Sur une Propriété de la Sphère et son extension aux Surfaces quelconques. Par MAURICE D'OCAGNE.

[Read May 12th, 1887.]

Si le plan $Ax + By + Cz + 1 = 0$
est tangent à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

on a
$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = R.$$

Par suite, la distance δ_i d'un point quelconque de l'espace $P_i(a_i, \beta_i, \gamma_i)$ à ce plan tangent pourra s'écrire

$$\delta_i = R(Aa_i + B\beta_i + C\gamma_i + 1).$$

Supposons alors qu'on prenne dans l'espace m points $P_1, P_2, \dots, P_m$ absolument quelconques. On aura, en appelant $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ des paramètres actuellement indéterminés

$$\Sigma \lambda_i \delta_i = R(A \Sigma \lambda_i a_i + B \Sigma \lambda_i \beta_i + C \Sigma \lambda_i \gamma_i + \Sigma \lambda_i),$$

les signes Σ s'étendant aux valeurs 1, 2, 3, ..., m de l'indice i . Mais, lorsque m est au moins égal à 4, on peut toujours disposer des paramètres λ_i de façon que

$$\Sigma \lambda_i a_i = 0, \quad \Sigma \lambda_i \beta_i = 0, \quad \Sigma \lambda_i \gamma_i = 0,$$

ce qui revient à dire qu'on peut toujours considérer le centre de la sphère comme le barycentre des m points $P_1, P_2, \dots, P_m$ affectés de certains coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Il vient alors, en représentant par k la somme des coefficients λ_i ainsi choisis,

$$\Sigma \lambda_i \delta_i = kR;$$

d'où ce théorème.

Il existe une relation linéaire entre les distances de m points quelconques de l'espace (m étant au moins égal à 4) aux plans tangents à une sphère quelconque.

On voit que le théorème est encore vrai pour le cas de $m = 3$, lorsque le plan déterminé par les 3 points passe par le centre de la sphère, parce qu'alors le système d'équations

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0,$$

$$\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3 = 0,$$

$$\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 + \lambda_3 \gamma_3 = 0,$$

est compatible.

Réciproquement :

Si les distances de m points fixes quelconques de l'espace à un plan mobile sont liées par une relation linéaire, ce plan enveloppe une sphère.

En effet, soit

$$\sum \lambda_i \delta_i = K$$

la relation donnée. Prenons pour origine des coordonnées le barycentre O des points $P_1, P_2, \dots, P_m$ respectivement affectés des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Nous aurons alors

$$\sum \lambda_i \alpha_i = 0, \quad \sum \lambda_i \beta_i = 0, \quad \sum \lambda_i \gamma_i = 0,$$

et la relation précédente pourra s'écrire, en supposant que

$$Ax + By + Cz + 1 = 0,$$

soit l'équation du plan mobile,

$$\frac{\sum \lambda_i}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = K;$$

ce qui prouve que le plan mobile reste tangent à une sphère de centre O et de rayon $\frac{K}{\sum \lambda_i}$.

Soient $p_1, p_2, \dots, p_m$ les pieds des perpendiculaires abaissées des points $P_1, P_2, \dots, P_m$ sur l'un des plans tangents de la sphère O , et M le point de contact de ce plan tangent et de la sphère.

Puisque le point O est le barycentre des points $P_1, P_2, \dots, P_m$ affectés des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, il en est de même de la projection M du point O sur le plan tangent, relativement aux projections $p_1, p_2, \dots, p_m$ des points $P_1, P_2, \dots, P_m$ sur ce même plan.

Supposons maintenant que les distances $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ des m points fixes $P_1, P_2, \dots, P_m$ à un plan π mobile soient liées par une relation absolument quelconque

$$F(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = 0.$$

Pour un déplacement infiniment petit du plan π , on a, par la formule de Taylor, en négligeant les infiniment petits du second ordre et des ordres supérieurs,

$$\frac{\partial F}{\partial \delta_1} d\delta_1 + \frac{\partial F}{\partial \delta_2} d\delta_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial \delta_m} d\delta_m = 0.$$

C'est-à-dire que les déplacements infiniment petits que peut prendre le plan π à partir de la position considérée sont les mêmes que si les distances $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ étaient liées par la relation

$$\frac{\partial F}{\partial \delta_1} \delta_1 + \frac{\partial F}{\partial \delta_2} \delta_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial \delta_m} \delta_m = \text{constante},$$

les dérivées partielles étant supposées avoir des valeurs fixes égales à celles qu'elles ont pour la position considérée du plan π . Le point de contact du plan π et de sa surface enveloppe est donc le même que son point de contact avec la sphère qu'il envelopperait en vertu de la relation précédente. Rapprochant ce résultat de la remarque qui a été faite plus haut, on obtient ce théorème, dont la ressemblance est manifeste avec un théorème célèbre de Tschirnhausen :

Si les distances $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ d'un plan mobile à m points fixes quelconques $P_1, P_2, \dots, P_m$ de l'espace, sont liées par la relation

$$F(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = 0,$$

le plan mobile enveloppe une surface, et, pour chacune de ses positions, son point de contact avec cette surface est le barycentre des projections $p_1, p_2, \dots, p_m$ des m points fixes sur ce plan, ces projections étant respectivement affectées des coefficients $\frac{\partial F}{\partial \delta_1}, \frac{\partial F}{\partial \delta_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \delta_m}$.

J'avais déjà obtenu ce théorème, par une voie toute différente, mais dans le cas seulement du plan* pour lequel je donnais, en outre, la détermination du rayon de courbure. La méthode précédente, en-dehors de l'avantage de s'appliquer à l'espace, a aussi celui d'être plus simple.

General Theory of Dupin's Space-Extension of the Focal Properties of Conic Sections. By J. LARMOR.

[Read May 12th, 1887.]

The following considerations may have value in reducing to direct geometrical principles a remarkable theory whose treatment has usually been of an analytical and somewhat indirect character.

I. 1. The locus of a point in a plane, the sum or difference of whose distances from two fixed points in the plane is constant, is a conic section.

The locus of a point in space which possesses this property is a quadric of revolution. Any plane section of such a surface is a conic

* Note I. de l'Appendice de ma brochure *Coordonnées parallèles et axiales* (Paris, Gauthier Villars, 1885).