Durch eine Minimumbetrachtung leitet er zunächst mittelst Variation von U allein einen Werth für $A \cdot \varepsilon$ ab, der aber nur eine statische Bedeutung haben kann, den jedoch Lorenzoni beibehält. Während dieser nun nach dem

Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft die Gleichung $d(E + U) : dt = 0$ bildet, leitet Peirce nach dem Hamilton'schen Princip zwei Differentialgleichungen ab, aus denen er meine Werthe von A und L' hätte finden müssen.

Potsdam, April 1897.

Helmert.

Ueber die Benutzung der Projectionsfactoren bei Untersuchung der systematischen Fehler heliometrischer Distanzmessungen.

Von H. Battermann.

Herr Dr. Cohn spricht A. N. 3411 die Ansicht aus, dass meine Bemerkungen über die Unsicherheit der Projectionsfactoren (A. N. 3406) sich nur auf die Bestimmung des Scalenwerthes, aber nicht auf die Bestimmung systematischer Fehler beziehen könnten. Diese Unsicherheit müsse als die zufälligen Messungsfehler vergrößernd angesehen werden und lasse sich nicht umgehen.

Ich glaube nun genügend darauf hingewiesen zu haben, dass die Unsicherheit der Projectionsfactoren allerdings nur in dem Falle unmerklich wird, wenn jene Factoren aus scharfen Positionswinkelmessungen an Heliometern bestimmt sind, oder wenn die Sterne des Bogens sehr nahe in einem grössten Kreise liegen. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so lässt sich thatsächlich die Unsicherheit der Meridianpositionen, aus welchen die Factoren abgeleitet sind, in keiner Weise umgehen; aber die daraus hervorgehende Unsicherheit ist durchaus systematischer Natur und kann durch die Zahl der Heliometermessungen nicht verringert werden. Wenn man Anspruch darauf erhebt, dass das Resultat der Untersuchung eine reale Bedeutung haben und nicht nur ein rechnungsmässiges sein soll, so muss man entweder die Meridianpositionen selbst vermittelt der aufzustellenden Gleichungen zu verbessern suchen, und zwar im Wesentlichen die Coordinaten senkrecht zu dem betrachteten Bogen; oder, wenn hierfür das Material nicht ausreicht, sollte man den mittleren Fehler der einzelnen Gleichungen, soweit er von der Unsicherheit der Meridianpositionen herrührt, angeben. Dies betrifft in gleicher Weise Bestimmungen des Scalenwerthes und Bestimmungen systematischer Fehler.

Ich habe nun vorgeschlagen, die Projectionsfactoren ganz zu vermeiden, weil diese die Berechnung nur scheinbar

erleichtern, thatsächlich vielmehr, wenn man nämlich den Einfluss der Meridianpositionen untersuchen will, compliciren und undurchsichtig machen. Ich schlug vor, die Summe der heliometrisch bestimmten Distanzen mit der Summe der aus den Meridianpositionen abgeleiteten Distanzen zu vergleichen. Thatsächlich sind natürlich beide Methoden, wenigstens bis auf kleine, meist unwesentliche Glieder, bei gehöriger Entwicklung identisch. Aber in der von mir vorgeschlagenen, übrigens nicht neuen Weise sind die Entwicklungen einfacher. Ich will dies an einem Beispiel darlegen, und wähle den Hydrabogen für Epoche 1885.0. Die Grundlagen sind in »Venusdurchgänge 1874 und 1882«, Bd. V S. 361 u. 362 angegeben.

Bezeichnet $\Sigma \text{Hel.}$ die Summe der fünf heliometrisch gemessenen Distanzen $ab \dots ef$, $\Sigma \text{Corr.}$ die Summe der systematischen Correctionen, welche an diese anzubringen sind; ferner $\Sigma \text{Mer.}$ die Summe der entsprechenden, aber aus den Meridianpositionen berechneten Distanzen, $\Sigma \Delta$ die Summe der Verbesserungen, welche letztere wegen Verbesserung der Meridianpositionen erfordern, so hat man die Gleichung:

$$\Sigma \text{Hel.} + \Sigma \text{Corr.} = \Sigma \text{Mer.} + \Sigma \Delta.$$

Wenn ferner für die Hauptdistanz af der aus den Meridianpositionen abgeleitete Werth mit $\text{Mer}_{(af)}$, die entsprechende Verbesserung wegen Verbesserung der Meridianpositionen mit $\Delta_{(af)}$, endlich der wahre Werth mit (af) bezeichnet wird, so ist

$$(af) = \text{Mer}_{(af)} + \Delta_{(af)}.$$

Durch Subtraction der ersten Gleichung von der zweiten und passende Vereinigung der Glieder erhält man

$$(af) = \Sigma \text{Hel.} + \Sigma \text{Corr.} + (\text{Mer}_{(af)} - \Sigma \text{Mer.}) + (\Delta_{(af)} - \Sigma \Delta).$$

$\text{Mer}_{(af)} - \Sigma \text{Mer.}$ ist die »Reduction der Summe der Partialdistanzen auf die Hauptdistanz«, aber abgeleitet aus den Meridianpositionen; diese aus den Meridianpositionen leicht zu berechnende Reduction ersetzt hier die Projectionsfactoren. $\Delta_{(af)} - \Sigma \Delta$ giebt den Einfluss der Unsicherheit der Meridianpositionen an.

