Über die disjunktiven Konvergenz- und Divergenzkriterien zweiter Art für unendliche Reihen mit positiven Gliedern.

Von J. A. Gmeiner in Prag.

1. Es seien die positiven Zahlen $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n), \dots$ so gewählt, daß die unendliche Reihe

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$$

divergiert; ferner sei $\sum a_n$ eine beliebige unendliche Reihe mit positiven Gliedern. Setzen wir dann

$$(2) \quad q_n = \frac{1}{q'_n} = \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}},$$

worin k eine beliebige ganzzahlige Konstante bedeuten kann, so divergiert bekanntlich die Reihe $\sum a_n$, wenn von einem bestimmten Werte m von n anfangen die Beziehung

$$q_n \geq \frac{1}{\varphi(n+1)} : \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} \text{ oder } q'_n \leq \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$$

stattfindet, welche man auch in der Form

$$(3) \quad \varphi(n) - q_n \varphi(n+1) \leq 0 \text{ oder } \varphi(n) q'_n - \varphi(n+1) \leq 0$$

anschreiben kann.

Nun nehmen wir an, die Reihe $\sum a_n$ erfülle die Divergenzbedingungen (3) nicht, sondern es sei im Gegenteil für alle Werte $n \geq m$ entweder stets

$$(4) \quad \varphi(n) - q_n \varphi(n+1) \geq \alpha,$$

oder aber stets

$$(5) \quad \varphi(n) q'_n - \varphi(n+1) \geq \beta,$$

worin α und β zwei beliebige positive (also von Null verschiedene) Zahlen vorstellen können. Selbstverständlich können die

Relationen (4) und (5) auch gleichzeitig erfüllt sein, was sogar in der Regel zutreffen wird. Aus jeder von ihnen folgt aber

$$a_{n+k} \varphi(n) > a_{n+k+1} \varphi(n+1);$$

$a_{n+k} \varphi(n)$ ist also eine monotone, bei wachsendem n stets abnehmende Funktion von n , so daß sie, da sie niemals negativ wird, eine endliche positive Zahl oder die Null zum Grenzwerte hat. Daraus schließt man zunächst, daß die Reihe

$$(I) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_{n+k} \varphi(n) - a_{n+k+1} \varphi(n+1) \right\}$$

konvergiert. Schreibt man die Relationen (4) und (5) in der Form

$$a_{n+k} \varphi(n) - a_{n+k+1} \varphi(n+1) \geq \alpha a_{n+k},$$

beziehungsweise

$$a_{n+k} \varphi(n) - a_{n+k+1} \varphi(n+1) \geq \beta a_{n+k+1},$$

so erkennt man, daß in beiden Fällen neben der Reihe (I) auch die Reihe $\sum a_n$ konvergiert,¹⁾ so daß jede der Relationen (4) und (5) eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz von $\sum a_n$ darstellt.

Durch Verbindung des Divergenzkriteriums (3) mit dem Konvergenzkriterium (4) oder (5) erhält man sofort die allgemeinen disjunktiven Kriterien zweiter Art. Zu diesem Zwecke bedeute $\overline{\lim} f(n)$ so viel als „obere und untere Unbestimmtheitsgrenze von $f(n)$ bei $\lim n = +\infty$ “²⁾, und wir können dann sagen, indem wir (3) mit (5) verbinden: Kriterium A: Die Reihe $\sum a_n$ konvergiert oder divergiert, je nachdem

$$(6) \quad \overline{\lim} \left\{ \varphi(n) q'_n - \varphi(n+1) \right\} > 0 \text{ oder } < 0$$

ist.

Ebenso ergibt sich aus der Verbindung von (3) mit (4):

Kriterium B: Die Reihe $\sum a_n$ konvergiert oder divergiert, je nachdem

$$(7) \quad \overline{\lim} \left\{ \varphi(n) - q_n \varphi(n+1) \right\} > 0 \text{ oder } < 0$$

ist.³⁾

Falls der Ausdruck hinter dem Zeichen $\overline{\lim}$ auf der linken Seite von (6) bzw. (7) einen Grenzwert bei $\lim n = +\infty$ besitzt,

¹⁾ Dieser Beweis der Konvergenz von $\sum a_n$ nach Stolz, „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, I. Teil“, S. 259.

²⁾ Vergl. Pringsheim, Enzyklopädie I, S. 71.

