beiden Scheitelpunkten zusammenfallen.

b) Hätte das Mittel zwei oder mehrere Absorptionsstreifen in sehr grosser Entfernung voneinander, so üben die rechts liegenden auf jeden links liegenden eine Depression, die links liegenden auf jeden rechts liegenden eine Elevation des allgemeinen Niveaus aus. Es genügt also für die Construc-

tion der beiden Curven innerhalb eines solchen Einzelstreifens, $c = 1$ durch:

$$c = 1 \pm \gamma$$

zu ersetzen.

c) Liegen dagegen die Absorptionsstreifen beliebig, so gilt für die Construction die unter Ib gegebene Regel, jedoch mit der Vereinfachung, dass jedem einzelnen Streifen ein einziger Kreis zuzuordnen wäre. Selbstverständlich wird dieselbe eine äusserst mühsame. Hier mag man denn zunächst bemerken, dass wenigstens für Mittel mit schwacher Absorption oft schon b^2 vernachlässigt werden darf, und dass infolge dessen die Gl. (1) die einfachere Gestalt erhalten:

$$(11) \quad a^2 = 1 + \sum x, \quad b = \frac{1}{2a_0} \sum y.$$

Ueberhaupt wird das Princip der Superposition kleiner Ausweichungen dazu dienen können, den ungefähren Verlauf der entstehenden Totalcurve ohne Umstände aus den gegebenen Partialcurven abzuleiten. Beispielsweise sind in Taf. II B. Fig. 6 zwei schmale, nahestehende gleiche Absorptionsstreifen zusammengefasst; die componirenden Curven sind punktirt, die resultirende ausgezogen. Jeder mehr rechts liegende Berg erscheint gehoben, jedes mehr links liegende Thal herabgedrückt. Taf. II B. Fig. 7 stellt das Zusammenwirken zweier breiter Absorptionsbänder dar, die sich in einem solchen Abstände befinden, dass Berg und Thal der Refractionscurven sich aufheben. Taf. II B. Fig. 8 endlich soll veranschaulichen, wie zwei gleiche schwächere Absorptionsstreifen auf ein symmetrisch zwischen ihnen liegendes breiteres Band einwirken. Eine ähnliche, nur verwickeltere Erscheinung bietet bekanntlich die Natur an den fünf nahezu symmetrisch gruppirten Absorptionsstreifen des übermangansauren Kali.

Bonn, im April 1880.

A

Lorenz A Fig. 1-2. Hoorweg Fig. 3-9. Ketteler B Fig. 1-8.