Ein diesbezüglicher Vermerk auf den Frachtbriefen war nötig. Nur auf solche Weise konnte der Erhitzung des Saatgutes vorgebeugt werden.

Noch einige Winke möchte ich bezüglich des Eisenbahnversandes angeben: Am vorteilhaftesten bezüglich der Bahnfrachtkosten ist ein Bezug von 75—80 hl, das entspricht etwa 100 Zentner. Die Sichelu sollen nicht wie Obst als Eilgut befördert, sondern als gewöhnliches Stückgut behandelt werden. Wegen des billigeren Spezial-Tarifes III wünschen die Samenhandlungen Deklaration der Sendung im Frachtbrief als Futtereicheln.

Das Sichelverkaufsgeschäft bedeutet für das Forstamt in jedem Maßjahr eine aufregende Arbeitsperiode. Nicht nur das große Risiko, sondern Unannehmlichkeiten aller Art machen die Verkaufsvermittlung manchmal recht schwierig. Die heurigen, durch den Krieg abnormalen Verhältnisse haben ihr Wesentliches dazu beigetragen.

Wenn trotzdem das Forstamt auch in Zukunft dieses Sichelmaßnugungsgeschäft fortsetzen will, so glaubt es damit nicht nur der einheimischen Bevölkerung eine Verdienstgelegenheit zu geben, sondern vor allem der deutschen Forstwirtschaft einen Gefallen dadurch zu erweisen, daß der Samen der vielbewunderten Speßartreichen überall Boden findet.

Beitrag zur vereinfachten Waldwertrechnung und Forststatistik.

Von N. Gennimatás, Professor a. d. Techn. Hochschule in Athen.

Abschnitt I.

Diskussion der Preßler'schen Näherungsformel für den Nachwertsfaktor.

Der Preßler'sche Nachwertsfaktor $N \left(= \frac{M}{m} \right)$ lautet bekanntlich

$$N = \frac{200 + np}{200 - np}.$$

Wie man ersieht, für np konstant bleibt auch N unverändert.

1. Setzt man $n'p' = np$ und setzt man $n' = nk$, $p' = \frac{p}{k}$, so ist

$$(1) \quad \left(1 + \frac{p}{100k} \right)^{nk} \geq \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n,$$

je nachdem

$$k \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 1.$$

Beweis. — Es ist

$$(a) \quad \left(1 + \frac{p}{100k} \right)^{nk} = 1 + \frac{np}{100} + \frac{nk(nk-1)}{2} \left(\frac{p}{100k} \right)^2 + \dots$$

$$(b) \quad \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 1 + \frac{np}{100} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{p}{100}\right)^2 + \dots$$

Das $(r+1)$ te Glied von (a) und (b) lautet entsprechend:

$$(I) \quad \frac{nk(nk-1)(nk-2)\dots(nk-r+1)}{r!} \left(\frac{p}{100k}\right)^r$$

$$(II) \quad \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \left(\frac{p}{100}\right)^r.$$

Ausdruck (I) läßt sich auch schreiben:

$$(Ia) \quad \frac{n\left(n-\frac{1}{k}\right)\left(n-\frac{2}{k}\right)\dots\left(n-\frac{r-1}{k}\right)}{r!} \left(\frac{p}{100}\right)^r.$$

Vergleicht man (Ia) mit (II), so erkennt man sofort die Richtigkeit unserer Behauptung.

2. Der Preßler'sche Nachwertsfaktor ist immer größer als der genau gerechnete $1,0p^n$.

Es ist zunächst

$$(2) \quad \frac{200 + np}{200 - np} \cdot \frac{200 + qp}{200 - qp} < \frac{200 + (n+q)p}{200 - (n+q)p}.$$

Die Richtigkeit obiger Ungleichung erkennt man nach Wegschaffen der Nenner und entsprechender Reduktion.

Außerdem ist

$$(3) \quad 1 + \frac{p}{100} < \frac{200 + p}{200 - p},$$

denn es ist

$$1 + \frac{p}{100} = \frac{100 + p}{100} = \frac{200 + 2p}{200}$$

und

$$\frac{200 + p}{200 - p} = \frac{200 + 2p - p}{200 - p},$$

also, da $\frac{200 + 2p}{200} > 1$:

$$\frac{200 + p}{200 - p} > 1 + \frac{p}{100}.$$

Setzt man nun in (2) $q = n$, so erhält man:

$$\frac{(200 + np)^2}{(200 - np)^2} < \frac{200 + 2np}{200 - 2np};$$

daraus:

$$\frac{(200 + np)^3}{(200 - np)^3} < \frac{200 + 2np}{200 - 2np} \cdot \frac{200 + np}{200 - np} < \frac{200 + 3np}{200 - 3np}$$

und allgemein:

$$\left(\frac{200 + np}{200 - np}\right)^q < \frac{200 + nq p}{200 - nq p}, \text{ wobei } q > 1,$$

oder auch, wenn man $n=1$ und $q=n$ setzt:

$$(4) \quad \left(\frac{200 + p}{200 - p}\right)^n < \frac{200 + np}{200 - np}, \text{ wobei } n > 1.$$

Nun ist wegen (3)

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n < \left(\frac{200 + p}{200 - p}\right)^n,$$

mithin wegen (4) um so mehr:

$$(5) \quad \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n < \frac{200 + np}{200 - np},$$

w. z. b. w.

Aus (1) und (5) folgt, daß für denselben Wert von np die Preßler'sche Formel um so weniger ungenaue Werte des Nachwertfaktors ergibt, je kleiner der Zinsfuß p ist; mit andern Worten, für denselben Genauigkeitsgrad läßt sich die Preßler'sche Formel für um so größere Werte von n anwenden, je kleiner der gewählte Zinsfuß p ist.

3. Bei demselben Wert von p weicht der durch die Preßler'sche Formel ermittelte Wert des Nachwertfaktors von seinem genauen Wert um so mehr ab, je größer der Wert von n ist.

Es ist nämlich für $q > 0$

$$(6) \quad \frac{200 + np}{200 - np} - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n < \frac{200 + (n+q)p}{200 - (n+q)p} - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n+q}.$$

Beweis. — Es ist

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n+q} - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n &= \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^q - 1\right] \\ &< \frac{200 + np}{200 - np} \left(\frac{200 + qp}{200 - qp} - 1\right) \end{aligned}$$

(wegen 5).

Oder auch

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n+q} - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n < \frac{200 + np}{200 - np} \cdot \frac{200 + qp}{200 - qp} - \frac{200 + np}{200 - np}.$$

Nun ist aber (nach voriger Nummer):

$$\frac{200 + np}{200 - np} \cdot \frac{200 + qp}{200 - qp} < \frac{200 + (n+q)p}{200 - (n+q)p},$$

also um so mehr:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n+q} - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n < \frac{200 + (n+q)p}{200 - (n+q)p} - \frac{200 + np}{200 - np};$$

das ist aber nichts anderes als die Ungleichung (6), deren Richtigkeit mithin bewiesen ist.

Abschnitt II.

Das Preßler'sche Zuwachsprozent in neuer Beleuchtung.

Lösen wir die Gleichung

$$\frac{M}{m} = \frac{200 + np}{200 - np}$$

nach p auf, so erhalten wir die Preßler'sche Näherungsformel für das Zuwachsprozent

$$(1) \quad p = \frac{M - m}{M + m} \cdot \frac{200}{n}.$$

Preßler stellte seine Formel dadurch auf, daß er die durchschnittlich jährliche Verzinsung $\frac{M - m}{n}$ im Prozentsatz von dem mittleren

Kapitalwert (Massenvorrat) $\frac{M + m}{2}$ ausdrückte; aus der Proportion

$$\frac{M + m}{2} : \frac{M - m}{n} = 100 : p$$

erhält man nämlich die Formel (1).

Bleibt man nun bei obiger Auffassung der Preßler'schen Formel, so gewinnt man den unangenehmen Eindruck von einer Willkür, an deren Berechtigung man zweifeln darf, da eben durch die Preßler'sche Ableitung die betreffende Näherungsformel in keinen Zusammenhang zur genauen Formel

$$(2) \quad p = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{M}{m}} - 1 \right)$$

gebracht wird.

Nun ergibt sich aber aus der im vorigen Abschnitt entwickelten Diskussion der Preßler'schen Näherungsformel in der Gestalt $\frac{M}{m} = \frac{200 + np}{200 - np}$, daß das Preßler'sche Zuwachsprozent immer kleiner ausfällt als das auf Grund der genauen Formel (2), d. h. nach Zinseszinsen ermittelte p . Wir haben nämlich gezeigt, daß der Preßler'sche Nachwertsfaktor immer größer als $1,0p^n$ ist; ist also N gegeben, so ist nach der Näherungsformel

$$N = \frac{200 + np_1}{200 - np_1}$$

und nach der genauen Formel

$$N = 1,0p_2^n;$$

es muß also sein

$$\frac{200 + np_1}{200 - np_1} = 1,0p_2^n .$$

Da aber nach vorigem Abschnitt

$$\frac{200 + np_1}{200 - np_1} > 1,0p_1^n ,$$

so folgt

$$1,0p_2^n > 1,0p_1^n ,$$

d. h.

$$p_2 > p_1, \text{ w. z. b. w. } ^1)$$

Zum obigen Resultat gelangte auch Baule (Forstwissenschaftl. Centralbl. 1908, S. 85) auf einem weniger elementaren Wege durch Entwicklung der Logarithmen in Reihen.