³⁾ Wenn von den beiden Bedingungen (6) bzw. (7) keine erfüllt ist, so versagt das betreffende Kriterium.

fällt die Bedeutung von $\overline{\lim}$ selbstverständlich mit jener des gewöhnlichen Grenzwertzeichens „ $\lim$ “ zusammen.

Das Kriterium A ist im wesentlichen in der obigen Form (6) zuerst von Dini ¹⁾ aufgestellt worden und entspricht für den Fall der Konvergenz dem Kummerschen allgemeinen Konvergenzkriterium ²⁾; bei dem Kummerschen Kriterium darf indessen die Reihe (1) auch konvergent sein. Dagegen hatte Kummer noch die Nebenbedingung

$$\lim \varphi(n) a_{n+k} = 0$$

beigefügt, welche jedoch, wie für den Fall, daß die Reihe (1) divergiert, schon Dini bemerkt hat, überflüssig ist.

Das Kriterium B rührt im wesentlichen von Paul du Bois-Reymond her, ³⁾ erscheint jedoch dort in einer etwas allgemeineren Gestalt, indem bei seiner Anwendung auf konvergente Reihen $\sum a_n$ die Reihe (1), wie bei Kummer, auch konvergent sein darf. Du Bois-Reymond hielt sein Kriterium für den Fall der Konvergenz mit dem Kummerschen Konvergenzkriterium für äquivalent ⁴⁾, von welchem es sich nur durch einen kleinen Unterschied in der Form unterscheidet. ⁵⁾

In Wirklichkeit ist jedoch das du Bois-Reymondsche Kriterium auch für den Fall der Konvergenz nicht mit dem Kummerschen, sondern mit einem dem letzteren analogen Konvergenzkriterium äquivalent, das zu dem Kummerschen in der nämlichen Beziehung steht, wie das obige Kriterium B zu dem Kriterium A ; und diese beiden Kriterien sind in der hier vorgeführten allgemeinen Gestalt einander nicht äquivalent.

Die Frage nach der Äquivalenz oder Nicht-Äquivalenz der beiden Kriterienformen A und B scheint indessen bisher nirgends untersucht worden zu sein, was darin seinen Grund haben mag, daß dieselben in ihrer gebräuchlichen, speziellen Gestalt der logarithmischen Kriterien tatsächlich äquivalent sind (vergl. Nr. 5).

2. Daß die beiden Kriterien A und B in ihrer allgemeinen Gestalt in der Tat nicht äquivalent sind, soll nun in den folgenden Zeilen nachgewiesen werden. Hierbei heben wir zunächst einige Fälle hervor, in denen sie wirklich das nämliche leisten.

Setzt man

$$(8) \quad \lambda_n = \varphi(n) - q_n \varphi(n+1)$$

¹⁾ Dini, „Sulle serie a termini positivi“. Pisa 1867. S. 23.

²⁾ E. E. Kummer, „Über die Konvergenz und Divergenz der unendlichen Reihen“. Journal f. Math. 13 (1835), S. 172.

³⁾ Vergl. P. du Bois-Reymond, „Eine neue Theorie der Konvergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern“. Journal f. Math. 76 (1873), S. 68.

⁴⁾ Als äquivalent gelten hier zwei Kriterien, welche die Eigenschaft haben, daß sie, auf irgend eine Reihe angewendet, entweder zugleich wirksam sind oder zugleich versagen, von denen also jedes genau das nämliche leistet wie das andere.

⁵⁾ Vergl. du Bois-Reymonds Bemerkung a. a. O. S. 67, Fußnote.

und

$$(9) \quad \lambda'_n = \varphi(n) q'_n - \varphi(n+1),$$

so ist zufolge (2)

$$(10) \quad \lambda_n = q_n \lambda'_n \text{ und } \lambda'_n = q'_n \lambda_n = \frac{\lambda_n}{q_n}.$$

Danach ist es sofort klar, daß, falls nur q_n für alle Werte $n \geq m$ zwischen den nämlichen positiven Zahlen α und β ($0 < \alpha < \beta$) liegt,

$$\text{neben } \overline{\lim} \lambda_n > 0 \text{ auch } \overline{\lim} \lambda'_n > 0,$$

$$\text{neben } \overline{\lim} \lambda_n < 0 \text{ auch } \overline{\lim} \lambda'_n < 0$$

und umgekehrt

$$\text{neben } \overline{\lim} \lambda'_n > 0 \text{ auch } \overline{\lim} \lambda_n > 0,$$

$$\text{neben } \overline{\lim} \lambda'_n < 0 \text{ auch } \overline{\lim} \lambda_n < 0$$

ist. Die beiden Kriterien A und B leisten also im vorliegenden Falle genau dasselbe, d. h. wenn das eine von ihnen Konvergenz oder Divergenz anzeigt, so findet dies auch beim anderen statt; wann das eine versagt, so versagt auch das andere.

Dieser Fall tritt insbesondere dann ein, wenn q_n beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ einen endlichen positiven (von Null verschiedenen) Grenzwert besitzt.

Ist $\lim q_n = 0$ oder aber $\lim q_n = +\infty$, so weiß man zum vorhinein, daß die Reihe $\sum a_n$ im ersteren Falle konvergiert, im letzteren divergiert, so daß die Äquivalenz oder Nicht-Äquivalenz der Kriterien A und B in diesen beiden Fällen völlig belanglos ist. Wollte man aber dieselben trotzdem auf diese beiden Fälle anwenden, so könnte man einfach $\varphi(n) = 1$ setzen, und es würden dann beide Kriterien zugleich Konvergenz bzw. Divergenz anzeigen. Aus diesem Grunde mögen die vorstehenden Fälle von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen sein.

3. Wir nehmen nun an, daß das Kriterium A in einem gewissen, erst noch näher zu bestimmenden Falle Konvergenz oder Divergenz anzeige, und zwar soll dies in der einfachsten Weise dadurch geschehen, daß von einem bestimmten Werte m von n angefangen

$$(11) \quad \lambda'_n = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1, n \geq m)$$

ist. Je nachdem wir $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ sein lassen, haben wir dann den Fall der Konvergenz oder jenen der Divergenz vor uns. Zuzufolge (9) ist unter dieser Voraussetzung

$$(12) \quad q'_n = \frac{\varphi(n+1) + \varepsilon}{\varphi(n)}, \quad q_n = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1) + \varepsilon} \quad (n \geq m).$$

Die divergente Vergleichsreihe (1) beschränken wir zunächst in der Weise, daß wir

$$(13) \quad \lim_{n=+\infty} \varphi(n) = +\infty$$

setzen; hiedurch werden nur solche, stark divergente Reihen ausgeschlossen, deren allgemeines Glied bei unbegrenzt wachsendem Index sich nicht der Grenze Null nähert.

Nun können wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem der Quotient $\varphi(n+1) : \varphi(n)$ bei $\lim n = +\infty$ einen Grenzwert besitzt oder nicht. Ist

$$(14) \quad \lim_{n=+\infty} \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \gamma$$

vorhanden, so muß $\gamma = 1$ sein. Wäre nämlich $\gamma < 1$, so könnte die Gleichung (13) nicht bestehen; wäre dagegen $\gamma > 1$, wobei der Fall $\gamma = +\infty$ mit inbegriffen sein soll, so würde die Reihe (1) offenbar nicht divergieren, sondern konvergieren. Wenn aber $\gamma = 1$ ist, so findet man aus der zweiten Gleichung (12) im Hinblick auf (13) und (14)

$$\lim_{n=+\infty} q_n = 1.$$

Wir sind demnach hier auf einen schon in Nr. 2 erledigten Fall zurückgekommen.

Nunmehr setzen wir voraus, daß der Quotient $\varphi(n+1) : \varphi(n)$ bei $\lim n = +\infty$ keinen Grenzwert, sondern zwei von einander verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen α und β besitze, von denen α die kleinere sein soll, so daß jedenfalls die Beziehungen

$$0 \leq \alpha < \beta \leq +\infty$$

bestehen. Ist hier $0 < \alpha < \beta < +\infty$, sind also α und β zwei endliche und positive Zahlen, so gibt es zwei ebensolche Zahlen α' und β' , so daß

$$0 < \alpha' < \alpha < \beta < \beta'$$

ist, und für welche von einem bestimmten Werte m von n angefangen die Relation

$$\alpha' < \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} < \beta' \quad (n \geq m)$$

stattfindet. Nach der ersten Gleichung (12) ist demnach

$$(15) \quad \alpha' + \frac{\varepsilon}{\varphi(n)} < q'_n < \beta' + \frac{\varepsilon}{\varphi(n)} \quad (n \geq m).$$