Aus der Formel $\frac{M}{m} = 1,0p^n$ erhält man nämlich durch Logarithmierung

$$\log \frac{M}{m} = n \log 1,0p ,$$

d. i.

$$(3) \quad n = \frac{\log \frac{M}{m}}{\log 1,0p} .$$

Entwickelt man nun den $\log \text{ nat. } (1+x)$, oder kürzer $L(1+x)$, (wobei $x \leq 1$), nach der Machaurin'schen Reihe, so erhält man:

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (a)$$

Wird darin $-x$ statt x gesetzt, so entsteht

$$L(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots$$

und mithin

$$L \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) \quad (b)$$

Schreibt man nun $\frac{M}{m}$ in der Form

$$\frac{1 + \frac{M-m}{M+m}}{1 - \frac{M-m}{M+m}} ,$$

¹⁾ Schon früher (1873) zeigte Kunze in seiner Holzmeßkunst (S. 229) die Nichtigkeit obigen Ergebnisses. Sein Beweis ist nur nicht ganz allgemein, da er von der besonderen Annahme, M sei kleiner als $2m$ ausging; wie wir aber später sehen werden, für $M > 2m$ brauchen wir auch nicht zu wissen, wie sich das Preßler'sche Zuwachsprozent zum genauen Werte verhalte.

so wird (3) durch Anwendung der Formeln (a) und (b):

$$n = \frac{2 \left(\frac{M-m}{M+m} + \frac{1}{3} \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^5 + \dots \right)}{\frac{p}{100} - \frac{1}{2} \left(\frac{p}{100} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{p}{100} \right)^3 - \dots},$$

und näherungsweise (durch Vernachlässigung der zweiten und übrigen Glieder im Zähler und Nenner obigen Ausdrucks):

$$n = \frac{2 \cdot \frac{M-m}{M+m}}{\frac{p}{100}} = \frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{200}{p},$$

also

$$p = \frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{200}{n}, \quad \text{d. i. die Preßler'sche Formel.}$$

Nun ist der durch obige Gliedervernachlässigung entstandene Ausdruck $\frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{200}{p}$ eigentlich kleiner als n , da einerseits der Zähler des genauen Ausdrucks für n verkleinert, andererseits dessen Nenner vergrößert wurde. Es ist also in der Tat $n < \frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{200}{p}$, also auch $p < \frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{200}{n}$, somit das Preßler'sche Zuwachsprozent größer als das genau ermittelte (nach der Formel $p = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{M}{m}} - 1 \right)$). Zur Herleitung des Preßler'schen

Zuwachsprozentes aus der genauen Formel schlug Baule einen indirekten Weg ein, indem er von dem genauen Werte von n und nicht von p ausging; jedoch hält er seine Ableitung wohl für die natürlichste, wenn nicht die einzige, denn er bemerkt:

„Hier sehen wir die Herkunft der Formel deutlich vor uns, und es ist auffallend, daß Preßler in seinen vielen Meßknechten, Taschenbüchern und Tafeln und die Schriftsteller nach ihm die vorstehende Herleitung nicht erwähnt haben.“

Wir aber finden nicht weniger auffallend, daß Herr Baule, der auf den glücklichen Gedanken kam, den Näherungswert von p aus der genauen Formel herzuleiten, nicht den direkt zum Ziele führenden Weg einschlug. Bevor wir jedoch diesen letzteren Weg betreten, wollen wir eine neue, recht einfache Herleitung des Preßler'schen Zuwachsprozentes mitteilen:

Aus der genauen Beziehung $\frac{M}{m} = 1,0p^n$, d. h. aus der Proportion

$$\frac{M}{m} = \frac{1,0p^n}{1} \text{ erhält man sofort } \frac{M-m}{M+m} = \frac{1,0p^n - 1}{1,0p^n + 1},$$

oder durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes:

$$\frac{M-m}{M+m} = \frac{n \cdot 0,0p + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 0,0p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot 0,0p^3 + \dots}{2 + n \cdot 0,0p + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 0,0p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot 0,0p^3 + \dots},$$

und näherungsweise durch Vernachlässigung der zweiten und übrigen Glieder im Zähler und Nenner auf der rechten Seite:

$$\frac{M-m}{M+m} = \frac{n \cdot 0,0p}{2},$$

b. h.

$$p = \frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{200}{n}, \text{ die Preßler'sche Formel.}$$

Wie man sieht, ist die von Baule angegebene Herleitung recht umständlich im Vergleich zur obigen.

Wir brauchen aber nicht einmal aus der Umformung

$\frac{M-m}{M+m} = \frac{1,0p^n - 1}{1,0p^n + 1}$ der genauen Nachwärtsformel $\frac{M}{m} = 1,0p^n$, sondern aus dieser letzteren selbst auszugehen, um direkt das Preßler'sche Zuwachsprözent zu gewinnen.

Aus der Formel $\frac{M}{m} = 1,0p^n$ ergibt sich

$$1,0p = \sqrt[n]{\frac{M}{m}}, \text{ oder } 1,0p = \left(1 + \frac{M-m}{m}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Der rechtsstehende Ausdruck läßt sich aber in der Form einer unendlichen Reihe schreiben, wenn man annimmt $\frac{M-m}{m}$ sei kleiner als 1

(b. h. $M < 2m$); alsdann erhält man:

$$1,0p = 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{M-m}{m} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{M-m}{m}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1\right) \left(\frac{1}{n} - 2\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{M-m}{m}\right)^3 + \dots$$

b. i.

$$(4) \quad \frac{p}{100} = \frac{1}{n} \cdot \frac{M-m}{m} - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{M-m}{m}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{M-m}{m}\right)^3 - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(3 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{M-m}{m}\right)^4 + \dots$$

Aus (4) ergibt sich eine Näherungsformel, wenn man rechts an Stelle der Faktoren $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $\left(2 - \frac{1}{n}\right)$, $\left(3 - \frac{1}{n}\right)$, ... überall 1 setzt und $\frac{1}{3!}$, $\frac{1}{4!}$, ..., $\frac{1}{n!}$, ... entsprechend durch $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, ..., $\frac{1}{2^{n-1}}$ ersetzt; so erhält man:

$$(5) \quad \frac{p}{100} = \frac{1}{n} \left[\frac{M-m}{m} - \frac{1}{n} \left(\frac{M-m}{m} \right)^2 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{M-m}{m} \right)^3 - \dots \right].$$

Nun ist die in Klammer stehende unendliche Reihe

$$\frac{M-m}{m} - \frac{1}{2} \left(\frac{M-m}{m} \right)^2 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{M-m}{m} \right)^3 - \dots$$

eine geometrische Reihe mit dem Verhältnis $-\frac{M-m}{2m}$, welches negativ und (unserer Annahme nach) absolut genommen kleiner als 1 ist; obige Summe beträgt somit (nach der Formel für die fallenden geometrischen Reihen):

$$\frac{M-m}{1 + \frac{M-m}{2m}} = \frac{2(M-m)}{M+m},$$

mithin wird (5):

$$(5a) \quad \frac{p}{100} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2(M-m)}{M+m}, \quad \text{b. i.}$$

$$(6) \quad p = \frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{200}{n} :$$

das Preßler'sche Zuwachsprozent.

Hier haben wir die direkte Ableitung des Preßler'schen Zuwachsprozentes aus dem genauen Werte von p : sie ist von den bis jetzt angegebenen insofern grundverschieden, als sie zur Näherungsformel aus der genauen Beziehung nichts durch Gliedervernachlässigung, sondern durch Gliedervereinfachung, ohne Änderung der Gliederzahl führt: Der genaue Wert von $0,0p$, in Reihenform geschrieben, besteht aus unendlich vielen Gliedern, aber auch sein angenäherter Wert erscheint in der Form einer unendlichen Reihe; nun wird die Reihe in der genauen Beziehung durch Änderungen in den Ausdrücken, welche ihre Glieder bilden, zu einer fallenden geometrischen Reihe umgewandelt, deren Summe sich nach der bekannten Formel ausrechnen läßt, und somit ergibt sich schließlich die Preßler'sche Zuwachsprozentformel. Unseres Wissens ist dieses obige Verfahren zur Ableitung der Näherungsformel aus der genauen als ganz neu zu bezeichnen.

Bei der in Frage kommenden Herleitung haben wir die Annahme

$$(7) \quad \frac{M}{m} < 2$$

zur Existenzbedingung der Formel gemacht; nun aus (6) erhält man den Preßler'schen Nachwertsfaktor

$$(8) \quad \frac{M}{m} = \frac{200 + np}{200 - np},$$

und der Bedingung (7) entspricht für das Produkt np die Einschränkung in dessen Werte:

$$(9) \quad np < \frac{200}{3};$$

so z. B. für $p=3$ darf die Jahreszahl n den Wert 22 nicht überschreiten. Für $p=3$ und $n=22$ erhält man aus (8):

$$\frac{M}{m} = \frac{200 + 66}{200 - 66} = \frac{133}{67} = 1,985,$$

während der genaue Wert 1,916 (auf drei Dezimalstellen genau) beträgt.

So auch umgekehrt für $\frac{M}{m} = 1,958$ und $n=21$ ergibt sich als Preßler'sches Zuwachsprozent

$$p = \frac{1,958 - 1}{1,958 + 1} \cdot \frac{200}{21} = 3,084,$$

während der genau gerechnete Wert von p 3,25 ist.

Es wäre nun interessant, immer unter der einschränkenden Bedingung $3np < 200$, die größte Abweichung des Preßler'schen Nachwertsfaktors vom genauen Werte zu bestimmen. Aus der Diskussion im vorigen Abschnitt wissen wir, daß für denselben Wert von np die Preßler'sche Formel um so ungenauere Nachwertsfaktoren ergibt, je größer der Zinssatz p gewählt wird, und daß ferner bei demselben Wert von p der Preßler'sche Nachwertsfaktor um so mehr vom genauen Wert abweicht, je größer der Wert von n ist. Wenn also p den Wert 4 nicht übersteigt, so ergibt sich als größte Abweichung des Preßler'schen Nachwertsfaktors vom genauen Werte (für $np=66$) $3\frac{3}{4}\%$. Bei unseren Rechnungen kommen aber Fälle vor, in welchen solche Abweichungen unzulässig sind; so werden wir später (im Weiserprozent) sehen, daß der Genauigkeitsgrad der Preßler'schen Zuwachsprozentformel unter Umständen nicht einmal für $np=30$ (wenn nämlich die Abweichung des Preßler'schen Nachwertsfaktors unter 1% bleibt), den Anforderungen unserer Rechnungsaufgaben genügt.