Wegen (13) gibt es aber zu jeder noch so kleinen positiven Zahl δ eine natürliche Zahl $m' (\geq m)$ von der Beschaffenheit, daß neben $n \geq m'$

$$|\varepsilon : \varphi(n)| < \delta$$

wird. Wählen wir hier δ kleiner als α' und setzen $\alpha' - \delta = \alpha''$ und $\beta' + \delta = \beta''$, so ist $0 < \alpha'' < \beta''$ und wir haben nach (15)

$$\alpha'' < q'_n < \beta'', \text{ d. i. } \frac{1}{\beta''} < q_n < \frac{1}{\alpha''} \quad (n \geq m').$$

Hieraus erkennt man aber, daß in dem in Rede stehenden Falle alle Werte von q_n zwischen zwei endlichen und positiven Grenzen liegen. Die obige Annahme hat uns also abermals auf den ersten in Nr. 2 besprochenen Fall zurückgeführt.

Es bleibt jetzt, unter Beibehaltung der Gleichungen (11) und (13), noch der Fall zur Untersuchung übrig, daß von den beiden Unbestimmtheitsgrenzen α und β entweder $\alpha = 0$, oder $\beta = +\infty$, oder auch zugleich $\alpha = 0$ und $\beta = +\infty$ ist.

Diesen Fall wollen wir dadurch herbeiführen, daß wir als Vergleichsreihe (1) eine ganz bestimmte divergente Reihe wählen. Eine solche Reihe, welche die hier verlangten Eigenschaften besitzt, erhält man am einfachsten, indem man die harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

mit der Reihe

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

kombiniert. Wir bilden daraus die Reihe

$$(16) \quad 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!} + \dots,$$

welche sicher divergiert, da ja die harmonische Reihe divergent ist. Indem wir die Reihe (16) zur Vergleichsreihe (1) nehmen, wird dann

$$(17) \quad \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 2, \quad \varphi(4) = 2!, \dots$$

und allgemein

$$(18) \quad \varphi(2n) = n!, \quad \varphi(2n+1) = n+1 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

so daß für diese Reihe die Beziehung (13) in Kraft bleibt. Ferner hat man zufolge (18)

$$\frac{\varphi(2n+1)}{\varphi(2n)} = \frac{n+1}{n!}, \quad \frac{\varphi(2n+2)}{\varphi(2n+1)} = \frac{(n+1)!}{n+1} = n!,$$

mithin

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(2n+1)}{\varphi(2n)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(2n+2)}{\varphi(2n+1)} = +\infty.$$

Die Reihe (16) besitzt demnach die oben verlangten Eigenschaften, und es ist für dieselbe $\alpha = 0$ und $\beta = +\infty$.

Nun ergibt sich aus (18) im Hinblick auf die Gleichungen (12)

$$(20) \quad q_{2n} = \frac{1}{q'_{2n}} = \frac{n!}{n+1+\varepsilon}, q_{2n+1} = \frac{1}{q'_{2n+1}} = \frac{n+1}{(n+1)!+\varepsilon} \quad (2n \geq m)$$

und hieraus

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q_{2n} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q_{2n+1} = 0.$$

Da nach (10) und (11)

$$\lambda_n = \varepsilon q_n \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

ist, so folgt aus (21)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\varepsilon \lambda_{2n}) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{2n+1} = 0;$$

λ_n hat also bei $\lim n = +\infty$ die eine Unbestimmtheitsgrenze Null, während die andere, was hier übrigens belanglos ist, $+\infty$ oder $-\infty$ ist, je nachdem $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ ist. Dabei bedeutet λ_n gemäß der Festsetzung (8) nichts anderes als den in der Relation (7) des Kriteriums B hinter dem Zeichen $\lim$ stehenden Ausdruck. Das vorstehende Resultat sagt uns demnach, daß das Kriterium B im vorliegenden Falle unwirksam ist. Wir haben also einen Fall vor uns, in welchem das Kriterium A Konvergenz oder Divergenz anzeigt, je nachdem in (11) $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ genommen wird, während das Kriterium B jedesmal versagt.