Die oben angegebene Herleitung der Preßler'schen Zuwachsprozentformel führte zur Aufstellung der Bedingung, M soll kleiner sein als $2m$,

oder $3np$ soll kleiner als 200 sein, als Existenzbedingung der Formel, und diese von Anfang an durch die neue Ableitung der Formel gebotene Gültigkeitsbeschränkung haben obige Auseinandersetzungen genügend gerechtfertigt. So ist auch von diesem Standpunkt aus die neue Herleitung der Formel wertvoller als die übrigen. Ohne obige Herleitung würde der Preßler'sche Nachwertsfaktor $\frac{M}{m} = \frac{200 + np}{200 - np}$ zu seiner theoretischen Existenzbedingung verlangen, daß np kleiner als 200 sei; wie ungenügend aber eine solche Einschränkung ist, ersieht man sofort aus einem Beispiel: nimmt man etwa $np = 180$ an, womit $p = 3$ und $n = 60$, so ergibt die Formel

$$\frac{M}{m} = \frac{200 + 180}{200 - 180} = 16,$$

der richtige Wert aber (1,03%) ist kleiner als 6! Eine Näherungsformel, welche unter Umständen ganz unbrauchbare Resultate für den Nachwertsfaktor ergibt, darf selbstverständlich unter ähnlichen Bedingungen zur Berechnung des Zuwachsprozentos keine Anwendung finden. Es unterliegt also keinem Zweifel, daß die Gültigkeitsgrenzen der Preßler'schen Formel ziemlich eng zu ziehen sind; dann aber kommt man natürlich zu dem Gedanken, ob es nicht möglich wäre, die Formel durch eine andere, ebenfalls einfache, jedoch vorteilhaftere zu ersetzen. Die Lösung dieser für die Waldwertrechnung und Forststatistik sehr wichtigen Aufgabe wollen wir im folgenden unternehmen.

Außer den oben angegebenen Wegen zur Herleitung des Preßler'schen Zuwachsprozentos gibt es auch einen anderen, wir meinen den Weg, durch den Nachwertsfaktor, der ebenfalls zum Ziele führt. Dieser, wie der oben angegebene direkte Weg, blieb bis jetzt unbetreten, und doch ist er recht einfach, außerdem deshalb wertvoll, weil er uns nicht bloß zum Preßler'schen Zuwachsprozent führen, sondern auch in direkte Verbindung mit dem Wege zu den neuen Näherungsformeln setzen wird.

Es ist
$$\frac{M}{m} = 1,0p^n,$$

d. i.

$$\begin{aligned} \frac{M}{m} &= \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 1 + \frac{np}{100} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{p}{100}\right)^2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \left(\frac{p}{100}\right)^3 + \dots \end{aligned}$$

Obige Reihe wird ins Unendliche fortgesetzt, falls n keine ganze Zahl ist, dagegen besteht sie aus $(n+1)$ Gliedern, wenn n ganzzahlig, wie eben im betreffenden Falle. Nichtsdestoweniger liegt kein Hindernis

vor, daß man die betreffende Reihe auch bei ganzzahligem n als eine aus unendlich vielen Gliedern bestehende Reihe betrachte, d. h. von der Form:

$$(10) \quad \frac{M}{m} = 1 + \frac{np}{100} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{p}{100}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{p}{100}\right)^3 + \dots \\ + \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(\frac{p}{100}\right)^n + \frac{n(n-1) \dots (n-n)}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \left(\frac{p}{100}\right)^{n+1} \\ + \frac{n(n-1) \dots (n-n)(n-n-1)}{1 \cdot 2 \dots (n+1)(n+2)} \left(\frac{p}{100}\right)^{n+2} + \dots \text{ ad inf.}$$

Alle Glieder nämlich, die nach dem $(n+1)$ ten Gliede hinzugefügt wurden, sind gleich Null, da bei allen der Faktor $n-n-0$ auftritt; für unsere weiteren Betrachtungen aber ist obige Schreibweise der Formel

$$\frac{M}{m} = 1,0p^n \text{ wohl unentbehrlich.}$$

Ersetzen wir nun alle Faktoren

$$(n-1), (n-2), (n-3), \dots, (n-n), (n-n-1), \dots$$

in (10) durch n und die in den Nennern der Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von $\frac{p}{100}$ auftretenden Faktoren 3, 4, 5, ... sämtlich durch 2, so wird die rechte Seite von (10) zu einem Näherungswert des Nachwertsfaktors umgeformt:

$$(11) \quad \frac{M}{m} = 1 + \frac{np}{100} + \frac{1}{2} \left(\frac{np}{100}\right)^2 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{np}{100}\right)^3 \\ + \dots + \frac{1}{2^n} \left(\frac{np}{100}\right)^{n+1} + \dots \text{ ad inf.}$$

Nehmen wir nun an, $\frac{np}{200}$ sei kleiner als 1, dann bildet die unendliche Potenzreihe

$$\frac{np}{100} + \frac{1}{2} \left(\frac{np}{100}\right)^2 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{np}{100}\right)^3 + \dots$$

eine fallende geometrische Reihe mit dem Verhältnis $\frac{np}{200}$; somit beträgt obige Summe:

$$\frac{\frac{np}{100}}{1 - \frac{np}{200}} = \frac{2np}{200 - np}$$

und (11) wird:

$$\frac{M}{m} = 1 + \frac{2np}{200 - np},$$

d. h.

$$\frac{M}{m} = \frac{200 + np}{200 - np};$$

das ist aber der Preßler'sche Nachwertsfaktor, woraus durch Auflösung nach p das Preßler'sche Zuwachsprozent folgt.

Nun haben wir die Hälfte des neuen Weges zurückgelegt, und in dessen interessantem Mittelpunkt wollen wir eine kurze Zeit verweilen, um einen Rückblick auf die bekannten und neuen Wege zu werfen.

Burckhardt hat bekanntlich die sog. beschränkten Zinseszinsen in die Waldwertrechnung eingeführt; mithin war der Endwert M des Kapitals (Massenvorrats) durch die Formel

$$\frac{M}{m} = 1 + \frac{np}{100} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{p}{100} \right)^2$$

zu ermitteln: die Näherungsformel zur einfacheren Berechnung des Nachwertsfaktors ergab sich durch Vernachlässigung des vierten und aller folgenden Glieder der Reihenentwicklung von $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Einen davon abweichenden Weg schlug aber Preßler ein, um seine Näherungsformel für das Massenzuwachsprozent abzuleiten; er ging nämlich nicht von der genauen Formel aus, sondern er verwandelte die Zinseszinsrechnungsaufgabe in eine Aufgabe von einfachen Zinsen, indem er den mittleren Zuwachs $\frac{M-m}{n}$ „im Prozentsatz von dem mittleren

Massenvorrat $\frac{M+m}{2}$ “ ausdrückte. Nun haben wir gesehen, daß sich auch die Preßler'sche Näherungsformel aus der genauen ableiten läßt: aus der genauen Beziehung $\frac{M-m}{M+m} = \frac{1,0p^n - 1}{1,0p^n + 1}$; indem man zunächst die Potenz $1,0p^n$ durch ihre Entwicklung ersetzt hatte, gelangte man durch Vernachlässigung der zweiten und übrigen Glieder im Zähler und Nenner des auf der rechten Seite unserer Gleichung stehenden Ausdrucks zur Näherungsformel:

$$\frac{M-m}{M+m} = \frac{n \cdot 0,0p}{2}, \text{ d. h. } p = \frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{200}{n};$$

das ist aber das Preßler'sche Zuwachsprozent.

Einen weniger einfachen Weg schlug Baule ein, indem er die Gleichung $\frac{M}{m} = 1,0p^n$ nach n auflöste und die natürlichen Logarithmen von $\frac{M}{m}$ und $1,0p$ durch die entsprechenden unendlichen Reihen ersetzte, um

alsdann im Zähler und Nenner des für n gefundenen genauen Ausdrucks die zweiten und folgenden Glieder zu vernachlässigen; die entstandene Näherungsformel nach p aufgelöst ergab das Preßler'sche Zuwachsprozent.

Die Baule'sche und unsere erste Herleitung des Preßler'schen Zuwachsprozentes haben mit Burdhardt's Gedanken dies gemeinsam, daß die angenäherte Formel aus der genauen durch Gliedervernachlässigung aufzustellen ist.

Frägt man nun, wie es einerseits mit dem Genauigkeitsgrad der Preßler'schen Näherungsformel, andererseits mit deren Gültigkeitsbereich stehe, so lautet aus der Formel selbst (nicht aus der Herleitung!) die mangelhafte Antwort: np soll kleiner als 200 sein. Es ist nämlich

$$p = \frac{M - m}{M + m} \cdot \frac{200}{n}, \text{ d. h. } np = \frac{M - m}{M + m} \cdot 200 < 200;$$

und was hier als wohl selbstverständlich erscheint, erweist sich als Existenzbedingung für den Preßler'schen Nachwertsfaktor $\frac{M}{m} = \frac{200 + np}{200 - np}$ (denn sonst würde er unendlich groß oder negativ, je nachdem np gleich oder größer als 200 wäre).

Es ist nun bemerkenswert, daß die Bedingung $np < 200$ sich erst aus der fertigen Formel erkennen läßt und nicht von Anfang an, mit der Gliedervernachlässigung aus dem genauen Ausdruck, als eine zu dieser Vereinfachung notwendige Bedingung erscheint. In dieser Hinsicht wäre nicht nur die Preßler'sche, sondern auch die von Baule angegebene und unsere erste Herleitung der Formel als mangelhaft zu erklären: durch keine obiger Ableitungen wird ein volles Licht auf den mathematischen Charakter der Preßler'schen Formel geworfen.

Wenn aber an den von Preßler und von Baule eingeschlagenen Wegen obiger Mangel haftet, genügt dagegen eine kleine Modifikation unseres ersten Weges, damit die notwendige Annahme $np < 200$ als Existenzbedingung der Näherungsformel a priori geboten wird.

Wir fanden die genaue Bezeichnung

$$\frac{M - m}{M + m} = \frac{n \cdot 0,0p + \frac{n(n-1)}{2} 0,0p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} 0,0p^3 + \dots}{2 + n \cdot 0,0p + \frac{n(n-1)}{2} 0,0p^2 + \dots}.$$

Daraus erhalten wir den Näherungswert von $\frac{M - m}{M + m}$:

$$\frac{M-m}{M+m} = \frac{n \cdot 0,0p + \frac{n^2}{2} \cdot 0,0p^2 + \frac{n^3}{2^2} \cdot 0,0p^3 + \dots \text{ ad inf.}}{2 + n \cdot 0,0p + \frac{n^2}{2} \cdot 0,0p^2 + \frac{n^3}{2^2} \cdot 0,0p^3 + \dots \text{ ad inf.}}$$

(vgl. unsere letzte Herleitung).

Nehmen wir nun an, $\frac{np}{200}$ sei kleiner als 1, so bildet die Reihe

$$\frac{np}{100} + \frac{n^2}{2} \left(\frac{p}{100}\right)^2 + \frac{n^3}{2^2} \left(\frac{p}{100}\right)^3 + \dots$$

eine fallende geometrische Reihe; somit beträgt obige Summe $\frac{2np}{200 - np}$, und es wird:

$$\frac{M-m}{M+m} = \frac{\frac{2np}{200 - np}}{2 + \frac{2np}{200 - np}} = \frac{np}{200},$$

b. i. $p = \frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{200}{n}$: das Preßler'sche Zuwachsprozent.

Die Herleitung des Preßler'schen Zuwachsprozentes durch Vereinfachung des genauen Wertes für den Ausdruck $\frac{M-m}{M+m}$ gewann somit an Bedeutung: einerseits machte sie das mathematische Wesen der betreffenden Preßler'schen Formel deutlicher, andererseits ergab sie neben dem alten ein ganz neues Verfahren zur Aufstellung der Näherungsformel. Während nämlich bis jetzt die angenähert richtige Formel durch Gliedervernachlässigung aus dem genauen Ausdruck entstand, führte das neue Verfahren dagegen zu demselben Resultat, indem man dem genauen Werte die Gestalt einer unendlichen Reihe gab, um daraus durch geeignete Gliederumformungen, ohne Änderung der Gliederanzahl, eine fallende geometrische Reihe zu erhalten.

Unser neues Verfahren läßt sich aber vorteilhafter direkt auf den genauen Wert des Nachwertsfaktors anwenden. Durch geeignete Vereinfachung des Ausdrucks $1,0p^n$ in Reihenentwicklung fanden wir nämlich als angenäherten Wert des Nachwertsfaktors

$$\frac{M}{m} = 1 + \frac{np}{100} + \frac{1}{2} \left(\frac{np}{100}\right)^2 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{np}{100}\right)^3 + \dots \text{ ad inf.,}$$

woraus, unter der Annahme $\frac{np}{200} < 1$, der Preßler'sche Nachwerts-

faktor $\frac{M}{m} = \frac{200 + np}{200 - np}$ folgte, und somit $p = \frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{200}{n}$, das Preßler'sche Zuwachsprozent.

Wenn wir aber durch obige Herleitung der Preßler'schen Formeln das Preßler'sche Zuwachsprozent indirekt durch den Nachwertsfaktor fanden, so muß sich daselbe doch auch direkt ergeben:

$$\text{Aus der genauen Formel } \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{M}{m}} - 1, \text{ oder auch } \frac{p}{100} = \left(1 + \frac{M-m}{m}\right)^{\frac{1}{n}} - 1, \text{ nachdem die Potenz } \left(1 + \frac{M-m}{m}\right)^{\frac{1}{n}}, \text{ unter der Annahme } \frac{M-m}{m} < 1, \text{ in die Form einer unendlichen Reihe gebracht}$$

wurde, entstand durch geeignete Vereinfachung der auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Glieder das Preßler'sche Zuwachsprozent.

Diese direkte Herleitung der Näherungsformel ergab aber die neue Annahme $M < 2m$ als Existenzbedingung für die Preßler'sche Zuwachsprozentformel, und daraus die Einschränkung $np < \frac{200}{3}$ im Werte des Produktes np ; somit sind die theoretischen Gültigkeitsgrenzen der Preßler'schen Formeln noch enger gezogen, als es bis jetzt geschah ($np < 200$). Aber diese, schon von Anfang an als Existenzbedingung der Formel in deren Anwendung auferlegte Einschränkung wird durch die Praxis als vollkommen richtig erkannt; somit erweist sich von diesem Standpunkt aus obige Herleitung des Preßler'schen Zuwachsprozentes wohl als die zutreffendste.

Mit Hilfe dieser Ableitung und durch die im vorigen Abschnitt angegebene vollständige Diskussion der Preßler'schen Näherungsformel für den Nachwertsfaktor erhalten wir, wie wir schon gesehen haben, sowohl über das Gültigkeitsbereich, als auch über den Genauigkeitsgrad der Preßler'schen Formeln genügenden Aufschluß.

Nun sind wir am Ende unserer Bemerkungen über das Preßler'sche Zuwachsprozent angelangt, und, indem wir diesen Abschnitt schließen, wollen wir den Weg fortsetzen, der uns direkt aus dem genauen Nachwertsfaktor zum Preßler'schen führte, damit wir zu den neuen Näherungsformeln kommen.

Abchnitt III.

Die neuen Näherungsformeln.

Betrachten wir wieder den genauen Wert des Nachwertsfaktors in der Gestalt einer unendlichen Reihe:

$$(1) \quad \frac{M}{m} = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{p}{100} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{p}{100}\right)^2 + \dots \\ + \frac{n(n-1) \dots (n-n)}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \left(\frac{p}{100}\right)^{n+1} + \dots \text{ad inf.}$$

Aus obiger Beziehung ergab sich der Preßler'sche Nachwertsfaktor, nachdem man die Faktoren $(n-1)$, $(n-2)$, ... durch n und im Nenner die Faktoren $3, 4, 5, \dots$ durch 2 ersetzt und zugleich die Annahme $\frac{np}{200} < 1$ gemacht hatte. Nun wollen wir eine neue Formel aufstellen, welche genauere Resultate ergibt als die von Preßler: Wir ersetzen in der Reihe (1) die in den Nennern auftretenden Faktoren wieder durch 2 , von den Faktoren der Zähler aber lassen wir n und $(n-1)$ unverändert, ersetzen dagegen alle übrigen, $(n-2)$, $(n-3)$, ..., durch $(n-1)$; dabei machen wir die Annahme, $(n-1)p$ sei kleiner als 200 ; dann erhält man aus (1):

$$(2) \quad \frac{M}{m} = 1 + \frac{np}{100} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{p}{100}\right)^2 + \frac{n(n-1)^2}{2^2} \left(\frac{p}{100}\right)^3 + \dots \\ + \frac{n(n-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \left(\frac{p}{100}\right)^n + \dots \text{ad inf.}$$

Die Reihe

$$\frac{np}{100} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{p}{100}\right)^2 + \frac{n(n-1)^2}{2^2} \left(\frac{p}{100}\right)^3 + \dots$$

ist aber eine geometrische Reihe, und zwar eine fallende, da ihr Verhältnis $\frac{(n-1)p}{200}$ nach der oben gemachten Annahme kleiner als 1 ist. So läßt sich (2) schreiben:

$$\frac{M}{m} = 1 + \frac{\frac{np}{100}}{1 - \frac{(n-1)p}{200}}$$

d. i.

$$(3) \quad \frac{M}{m} = \frac{200 + (n+1)p}{200 - (n-1)p}$$

und

$$(4) \quad p = \frac{(M-m)200}{M(n-1) + m(n+1)}$$

Die Formeln (3) und (4), welche recht einfach sind, sind genauer als die Preßler'schen Näherungsformeln:

$$\frac{M}{m} = \frac{200 + np}{200 - np} \quad \text{und} \quad p = \frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{200}{n};$$

es ist nämlich, wie man sofort erkennt:

$$\frac{200 + np}{200 - np} > \frac{200 + (n+1)p}{200 - (n-1)p} \geq 1,0 p^n,$$

je nachdem $n \geq 1$.

Das Zuwachsprozent der Formel (4) bleibt, wie man sieht, immer kleiner als das Preßler'sche; für n gleich 1 ergibt (4) das genau gerechnete Zuwachsprozent, während für $n > 1$ das Resultat aus der neuen Näherungsformel immer kleiner als das genaue p ausfällt.

Formel (4) leitete zuerst Runze (Holzmeßkunst 1873, S. 227) auf einem anderen Weg ab: er ging nämlich aus von der genauen Beziehung

$$p = \left(\sqrt[n]{\frac{M}{m}} - 1 \right) 100, \text{ und unter der Annahme, } M \text{ sei kleiner als } 2m,$$

entwickelte er den Ausdruck $\sqrt[n]{\frac{M}{m}} = \left(1 + \frac{M-m}{m} \right)^{\frac{1}{n}}$ in die unendliche

$$\text{Reihe } 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{M-m}{m} - \frac{n-1}{2n^2} \left(\frac{M-m}{m} \right)^2 + \dots;$$

somit ergab sich:

$$\frac{p}{100} = \frac{1}{n} \cdot \frac{M-m}{m} - \frac{n-1}{2n^2} \left(\frac{M-m}{m} \right)^2 + \dots$$

Multipliziert man nun beide Seiten obiger Gleichung mit

$$1 + \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{M-m}{m}, \text{ so wird:}$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{100} \left(1 + \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{M-m}{m} \right) &= \frac{1}{n} \cdot \frac{M-m}{m} - \frac{n-1}{2n^2} \left(\frac{M-m}{m} \right)^2 \\ &+ \frac{n-1}{2n^2} \left(\frac{M-m}{m} \right)^2 - \frac{(n-1)^2}{4n^3} \left(\frac{M-m}{m} \right)^3 + \dots \end{aligned}$$

Die mit $\left(\frac{M-m}{m} \right)^2$ multiplizierten Glieder heben sich auf, und

wenn man die mit den höheren Potenzen von $\frac{M-m}{m}$ behafteten vernachlässigt, erhält man näherungsweise:

$$\frac{p}{100} \left(1 + \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{M-m}{m} \right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{M-m}{m},$$

d. i.

$$p = \frac{M-m}{M(n-1) + m(n+1)} \cdot 200.$$

Wie man sieht, leitete Runze obige Näherungsformel aus der genauen nach dem gewöhnlichen Verfahren, d. h. durch Gliedervernachlässigung ab.