Die Reihen $\sum a_n$, welche diesem Falle entsprechen, sind im wesentlichen durch die Gleichungen (2) und (20) bestimmt. Nimmt man in (2) $k = -m$, läßt hierauf n nacheinander die Werte $m, m+1, \dots, p+m-1$ durchlaufen, wobei $p \geq 1$ zu denken ist, und multipliziert schließlich die so erhaltenen Gleichungen miteinander, so findet man

$$a_p = a_0 q_m q_{m+1} \dots q_{p+m-1} \quad (p = 1, 2, 3, \dots).$$

Das Anfangsglied a_0 bleibt dabei willkürlich; man kann dafür jede positive Zahl setzen. Erteilt man ihm den Wert 1, so hat man demnach

$$(22) \quad a_0 = 1, \quad a_p = q_m q_{m+1} \dots q_{p+m-1} \quad (p = 1, 2, 3, \dots).$$

Für den Fall der Konvergenz, in welchem $\varepsilon = 1$ ist, kann man in (20) und (22) $m = 0$ nehmen, und die konvergente Reihe $\sum a_n$ ist dann durch die Gleichungen

$$(23) \quad \begin{cases} a_0 = 1, \quad a_p = q_0 q_1 q_2 \dots q_{p-1} \quad (p = 1, 2, 3, \dots), \\ q_{2n} = \frac{n!}{n+2}, \quad q_{2n+1} = \frac{n+1}{(n+1)!+1} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

bestimmt.

Für den Fall der Divergenz, d. i. für $\varepsilon = -1$, ergibt sich nach (20) $q'_0 = 0$ und $q'_1 = 0$, während die übrigen q'_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) positiv ausfallen. Da verschwindende q'_n hier keinen Sinn haben, müssen wir in diesem Falle die Werte $m = 0$ und $m = 1$ ausschließen. Nehmen wir demgemäß $m = 2$, so ist die divergente Reihe $\sum a_n$ zufolge (20) und (22) durch die Gleichungen definiert:

$$(24) \quad \begin{cases} a_0 = 1, & a_p = q_2 q_3 \dots q_{p+1} \quad (p = 1, 2, 3, \dots), \\ q_{2n} = (n-1)!, & q_{2n+1} = \frac{n+1}{(n+1)! - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

4. Durch das Vorstehende ist der Beweis erbracht, daß die beiden Kriterien A und B nicht äquivalent sind; denn wir haben zwei Fälle vorgeführt, einen für Konvergenz und einen für Divergenz, in denen das Kriterium A sich wirksam zeigt, während das Kriterium B versagt. Ebenso lassen sich auch Fälle namhaft machen, in denen das Kriterium B Konvergenz oder Divergenz anzeigt, während das Kriterium A unwirksam ist. Solche Fälle kann man in ähnlicher Art wie die früheren herbeiführen.

Zu diesem Zwecke wählen wir als Vergleichsreihe wieder die Reihe (16), so daß $\varphi(n)$ wieder durch die Gleichungen (17) oder (18) definiert ist und die Beziehungen (13) und (19) bestehen bleiben, und setzen hierauf

$$(25) \quad \lambda_n = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1; n = m, m+1, m+2, \dots),$$

wobei m eine beliebige natürliche Zahl oder auch Null sein darf. Nach (8) ist sodann

$$(26) \quad q_n = \frac{\varphi(n) - \varepsilon}{\varphi(n+1)}, \quad q'_n = \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n) - \varepsilon} \quad (n \geq m)$$

und aus der letzten Relation folgt mit Rücksicht auf (13) und (19)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q'_{2n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q'_{2n+1} = +\infty,$$

woraus sich im Hinblick auf (10) und (25)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda'_{2n} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\varepsilon \lambda'_{2n+1}) = +\infty$$

ergibt. Ein Blick auf (6) und (9) zeigt uns jetzt, daß das Kriterium A im vorliegenden Falle versagt, während das Kriterium B zufolge (25) Konvergenz oder Divergenz angibt, je nachdem $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ ist.