Nach demselben Verfahren aber könnte man die betreffende Formel auch folgenderweise ableiten:

Aus der genauen Beziehung

$$\frac{M - m}{(M + m)n} = \frac{\frac{p}{100} + \frac{n-1}{2} \left(\frac{p}{100}\right)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \left(\frac{p}{100}\right)^3 + \dots}{2 + \frac{np}{100} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{p}{100}\right)^2 + \dots}$$

erhielt man im früheren Abschnitt durch Vernachlässigung der zweiten und übrigen Glieder im Zähler und Nenner obigen rechtsstehenden Ausdrucks das Preßler'sche Zuwachsprozent; wenn man aber diesmal in demselben Ausdruck n durch 1 ersetzt, so erhält man näherungsweise:

$$\frac{M - m}{(M + m)n} = \frac{\frac{p}{100}}{2 + \frac{p}{100}}$$

d. i.

$$p = \frac{M - m}{M(n-1) + m(n+1)} \cdot 200.$$

Wir wollen nun auf Grund der Preßler'schen Auffassung das Runze'sche Zuwachsprozent dem Preßler'schen näher bringen.

Wenn das Kapital m , auf Zinsezinsen angelegt, in n Jahren auf M wächst, so stellt Preßler die angenähert richtige Proportion auf: Das arithmetische Mittel von m und M verhält sich zur durchschnittlich jährlichen Verzinsung, wie 100 zu p ; d. h.

$$\frac{M + m}{2} : \frac{M - m}{n} = 100 : p, \text{ woraus das Preßler'sche Zuwachsprozent } p = \frac{M - m}{M + m} \cdot \frac{200}{n}.$$

Wir aber gehen von der ebenfalls angenähert richtigen Proportion aus: Das arithmetische Mittel von m und M verhält sich zur durchschnittlich jährlichen Verzinsung, wie das arithmetische Mittel von 100 und $100 + p$ zu p ; d. h.

$$\frac{M + m}{2} : \frac{M - m}{n} = \frac{200 + p}{2} : p,$$

woraus das Runze'sche Zuwachsprozent

$$p = \frac{M - m}{M(n-1) + m(n+1)} \cdot 200.$$

Durch Vergleichung obiger Proportion mit der von Preßler angegebenen erkennt man sofort, daß dieses letztere Zuwachsprozent immer größer als das Preßler'sche ausfällt. Ferner ersieht man, daß die betreffende Proportion für $n = 1$ eine ganz genaue Beziehung zwischen

m, M und p darstellt, im Gegensatz zu Preßler's Proportion, die in allen Fällen nur angenähert richtig ist.

Durch diese elementare Herleitung der Formel (4) haben wir zugleich von vornherein gezeigt, daß das Kunze'sche Zuwachsprozent folgerichtiger das Preßler'sche ist, und der mathematische Charakter der neuen Näherungsformel zeigt sich somit deutlicher vor uns.

Nun ist aber zu bemerken, daß Formel (4) auch einem beschränkten Gültigkeitsbereich entspricht; doch ist der erste Schritt zur Aufstellung der Fundamentalformel der vereinfachten Baldwertrechnung schon getan: Ersetzen wir nämlich in der Reihe (1) die in den Zählern auftretenden Faktoren

$$(n-1), (n-2), (n-3), \dots$$

sämtlich durch $n-r$, wobei $r < n$, und in den Nennern der Reihenglieder die Faktoren 3, 4, 5, ... alle durch 2, während wir zugleich annehmen, $(n-r)p$ sei kleiner als 200, so wird (1):

$$(5) \quad \frac{M}{m} = 1 + \frac{np}{100} + \frac{n(n-r)}{2} \left(\frac{p}{100}\right)^2 + \frac{n(n-r)^2}{2^2} \left(\frac{p}{100}\right)^3 + \dots \\ + \frac{n(n-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \left(\frac{p}{100}\right)^n + \dots \text{ad inf.}$$

Nun ist aber die Reihe

$$\frac{np}{100} + \frac{n(n-r)}{2} \left(\frac{p}{100}\right)^2 + \frac{n(n-r)^2}{2^2} \left(\frac{p}{100}\right)^3 + \dots,$$

wegen der Annahme $(n-r)p < 200$, d. h. $\frac{(n-r)p}{200} < 1$, eine fallende geometrische Reihe (mit dem Verhältnis $\frac{(n-r)p}{200}$), und mithin wird Beziehung (5):

$$\frac{M}{m} = 1 + \frac{\frac{np}{100}}{1 - \frac{(n-r)p}{200}},$$

d. i.

$$(6) \quad \frac{M}{m} = \frac{200 + (n+r)p}{200 - (n-r)p}.$$

Bezwecken nun die Näherungsformeln die Vereinfachung in der Rechnung, so wollen wir obige Beziehung als die „Fundamentalformel“ der vereinfachten Baldwertrechnung bezeichnen.

Setzen wir in (6) $r=0$, so erhalten wir den Preßler'schen Nachweisfaktor; nun ist zu bemerken, daß nach obigen Auseinandersetzungen r immer größer als Null genommen werden soll. Bei demselben

Werte von p findet die Formel (6) eine unbeschränkte Anwendung und mit jeder erwünschten Genauigkeit, wenn n sich ändert; es soll nur jedesmal der richtige Wert von r angegeben werden.

So z. B. unter Zugrundelegung des gewöhnlichen Wertes für den forstlichen Zinsfuß, $p = 3\%$, hat man für $n = 1; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40$ entsprechend die Werte von r :

$$r = 1; 1; 1,5; 2; 3; 4; 5,4; 6,92; 8,7.$$

Führt man obige entsprechende Werte von n und r in (6) ein, und bezeichnet mit N den Nachwertsfaktor $\left(= \frac{M}{m}\right)$, so erhält man:

$$N = 1,03; 1,160; 1,344; 1,559; 1,805; 2,094; 2,426; 2,814; 3,262.$$

Obige Ergebnisse wollen wir übersichtlicher in einer kleinen Tabelle anordnen und mit den logarithmisch berechneten Nachwertsfaktoren aus der genauen Formel $N = 1,0p^n$ vergleichen:

Für $p = 3$.

n	r	$\frac{200 + (n + r)p}{200 - (n - r)p}$	$1,0p^n$
1	1	1,030	1,030
5	1	1,160	1,159
10	1,5	1,344	1,344
15	2	1,559	1,558
20	3	1,805	1,806
25	4	2,094	2,094
30	5,4	2,426	2,427
35	6,92	2,814	2,814
40	8,7	3,262	3,262

Die Werte von r sind mit solcher Genauigkeit bestimmt, daß die aus (6) sich ergebenden Werte von N eine 0,001 nicht überschreitende Differenz von den logarithmisch (mit drei Dezimalstellen) berechneten Werten aufweisen; (so stimmen von den neun Werten des Nachwertsfaktors die vier durch die Formel (6) berechneten mit den logarithmisch ermittelten [auf drei Dezimalstellen] ganz überein, während die fünf übrigen Näherungswerte eine Differenz von 0,001 von den richtigen aufweisen).

Die ausgerechneten Werte von r darf man mit hinreichender Genauigkeit für jeden Wert des forstlichen Zinsfußes annehmen.

Die Tabelle läßt sich selbstverständlich etwa bis $n = 120$ fortsetzen; r ist durch Ausprobieren auf Grund der logarithmisch berechneten Werte des Nachwertsfaktors zu ermitteln.

Die Werte von r für zwischenliegende Werte von n sind durch einfache Interpolation zu bestimmen; so z. B. für $n = 27$ ergibt sich

$$r = 4 + \frac{5,4 - 4}{5} \cdot 2 = 4,56;$$

daraus der entsprechende Nachwertsfaktor (für $p = 3$):

$$N = \frac{200 + 31,56 \cdot 3}{200 - 22,44 \cdot 3} = 2,221;$$

der logarithmisch berechnete Wert ist ebenfalls 2,221).

Lösen wir Gleichung (6) nach p bzw. n auf, so finden wir:

$$(7) \quad p = \frac{(M - m) 200}{M(n - r) + m(n + r)}$$

und

$$(8) \quad n = \frac{M - m}{M + m} \cdot \frac{200 + rp}{p}.$$

Eine wohl berechtigte Modifikation des Preßler'schen Gedankens führte uns gleich zum Runze'schen Zuwachsprozent; nun läßt sich aber auch Formel (7) auf demselben elementaren Wege folgenderweise ableiten:

Wächst das Kapital m , auf Zinseszinsen angelegt, innerhalb n Jahre auf den Betrag M , so stellen wir die Proportion auf: das arithmetische Mittel von m und M verhält sich zur durchschnittlich jährlichen Verzinsung, wie das arithmetische Mittel von 100 und $100 + rp$ zu p ; d. h.

$$\frac{M + m}{2} : \frac{M - m}{n} = \frac{200 + rp}{2} : p,$$

woraus durch Auflösung nach p die Formel (7) folgt.

Der Wert von r bei gegebenem n ist aus der oben besprochenen Tabelle zu entnehmen. Eine solche Tafel aber, welche r mit hinreichender Genauigkeit angibt, ermöglicht zugleich die leichte Ermittlung folgender in der Waldwertberechnung vorkommender wichtiger Ausdrücke:

1. des Nachwertsfaktors $1,0 p^n$ durch die Fundamentalformel

$$N = \frac{200 + (n + r)p}{200 - (n - r)p}, \text{ und daraus}$$

2. des Vorwertsfaktors $\frac{1}{1,0 p^n}$ durch die Näherungsformel

$$\frac{1}{N} = \frac{200 - (n - r)p}{200 + (n + r)p};$$

3. des zur Kapitalisierung von periodischen Haubarkeitsnutzungen dienenden Faktors $\frac{200 - (n - r)p}{2np}$ (genauer Ausdruck: $\frac{1}{1,0 p^n - 1}$);

4. des zur Kapitalisierung von periodischen Durchforstungserträgen nötigen Faktors $\frac{200 - (u - r_1)p}{2up} \cdot \frac{200 + (u - m + r_2)p}{200 - (u - m - r_2)p}$.

wobei r_1 und r_2 den Werten $n = u$ und $n = u - m$ entsprechen;

$$\left(\text{genauer Ausdruck: } \frac{1,0 p^{u-m}}{1,0 p^u - 1} \right);$$

$$5. \text{ des zur Kapitalisierung der Kulturkosten brauchbaren Faktors } \frac{200 + (u - r)p}{2 up} \left(\text{genauer Ausdruck: } \frac{1,0 p^u}{1,0 p^u - 1} \right);$$

$$6. \text{ des zur Ermittlung des Endwertes einer zeitlichen jährlichen Rente dienenden Faktors } \frac{200 u}{200 - (u - r)p} \left(\text{genauer Ausdruck: } \frac{1,0 p^u - 1}{0,0 p} \right);$$

7. des zur Berechnung des Anfangswertes einer zeitlichen jährlichen Rente erforderlichen Faktors

$$\frac{200 np}{200 + (n - r)p} \left(\text{genauer Ausdruck: } \frac{1,0 p^n - 1}{1,0 p^n - 0,0 p} \right).$$

Abschnitt IV.