Aus der ersten Gleichung (26) findet man noch unter Zuziehung von (18)

$$(27) \quad q_{2n} = \frac{n! - \varepsilon}{n+1}, \quad q_{2n+1} = \frac{n+1 - \varepsilon}{(n+1)!}.$$

Für den Fall der Konvergenz, d. i. für $\varepsilon = 1$, ergibt sich hieraus $q_0 = q_1 = q_2 = 0$, während die übrigen q_n ($n = 3, 4, \dots$) positiv ausfallen. Läßt man demgemäß in (22) $m = 3$ sein, so erhält man zur Bestimmung der diesem Falle entsprechenden konvergenten Reihe $\sum a_n$ die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1, \quad a_p = q_3 q_4 \dots q_{p+2} \quad (p = 1, 2, 3, \dots), \\ q_3 = \frac{1}{2}; \quad q_{2n} = \frac{n! - 1}{n + 1}, \quad q_{2n+1} = \frac{n}{(n + 1)!} \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \end{array} \right.$$

Für $\varepsilon = -1$ werden nach (27) alle q_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) positiv, so daß man in (22) $m = 0$ setzen kann. Die zugehörige divergente Reihe $\sum a_n$ ist sodann bestimmt durch die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1, \quad a_p = q_0 q_1 q_2 \dots q_{p-1} \quad (p = 1, 2, 3, \dots), \\ q_{2n} = \frac{n! + 1}{n + 1}, \quad q_{2n+1} = \frac{n + 2}{(n + 1)!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{array} \right.$$

5. Wenn auch, wie soeben gezeigt wurde, die beiden Kriterien A und B in ihrer allgemeinen, durch die Relationen (6) und (7) gegebenen Gestalt nicht äquivalent sind, so können sie doch dadurch äquivalent werden, daß man die dort einzig und allein durch die Divergenz der Reihe (1) beschränkte, positive Funktion $\varphi(n)$ noch weiteren Bedingungen unterwirft. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn man an die Funktion $\varphi(n)$ noch die Forderung stellt, daß

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = 1$$

sein solle. Die Richtigkeit dieser Behauptung wollen wir hier noch nachweisen.

Zu diesem Zwecke sei g eine beliebig große, ε eine beliebig kleine positive Zahl, und zwar die letztere kleiner als 1. Zuzufolge (28) gibt es dann eine natürliche Zahl m von der Eigenschaft, daß für $n > m$

$$(29) \quad \varphi(n) > g \quad \text{und} \quad 1 - \varepsilon < \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} < 1 + \varepsilon$$

ist. Demgemäß denken wir uns im folgenden n stets größer als m . Nach (8) und (10) haben wir noch

$$(30) \quad \lambda'_n = \frac{\lambda_n \varphi(n+1)}{\varphi(n) - \lambda_n},$$

worin $\lambda_n < \varphi(n)$ ist.

Zeigt nun das Kriterium B in einem bestimmten Falle Konvergenz an, so gibt es eine positive Zahl α derart, daß

$$\lambda_n > \alpha \quad (n > m)$$

ist, und nach (30) hat man dann mit Rücksicht auf (29)

$$\lambda'_n > \lambda_n \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} > \alpha (1 - \varepsilon).$$

Somit liegt auch λ'_n über einer bestimmten positiven Zahl, so daß sich in diesem Falle das Kriterium A ebenfalls als wirksam erweist.

Jetzt nehmen wir an, das Kriterium B gebe, auf einen bestimmten Fall angewendet, Divergenz an; es sei also eine positive Zahl α derart vorhanden, daß

$$\lambda_n < -\alpha \quad (n > m)$$

ist. Setzen wir hier $\lambda_n = -\mu_n$ und $\lambda'_n = -\mu'_n$, so ist $\mu_n > \alpha$ und

$$(31) \quad \mu'_n = \frac{\mu_n \varphi(n+1)}{\varphi(n) + \mu_n}.$$

Nun schreiben wir

$$\mu_n = \varphi(n) \nu_n,$$

wobei neben μ_n auch ν_n positiv ist. Liegen dann alle Werte von ν_n unter einer positiven Zahl β , so ist nach (31) unter Berücksichtigung von (29)

$$(32) \quad \mu'_n > \frac{\alpha(1-\varepsilon)}{1+\beta}.$$

Dasselbe gilt auch noch, wenn ν_n die Zahl β erreicht. Wenn dagegen ν_n Werte annimmt, welche die Zahl β übersteigen, so ergibt sich für alle jene Werte von n , für welche $\nu_n > \beta$ ist, aus (31) und (29)

$$(33) \quad \mu'_n = \varphi(n+1) \cdot \frac{\nu_n}{1+\nu_n} = \varphi(n+1) \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\nu_n}\right) > g \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\beta}\right),$$

d. i. $\mu'_n > \frac{g\beta}{1+\beta}.$

Bezeichnen wir den Wert des kleineren der in (32) und (33) rechts stehenden Ausdrücke mit γ , so ist jedenfalls $\mu'_n > \gamma$, also $\lambda'_n < -\gamma$. Wir sehen daraus, daß überall dort, wo das Kriterium B Divergenz anzeigt, das Kriterium A dasselbe leistet.