Die neuen Weiserprozentformeln.

Nimmt man nach der Preßler'schen und Heyer'schen Auffassung an, das Grundkapital $B + V$ (B das Boden- und V das Verwaltungskapital) solle mit dem Weiserprozente w verzinsen, und bedeutet A_x bzw. A_{x+n} den Bestandswert im Bestandsalter x bzw. $x + n$, so lautet bekanntlich die allgemeine Weiserprozentformel:

$$(1) \quad A_{x+n} = (A_n + B + V) 1,0 w^n - (B + V).$$

Mit Hilfe der Fundamentalformel (6) (Abschnitt III.) läßt sich obige Gleichung durch die Näherungsformel ersetzen:

$$A_{x+n} + B + V = (A_x + B + V) \cdot \frac{200 + (n + r)w}{200 - (n - r)w};$$

daraus erhält man die neue Weiserprozentformel:

$$(2) \quad w = \frac{200 (A_{x+n} - A_x)}{A_{x+n} (n - r) + A_x (n + r) + 2n (B + V)}.$$

Will man aber bei der Herleitung der Weiserprozentformel das Grundkapital $B + V$, nach Kraft'scher Auffassung (die eigentlich zugleich die richtigere ist) nicht mit dem Weiserprozente, sondern mit dem Wirtschaftszinsfuß p verzinsen lassen, so erhält man die Grundgleichung

$$(3) \quad A_{x+n} = A_x \cdot 1,0 w^n + (B + V) (1,0 p^n - 1).$$

Mit Hilfe der Fundamentalformel (6) wird (3):

$$A_{x+n} = A_x \cdot \frac{200 + (n + r)w}{200 - (n - r)w} + (B + V) \left(\frac{200 + (n + r)p}{200 - (n - r)p} - 1 \right)$$

d. i.

$$A_{x+n} = A_x \cdot \frac{200 + (n + r)w}{200 - (n - r)w} + (B + V) \cdot \frac{2np}{200 - (n - r)p};$$

82 Gennimatás: Beitrag zur vereinfachten Waldwertrechnung und Forststatistik.

und daraus durch Auflösung nach w ergibt sich die zweite Weiserprozentformel:

$$(4) \quad w = \frac{200 (A_{x+n} - A_x - Z)}{n (A_{x+n} + A_x - Z) - r (A_{x+n} - A_x - Z)}.$$

Dabei ist

$$Z = (B + V) \cdot \frac{2np}{200 - (n-r)p},$$

d. h. Z = den Zinsen des Grundkapitals (nach Kraft „Schuldkapitals“).

Da nun die Formel (4) weniger einfacher als (2) ist, während im allgemeinen die Ergebnisse beider Formeln sich ganz belanglos voneinander unterscheiden, so schlagen wir vor, bei Herleitung des Weiserprozentos nur die erste Näherungsformel zu benützen.

Diese neue Formel (2) ergibt bessere Resultate als die bekannte Preßler'sche Weiserprozentformel:

$$w = (a + b + c) \frac{H}{H + G}.$$

Beispiele. — (S. Endres' Waldwertrechnung und Forststatistik S. 225 und folgende.)

1. $A_{x+n} = A_{80} = 9809$; $A_x = A_{70} = 6911$; ($n = 10$). $B = 1057$, $V = 300$.

Nach Formel (2) und mit Hilfe der Tafel der Werte von r folgt:

$$w = \frac{200 (9809 - 6911)}{9809 \cdot 8,5 + 6911 \cdot 11,5 + 1357 \cdot 20} = \frac{579\,600}{83376,5 + 79476,5 + 27140} = \frac{579\,600}{189\,993} = 3,051 \%$$

(Nach der genauen Rechnung: $w = 3,1 \%$.)

Der Bestand ist also noch nicht hiebreif, wenn 3% der unterstellte Wirtschaftszinsfuß ist.

Wendet man aber aufs obige Beispiel die Preßler'sche Formel an, so findet man zunächst als Zuwachsprozent (Qualitäts- + Qualitäts- + Teuerungszuwachsprozent) durch die Preßler'sche Formel

$$\frac{9809 - 6911}{9809 + 6911} \cdot \frac{200}{10} = 3,47 \%.$$

Dann ist $\frac{9809 + 6911}{2} = 8360 \text{ M}$ das mittlere Holzkapital und $1057 + 300 = 1357 \text{ M}$ das Grundkapital; folglich wird

$$w = 3,47 \cdot \frac{8360}{8360 + 1357} = 2,985 \%.$$

Die Preßler'sche Formel führt im obigen Falle zu dem unrichtigen

Siefert und Helbig: Stickstoffdüngungsversuche mit 2- und 4 jähr. Fichten. 83

Ergebnis, der Bestand habe schon die Hiebsreise überschritten, da w kleiner als 3 % ausfällt.

$$2. A_{x+n} = A_{90} = 11240; A_x = A_{80} = 8623; (n = 10).$$

$$B + V \text{ wieder} = 1359.$$

Aus derselben Formel (2) und für $r = 1,5$ erhält man nun:

$$w = \frac{(11240 - 8623) \cdot 200}{11240 \cdot 8,5 + 8623 \cdot 11,5 + 1357 \cdot 20} \\ = \frac{523\,400}{95540 + 99164,5 + 27140} = \frac{523\,400}{221\,844,5} = 2,359\%$$

die Hiebsreise ist überschritten.

Der genaue Wert von w ist 2,4 %; aus der Preßler'schen Formel erhält man $w = 2,31\%$.

Hier auch ist das Ergebnis unserer Formel genauer als das Preßler'sche Weiserprozent.

Stickstoffdüngungsversuche mit 2- und 4 jährigen Fichten und deren Wachstumsergebnisse nach der Verpflanzung ins Freie.

Von Siefert und Helbig (Karlsruhe i/B.).

A, 1. Versuch mit 2 jährigen Pflanzen im Forstgarten zu Karlsruhe i. B.

Der „Verein deutscher forstlicher Versuchsanstalten“ beschloß während seiner Tagung in Baden-Baden im Herbst 1905, die Forstdüngung aufzunehmen und empfahl zunächst Versuchsanstellungen mit Stickstoffdüngung.

Im Anschluß daran wurde 1906 im Forstgarten der Techn. Hochschule Karlsruhe eine Fläche abgetrieben, die mit einem räumlichen Oberholzbestand von Hainbuchen, Kiefern und Eichen bestockt war. Die Stöcke wurden gerodet, Humusschicht und Grasnarbe bis zum ungefärbten Mineralboden entfernt, und dieser auf 30 cm Tiefe rajolt; jede ersichtliche Ungleichheit wurde zu beseitigen gesucht. Zur

I. Standortsbewertung

mögen folgende Angaben dienen: die Fläche liegt 117 m über NN und ist vollkommen eben. Nach den Aufzeichnungen der Karlsruher Wetterwarte¹⁾, die nur wenig über 1 km von der Versuchsfläche entfernt liegt, beträgt die mittlere Jahrestemperatur (1886—1910) 9,7° C., die mittlere Jahresmenge der Niederschläge (1888—1907) 732 mm, die mittlere Sonnen-

¹⁾ Diese meteorologischen Angaben verdanken wir Herrn Prof. Dr. Schultzeiß, Karlsruhe i. B.

Scheindauer (1895—1913) = 1574,5 Stunden. Die Monatsmittel der Temperatur, Niederschläge und Sonnenscheindauer sind:

	Temperatur (1886—1910) ° C.	Niederschläge (1888—1907) mm	Sonnenscheindauer (1895—1913) Stunden
Januar	0,3	53,4	43,1
Februar	1,8	45,2	69,0
März	5,2	58,6	109,2
April	9,7	53,0	153,7
Mai	13,9	57,2	202,9
Juni	17,6	78,0	217,5
Juli	18,9	84,3	232,9
August	18,2	65,5	213,6
September	14,5	61,0	143,3
Oktober	9,7	74,0	98,7
November	5,0	48,6	56,2
Dezember	1,6	53,2	34,4
Durchschnitt	9,7	732,0	1574,5 .

Nebel, Duft und Schneeanhang sind selten, dagegen schädigen Spätfröste oftmals die Vegetation. Der Boden war benarbt, und zwar mit Pflrieme, Himbeere, Brombeere, Farn, Luzula und Süßgräsern bedeckt. Ein 1,5 m tiefer Bodeneinschlag ergab unter spärlichen Abfällen der Eiche und Hainbuche eine rund 1—2 cm mächtige Modersicht, dann folgt, rund 30 cm mächtig, Mullsand, bis 60 cm Mittelsand und darunter bis 1,50 Rheinkies.

Die für den Versuch in Frage kommende Bodenschicht zeigte folgende Eigenschaften:

Anteile über 5 mm Durchmesser . . .	= 8,5 %	} Trennung erfolgte durch Absieben
" zwischen 2 und 5 mm Durchmesser	= 5,0 "	
" " 1 " 2 " "	= 36,0 "	
" " 0,5 " 1 " "	= 37,0 "	
" unter 0,5 mm Durchmesser . .	= 13,5 "	

Der Boden kann somit als anlehmiger, mittelförniger, mäßig frischer Sand angesprochen werden. Das Grundwasser steht bei etwa 7 m an.

Die chemische Untersuchung, seinerzeit von Forstkandidat Rosch ausgeführt, ergab, daß aus 100 Teilen lufttrockenen Bodens (unter 2 mm Korngröße) durch Salzsäure von 1,12 spez. Gew. gelöst wurden:

Teile		Analyfengang nach Rammann, Jahrb. d. Kgl. Pr. Geol. Landesanstalt 1885, S. 16, Anhang.
Kieselsäure (SiO_2) . . .	0,046	
Eisen (Fe_2O_3) . . .	1,105	
Tonerde (Al_2O_3) . . .	1,636	
Mangan (MnO) . . .	0,054	
Kalk (CaO) . . .	0,101	
Magnesia (MgO) . . .	0,142	
Phosphorsäure (P_2O_5) . .	0,049	
Schwefelsäure (SO_3) . .	0,036	
Kali (K_2O)' . . .	0,059	
Natron (Na_2O) . . .	0,632	
<hr/>		
3,860 .		