Das bisherige Ergebnis dieser Nummer berechtigt uns zu der Aussage:

In allen Fällen, wo das Kriterium B unter der Voraussetzung (28) wirksam ist, erweist sich auch das Kriterium A als wirksam.

Es entsteht nun noch die Frage, ob auch das Umgekehrte zutrifft. Um dieselbe zu beantworten, müssen wir jetzt λ_n durch λ'_n ausdrücken, wofür wir aus (30)

$$(34) \quad \lambda_n = \frac{\lambda'_n \varphi(n)}{\varphi(n+1) + \lambda'_n}$$

erhalten.

Soll dann das Kriterium *A* Konvergenz anzeigen, so muß es eine positive Zahl α' geben, so daß

$$\lambda'_n > \alpha' \quad (n > m)$$

ist. Schreiben wir

$$\lambda'_n = \varphi(n) \cdot \nu'_n$$

und geht dabei ν'_n für keinen Wert von n über eine bestimmte positive Zahl β' hinaus, so ergibt sich aus (34) mit Hilfe von (29)

$$(35) \quad \lambda_n > \frac{\alpha'}{1 + \varepsilon + \beta'};$$

wenn es dagegen Werte von n gibt, wofür $\nu'_n > \beta'$ wird, so findet man in derselben Weise für alle diese Werte von n

$$(36) \quad \lambda_n > \frac{\beta' g}{1 + \varepsilon + \beta'}.$$

Es ist demnach, wenn wir den kleineren der in (35) und (36) rechts befindlichen Ausdrücke mit γ' bezeichnen, jedenfalls $\lambda_n > \gamma'$, und daraus ist ersichtlich, daß neben dem Kriterium *A* auch das Kriterium *B* Konvergenz angibt.

Zeigt das Kriterium *A* Divergenz an, so existiert eine positive Zahl α' so, daß

$$\lambda'_n < -\alpha' \quad (n > m)$$

ist. In diesem Falle setzen wir wieder $\lambda'_n = -\mu'_n$ und $\lambda_n = -\mu_n$, worauf die Gleichung (34) in

$$(37) \quad \mu_n = \frac{\mu'_n \varphi(n)}{\varphi(n+1) - \mu'_n}$$

übergeht, worin $\mu'_n < \varphi(n+1)$ ist, da nach (10) λ_n und λ'_n , also auch μ_n und μ'_n stets das nämliche Vorzeichen besitzen. Weil nun $\mu'_n > \alpha'$ ist, so ergibt sich aus (37) und (29)

$$\mu_n > \mu'_n : \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} < \frac{\alpha'}{1 + \varepsilon}.$$

Demnach liegen alle Werte von μ_n über einer bestimmten positiven und daher jene von λ_n unter einer bestimmten negativen Zahl, so daß neben dem Kriterium *A* auch das Kriterium *B* Divergenz aufweist.

Hiemit ist bewiesen, daß die beiden Kriterien A und B unter der Voraussetzung (28) einander äquivalent sind.

Der Forderung (28) entsprechen insbesondere die logarithmischen Kriterien zweiter Art, in welchen $\varphi(n)$ eine der Funktionen

$$n, n \log n, n \log n \log_2 n, \dots$$

allgemein

$$n \log n \log_2 n \dots \log_r n$$

ist, worin $\log_2 n = \log(\log n)$ und für $r > 2$

$$\log_r n = \log(\log_{r-1} n)$$

ist. Wir können somit noch den Satz aussprechen:

Die logarithmischen Kriterien von der Form A und jene von der Form B sind einander vollständig äquivalent.

Aus dem vorstehenden Beweise ist leicht ersichtlich, daß die Äquivalenz der beiden Kriterienformen A und B auch dann noch bestehen bleibt, wenn von den beiden Bedingungen (28) die erste durch

$$\varphi(n) \geq g > 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ersetzt wird; also insbesondere auch, wenn $\varphi(n) \equiv 1$ genommen wird, was übrigens selbstverständlich ist.