Glühverlust = 2,23 %.

Wassergehalt bei $105^\circ = 0,707\%$.

II. Düngungsplan.

Wie aus dem Titel ersichtlich, galt es, verschiedene Stickstoffdünger in ihrer Einwirkung auf zweijährige Fichtenjaatpflanzen zu erproben. Es sollte zunächst nur eine Düngung gegeben werden, und die Pflanzen 2 Jahre im Düngungsfelde verbleiben. Hundert lufttrockene Pflanzen wogen bei Beginn des Versuches 216 g.

Als Düngemittel wählte man Chilealpeter, schwefelsaures Ammoniak und den Norgesalpeter¹⁾, teils als alleinige Düngung, teils in Verbindung mit 40prozent. Kalisalz und Thomasmehl. Auch perennierende Lupine kam als Zwischenfaat in Anwendung, doch sei gleich hier vorweg gesagt, daß dieselbe so schlecht aufging, daß von einer düngenden Wirkung kaum die Rede sein kann.

Die Düngermengen für den Hektar waren:

45 kg N	a)	in Form von 15prozent. Chilealpeter . .	= 300 kg
	b)	" " " 20 " schwefel. Ammoniak	= 225 "
	c)	" " " 13 " Norgesalpeter ¹⁾ . .	= 346 "
80 kg K_2O	"	" " des 40 " Kalisalzes . . .	= 200 "
175 " P_2O_5	"	" " " 17,5 " Thomasmehls . .	= 1000 "

¹⁾ Norgesalpeter (früher Kalkalpeter) ist fast reines Kalziumnitrat. Es wird dargestellt durch Bindung atmosphärischen Stickstoffs mit Sauerstoff im elektrischen Flammbogen und nachträglicher Abfättigung mit Kalk. Bei Beginn unseres Versuches war das Düngemittel noch nicht im Handel, es wurde uns von der Badischen Anilin- und Sodafabrik Ludwigshafen unentgeltlich zur Verfügung gestellt, wofür hier nochmals gedankt sei.

Lupine wurde als Punktsaat, 3 : 3 cm 1 Korn, zwischen je 2 Pflanzreihen gegeben.

Düngungszeit: Kalisalز und Thomasmehl wurden am 9. März 1907, schwefelsaures Ammoniak am 22. März 1907, d. h. 26 bzw. 14 Tage vor Einbringung der Pflänzchen untergebracht. Diese 3 Düngemittel wurden zur gleichmäßigen Verteilung mit Sand innig vermischt, sodann breitwürfig über die Parzellen gestreut und locker eingereicht. Ebenso wurde mit dem Chile- und Norgespeter verfahren; nur teilte man die obigen Mengen in zwei Hälften und streute diese zwischen die Pflanzreihen auf den Boden, die eine Hälfte am 17. Mai, die andere am 14. Juni, d. h. 42 bzw. 70 Tage nach der Versäulung, die in der Zeit vom 4.—6. April 1907 stattfand. Dem Kalkgehalte des Thomasmehls entsprechend waren 2 Felder mit 480 kg Kalk in Form von kohlen-saurem Kalk für den Hektar am 23. März 1907 gedüngt worden; der Kalkgehalt des Norgespeters wurde bei dessen geringem Quantum nicht berücksichtigt.

Die Flächeneinteilung des rechtwinkligen Düngungsfeldes geschah derart, daß es in 5×6 über- und nebeneinanderliegende Einzel-felder geteilt wurde. Die Einzelparzelle maß 2,5 : 2,5 m und bot bei einer Versäulung im Verband von 15 : 15 cm : $16 \times 16 = 256$ Fichten Standraum. Der dann verbleibende Flächenrest von jederseits 5 cm Breite diente zusammen mit jenem der Nachbarparzellen zu einem 10 cm breiten Pfädchen rings um jede Parzelle.

Von den 256 Pflanzen einer Parzelle wurden sodann immer 100 Stück als eigentliche Versuchspflanzen ausgeschieden, und zwar derart, daß sie, im Innern des Feldes stehend (B), rund herum von einem 3 Fichtenreihen tragenden Isolierstreifen (A) umgeben waren:

Etwaige Abgänge von den „B“-Pflanzen wurden mit entsprechenden „A“-Pflanzen ergänzt und letztere aus einem außerhalb der Düngungsfläche vorhandenen Reservebestande vervollständigt.

Auf diesen 30 Feldern (Nr. 13—42) wurden die verschiedenen Düngungen in je 2—4 Parzellen wie folgt ausgeführt:

a) 3	Parzellen Nr. 13. 23. 33	} Volldüngung mit: } Chilealpeter bez. 40 Prozent. Kalisalz u. } schwefl. Ammoniak } Thomasmehl, dazu: } oder Norgespeter
b) 3	" " 14. 24. 34	
c) 3	" " 16. 26. 36	
d) 3	" " 17. 27. 37	Kalisalz und Thomasmehl,
e) 3	" " 18. 28. 38	nur Chilealpeter,
f) 3	" " 19. 29. 39	" schwefel. Ammoniak,
g) 3	" " 21. 31. 41	" Norgespeter,
h) 2	" " 15. 35	" Kalk,
i) 3	" " 22. 32. 42	Lupinus perennis,
k) 4	" " 20. 25. 30. 40	ohne Düngung.

III. Verlauf des Versuches.

Die in Gräbchen mittelst des Pflanzbrettes in der Zeit vom 4.—6. April 1907 gesetzten zweijährigen Versuchspflanzen wuchsen gut an, die Nachbesserungen waren infolgedessen nur gering. Erreicht wurden:

Auf Parzellen gebüngt mit		Pflanzen 20./7. 1907 5./11. 1908		Anmerkung
a)		2	2	Der Abgang 1907 beruht zumeist wohl auf fehler- haftem Setzen, 1908 war geringer Enge- ringtrock die Hauptursache.
b)	40 Prozent. Kalisalz und	—	2	
c)	Thomasmehl, dazu	3	3	
d)	Kalisalz (40 Prozent.) und Thomasmehl	1	2	
e)	Chilealpeter, allein	3	2	
f)	schwefel. Ammoniak, allein	3	—	
g)	Norgespeter, allein	1	1	
h)	Kalk, allein	3	2	
i)	Lupinus perennis	3	4	
k)	ohne Düngung	2	3	
Summa		21 = 0,5 %	21 = 0,5 %	

Man ersieht daraus, daß der Abgang sich fast gleichmäßig verteilte.

In der Annahme, daß nach Stickstoffdüngung ein besonderes Ergrünen der Blattorgane zu beobachten sei, wurde von Zeit zu Zeit die Färbung der letzteren beurteilt. Nach 3 Klassen:

I = stark grün, II = mittel grün, III = schwach grün
unterschieden, ergab sich der in Tabelle I (S. 88) niedergelegte Befund:

Man ersieht daraus:

1. daß die am stärksten ergrüntten Parzellen jene sind, die eine Volldüngung erhielten, dies blieb auch im zweiten Jahre so, obwohl während desselben eine weitere Düngung nicht erfolgte;
2. daß die mit 40 Prozent. Kalisalz und Thomasmehl, also ohne Stickstoff gedüngten Parzellen, ständig eine mittlere Farbe behielten;

(Fortsetzung S. 90 unten.)

Tabelle I
über Ergrünen der Blattorgane der nach A₁ behandelten Gerundspflanzen.

Stimmen der gleich behandelten Pflanzen	Angabe über Düngung	16./7. 07			4./9. 07			20./12. 07		
		I	II	III	I	II	III	I	II	III
		5./2. 08			16./7. 08			5./9. 08		
13. 23. 33. 14. 24. 34. 16. 26. 36.	Gefälschter . . . schwefel. Mimoniat Vorgesäpeter . . .	zusammen mit 40 prozent. Kalks und Zwonnasmehl als Düngung			zusammen mit 40 prozent. Kalks und Zwonnasmehl als Düngung			zusammen mit 40 prozent. Kalks und Zwonnasmehl als Düngung		
17. 27. 37.	40 prozentiges Kalksals und Zwonnasmehl . . .	—			—			—		
18. 28. 38.	Gefälschter . . .	—			—			—		
19. 29. 39.	schwefelsaures Mimoniat . . .	—			—			—		
21. 31. 41.	Vorgesäpeter . . .	—			—			—		
15. 35.	Kalk . . .	—			—			—		
22. 32. 42.	Lupinus perennis . . .	—			—			—		
20. 25. 30. 40	ohne Düngung . . .	—			—			—		
13. 23. 33. 14. 24. 34. 16. 26. 36.	Gefälschter . . . schwefel. Mimoniat Vorgesäpeter . . .	zusammen mit 40 prozent. Kalks und Zwonnasmehl als Düngung			zusammen mit 40 prozent. Kalks und Zwonnasmehl als Düngung			zusammen mit 40 prozent. Kalks und Zwonnasmehl als Düngung		
17. 27. 37.	40 prozentiges Kalksals und Zwonnasmehl . . .	—			—			—		
18. 28. 38.	Gefälschter . . .	—			—			—		
19. 29. 39.	schwefelsaures Mimoniat . . .	—			—			—		
21. 31. 41.	Vorgesäpeter . . .	—			—			—		
15. 35.	Kalk . . .	—			—			—		
22. 32. 42.	Lupinus perennis . . .	—			—			—		
20. 25. 30. 40	ohne Düngung . . .	—			—			—		

Liefert und Helbig:

Tabelle II.

Gesamt- und Mittelhöhen der nach A, 1 behandelten Versuchspflanzen.

Nr. der Parzelle	Angabe über Düngung	100 Pflanzen maßen in cm			Für 100 Pflanzen betrug daher die Steigerung der Höhe				
		vor der Versäulung (2 jährig)	3 jährig	1908	cm		in % der ursprünglichen Höhe		
					im Vegetationsjahr 1907	im Vegetationsjahr 1908	im Vegetationsjahr 1907	im Vegetationsjahr 1908	überhaupt nach d. Versäulung
13	} Chilealpeter	1450	2248	3 810	798	1562			
23		1330	2385	4 356	1055	1971			
33		1385	2330	4 034	945	1704			
	Sa.	4165	6963	12 200	2798	5237			
	Durchschnitt für 100 Pfl.	1388	2321	4 067	933	1746	67,2	75,2	193,0
14	} Schwefelsaures Ammoniak	1426	2271	3 891	845	1620			
24		1176	2088	3 834	912	1746			
34		1258	2258	4 078	1000	1820			
	Sa.	3860	6617	11 803	2757	5186			
	Durchschnitt für 100 Pfl.	1287	2206	3 935	919	1729	71,4	78,4	205,8
16	} Norgefalpeter	1353	2337	3 992	984	1655			
26		1394	2234	3 685	840	1451			
36		1211	2426	4 217	1215	1791			
	Sa.	3958	6997	11 894	3039	4897			
	Durchschnitt für 100 Pfl.	1319	2332	3 964	1013	1632	77,1	70,0	200,5
17	} 40prozent. Kalisalz und {	1339	1957	3 508	618	1551			
27		1332	1915	3 446	583	1531			
37		1328	1868	3 222	540	1354			
	Sa.	3999	5740	10 176	1741	4436			
	Durchschnitt für 100 Pfl.	1333	1913	3 392	580	1479	43,5	77,3	154,5
18	} Chilealpeter {	1228	1834	3 231	606	1397			
28		1210	1951	3 250	741	1299			
38		1403	1933	2 919	530	986			
	Sa.	3841	5718	9 400	1877	3682			
	Durchschnitt für 100 Pfl.	1280	1906	3 133	626	1227	48,9	64,4	144,8
19	} Schwefels. Ammoniak . {	1395	2003	3 304	608	1301			
29		1296	1814	2 737	518	923			
39		1417	2016	2 808	599	792			
	Sa.	4108	5833	8 849	1725	3016			
	Durchschnitt für 100 Pfl.	1369	1944	2 949	575	1005	42,0	51,6	115,4

Nr. der Parzelle	Angabe über Düngung	100 Pflanzen maßen in cm			Für 100 Pflanzen betrug daher die Steigerung der Höhe						
		vor der Versuchung (2-jährig)	1907 3-jährig	1908 4-jährig	cm		in % der ursprüng- lichen Höhe			überhaupt nach d. Versuchung	
					im Vege- tationsjahr 1907	im Vege- tationsjahr 1908	im Vege- tationsjahr 1907	im Vege- tationsjahr 1908			
21	} Norgespätpeter . . . }	1391	2056	3 356	665	1300					
31		1314	1901	3 200	587	1299					
41		1297	2034	3 068	737	1034					
		Sa.	4002	5991	9 624	1989	3633				
	Durchschnitt für 100 Pfl.	1334	1997	3 208	663	1211	49,7	60,6	140,5		
15	} Kalk entsprechend dem Ge- halt des Thomasmehls }	1362	2036	3 315	674	1279					
35		1222	1718	2 965	496	1247					
		Sa.	2584	3754	6 280	1170	2526				
		Durchschnitt für 100 Pfl.	1292	1877	3 140	585	1263	45,3	67,3	143,0	
22	} Lupinus perennis . }	1326	1852	3 055	526	1203					
32		1378	1882	2 794	504	912					
42		1199	1813	3 008	614	1195					
		Sa.	3903	5547	8 857	1644	3310				
	Durchschnitt für 100 Pfl.	1301	1849	2 952	548	1103	42,1	59,7	126,9		
25	} Unge düngt . . . }	1244	1829	3 191	585	1362					
30		1181	1733	2 738	552	1005					
40		1302	1828	2 863	526	1035					
20		1382	2016	3 369	634	1353					
		Sa.	5109	7406	12 161	2297	4755				
	Durchschnitt für 100 Pfl.	1277	1851	3 040	574	1189	44,9	64,2	138,1		

3. daß die nur mit Stickstoff gedüngten zwischen mittel und schwach grün wechselten;

4. daß ähnliches auch bei Kalbdüngung erfolgte;

5. daß die Pflanzen „ohne“ Düngung am wenigsten ergrünten.

Nach beendiger Vegetationszeit erfolgte die Ermittlung der Wachstumsergebnisse nach Tabelle II (s. S. 89); sämtliche Versuchspflanzen wurden gemessen.

Die Resultate der vorstehenden Tabelle sind etwa die folgenden:

1. Die Parzellen mit Volldüngung waren stets allen anderen im Höhenwachstum überlegen. Dies tritt besonders im ersten Versuchsjahr in Erscheinung.

(Fortsetzung S. 92.)

Tabelle III.
Darstellung der Größen- und des Gewichtsverhältnisses der nach A, 1 behandelten Versuchspflanzen.

Nr. der Parzelle	Zahl der untersuchten Pflanzen	Angabe über Düngung	Gewicht für 100 Pflanzen g		Wurzelabgang %	Vom Gesamtgewicht (Spalte II) entfallen in g auf			Nach Prozenten entfallen vom Gesamtgewicht (Spalte II) auf				Der Wurzelanteil beträgt in %		Längenmaße für eine Pflanze cm			Von der Gesamtlänge (Spalte XII) entfallen in % auf		Durchschnitt = 38,73
			frisch mit anhängender Erde	lufttrocken (ohne Erde)		die oberirdische Zelle (mit Wurzeln)	die Wurzeln	die Wurzeln	die Wurzeln (mit Wurzeln)	die Wurzeln	die Wurzeln (ohne Wurzeln)	Gesamtlänge mit Wurzeln	oberirdischer Teil	Wurzel	die oberirdische Zelle	die Wurzeln				
33 A	20	K. T. C. ¹⁾	3675	1745	52,52	1335	410	700	23,50	40,12	36,38	52,43	58,85	34,65	24,20	58,88	41,12			
34 A	20	K. T. A.	3975	1985	50,06	1555	430	735	21,66	37,03	41,31	47,27	56,10	37,90	18,20	63,56	36,44			
36 A	20	K. T. NS.	4725	2285	51,64	1805	480	925	21,00	40,48	38,52	51,25	55,15	35,60	19,55	64,55	35,45			
37 A	20	K. T.	3900	1745	55,26	1295	450	675	25,79	38,68	35,52	52,13	51,65	31,75	19,90	61,47	38,53			
38 A	20	C.	2450	1135	53,67	835	300	450	26,43	39,65	33,92	53,89	48,10	27,60	20,50	57,38	42,62			
39 A	20	A.	2900	1270	56,21	965	305	550	24,02	43,31	32,67	56,98	45,20	26,80	18,40	59,29	40,71			
41 A	20	NS.	2600	1075	58,65	825	250	440	23,26	40,93	35,81	53,82	43,25	27,35	15,90	63,24	36,76			
42 A	20	Lupin. per.	3250	1475	54,62	1125	350	600	23,73	40,58	35,59	52,33	51,65	31,30	20,35	60,60	39,40			
30 A	50	ungebüßt	2760	1330	51,81	1004	326	554	24,51	41,66	33,83	55,18	45,68	29,12	16,56	63,75	36,25			
					Durchschnitt = 53,56				Durchschnitt = 23,77								Durchschnitt = 52,8			

¹⁾ K. = 40 Prozent. Kalksalz; T. = Thomasmehl; C. = Epilepsalpete; A. = Schwefelsaures Ammoniak; NS. = Norgesalpete; auch die folgenden Tabellen zeigen die gleichen Abkürzungen.

2. Im zweiten Versuchsjahr (in dem keine Stickstoffnachdüngung erfolgte), erreichte die Kali=Thomasmehl-Düngung gleiche Höhensteigerung wie Volldüngung.
3. Chilesalpeter, schwefelsaures Ammoniak und Norgesalpeter als alleinige Düngung bewirkten gegen ungedüngt in beiden Jahren keinen Vorsprung.
4. Gleiches gilt für Kalk und Lupine, die, wie erwähnt, so schlecht aufging, daß eine Stickstoffzufuhr kaum in Frage kommen kann.
5. Das neue Düngemittel „Norgesalpeter“ zeigte sich dem Chilesalpeter und dem schwefelsauren Ammoniak vollkommen ebenbürtig in der Wirkung.
6. Die prozentuale Steigerung der Höhe war bei den vollgedüngten Pflanzen im Jahre 1908 etwa gleich jener des Jahres 1907, dagegen sind die einseitig bezw. ungedüngten Pflanzen im 2. Versuchsjahre (1908) mehr vorangekommen, d. h. sie weisen für dieses Jahr gegenüber dem vorhergehenden eine stärkere Steigerung des Höhenwachstums auf.

Der Verband 15:15 cm machte nach 2 Jahren eine Lockerung nötig, infolgedessen wurden im Herbst 1908 die nunmehr 4jährigen Pflanzen nach vorheriger Messung ausgehoben, teils am gleichen Ort im Verband 30:30 cm neu verpflanzt (Resultate im Heft Nr. 3), teils auf Sand- bezw. Lehmboden des Höffort- und Jagdamtes Karlsruhe bezw. des Forstamtes Durlach ins Freie gesetzt (Resultate im Heft Nr. 3), ein kleiner Teil endlich wurde zu eingehenderer Ermittlung der Größen- und Gewichtsverhältnisse genauer untersucht. Die Tabelle III (S. 91) zeigt die Resultate.

Aus dieser Tabelle endgültige Schlüsse zu ziehen, dürfte bei der geringen Anzahl der untersuchten Pflanzen nicht angezeigt erscheinen, doch sei darauf hingewiesen, daß:

1. die vollgedüngten Pflanzen bei hohen Wachstumsleistungen mit einem relativ kleineren Wurzelsystem auskamen als die nur teilweise oder nicht gedüngten Pflanzen (Nr. 33 A, 34 A, 36 A gegen Nr. 30 A, 37—42 A),
2. die relativen Nadelmengen bei Nr. 33 A, 34 A, 36 A, gegen Nr. 30 A und 37—42 A nur sehr geringe Unterschiede aufweisen.¹⁾
(Schluß folgt.)

¹⁾ Bis hierher wurden die Resultate bereits in den Mitteilungen der Deutschen Landwirtschafts-Gesellschaft 1910, Stück 11, S. 158 veröffentlicht, zum besseren Verständnis der folgenden Untersuchungen, die wegen Verwendung des gleichen Pflanzenmaterials genetisch damit zusammenhängen, wurde erneuter Abdruck nötig.