Für den Hydrabogen erhält man aus den citirten Angaben ohne Weiteres, wenn die Indices 1...6 sich auf die Sterne $a \dots f$ beziehen, und wenn, der grösseren Homogenität wegen, $\Delta' \alpha_1 (= 10 \Delta \alpha_1)$ die Verbesserung von α_1 in Einheiten von $0.1''$, $\Delta \delta_1$ dagegen die Verbesserung von δ_1 in Einheiten von $1''$ bedeutet:

$$(af) = \Sigma \text{Hel.} + \Sigma \text{Corr.} - 188.631 + 0.245 \Delta' \alpha_1 - 0.356 \Delta' \alpha_2 + 0.118 \Delta' \alpha_3 - 0.291 \Delta' \alpha_4 + 0.590 \Delta' \alpha_5 - 0.306 \Delta' \alpha_6 \\ + 0.039 \Delta \delta_1 - 0.067 \Delta \delta_2 + 0.029 \Delta \delta_3 - 0.087 \Delta \delta_4 + 0.130 \Delta \delta_5 - 0.044 \Delta \delta_6$$

Diese Gleichung reducirt die Summe der fünf Partialdistanzen $ab \dots ef$ auf den uns noch unbekannten Werth (af) der Hauptdistanz. Auf den gleichen Werth (af) kann man ebenso jede andere Combination von Partialdistanzen,

welche die Endpunkte von af geschlossen verbindet, reduciren; man erhält so analoge Gleichungen für (af) . Durch Subtraction dieser verschiedenen Gleichungen von einander wird die Unbekannte (af) eliminirt; man erhält Gleichungen zwischen den Messungsergebnissen, den systematischen Correctionen der Heliometermessungen und den Verbesserungen der Meridianpositionen. Bezüglich der letzteren kommen hier, d. h. bei einem Declinationsbogen, ganz vorwiegend die Verbesserungen der Rectascensionen in Betracht. Entweder

Epoche 1890: Von ϵ_α herrührend $\pm 0''.11$, von ϵ_δ herrührend $\pm 0''.03$, zusammen $\pm 0''.11$
 » 1900: » ϵ_α » ± 0.23 , » ϵ_δ » ± 0.08 , » ± 0.24

Da die Unsicherheit der Meridianpositionen ihren grössten Einfluss auf die hier behandelte Summe der fünf kleinsten Distanzen ausüben wird, so darf man schliessen, dass aus Beobachtungen zur Epoche 1890 jedenfalls noch eine Ableitung der systematischen Fehler der Heliometermessungen möglich sein wird. Zur Epoche 1900 würde die Unsicherheit der alten Meridianpositionen das Resultat schon etwas zweifelhaft machen, besonders, wenn man vielleicht annehmen darf, dass die Unsicherheit der Rectascensionen thatsächlich, z. B. in Folge der Helligkeitsgleichung, grösser ist, als sie sich rechnungsmässig ergeben hat.

$$(af) = \Sigma \text{Proj.} + \Sigma \text{Corr.} + 0.246 \Delta' \alpha_1 - 0.357 \Delta' \alpha_2 + 0.119 \Delta' \alpha_3 - 0.277 \Delta' \alpha_4 + 0.576 \Delta' \alpha_5 - 0.307 \Delta' \alpha_6 \\ + 0.024 \Delta \delta_1 - 0.056 \Delta \delta_2 + 0.033 \Delta \delta_3 - 0.105 \Delta \delta_4 + 0.126 \Delta \delta_5 - 0.022 \Delta \delta_6$$

Die geringfügigen Differenzen gegen die frühere Gleichung entstehen durch die verschiedene Grösse der einzelnen Projectionsfactoren. Ebenso sind wieder die analogen Gleichungen für die übrigen Combinationen aufzustellen; aus den Differenzen der Gleichungen verschwindet wieder die Un-

müssten daher neben den systematischen Correctionen auch diese Verbesserungen der Rectascensionen abgeleitet werden; oder aber, wenn man das nicht will, muss auf Grund der mittleren Fehler der Meridianpositionen der hieraus stammende mittlere Fehler der resultirenden Gleichungen berechnet werden. Aus den l. c. angegebenen mittleren Fehlern der Rectascensionen und Declinationen der sechs Sterne und der bez. Eigenbewegungen erhielt ich als mittleren Fehler der obigen Gleichung (jedoch für andere Epoche):

Bei Anwendung der Projectionsfactoren kommt man auf fast identische Gleichungen; aber die Rechnung ist etwas weniger einfach, sogar nachdem die umständliche Berechnung der Projectionsfactoren ausgeführt ist. Man hat die einzelnen Projectionen zu berechnen, und dazu die einzelnen Aenderungen dieser Projectionen, welche den l. c. angegebenen Differentialquotienten der Logarithmen der Projectionsfactoren entsprechen. So erhält man für die Summe der Projectionen der Distanzen $ab \dots ef$ auf af schliesslich die Gleichung:

bekannte (af) . Aber dasselbe erreicht man durch Anbringung der »Reduction der Summe der Distanzen auf die Hauptdistanz«; die Rechnung ist dann, zumal wenn die Projectionsfactoren nicht vorliegen, wesentlich einfacher.

Berlin 1897 April 15.

H. Battermann.

Ueber Vermeidung von Zeichenfehlern bei Vorausberechnung von Finsternissen und Sternbedeckungen.

Von H. Battermann.

Bei Vorausberechnung von Finsternisserscheinungen werden, wie die Erfahrung lehrt, häufig Zeichenfehler gemacht; dieselben betreffen meistens das Glied

$$- \frac{m \cos (M - N)}{n}$$

in dem Ausdruck für $T - T_0$ (T_0 sei die Zeit der Conjunction in Rectascension, T die Zeit eines Contactes, resp. von Eintritt oder Austritt; alles in mittlerer Zeit des Meridians der angewandten Ephemeride). Da derartige Fehler selbst in den Angaben der Hauptephemeriden trotz doppelter Berechnung vorkommen, so dürfte es nicht überflüssig sein, auf eine allerdings auf der Hand liegende Controle hinzuweisen, welche diese Fehler unmöglich macht.

Die bekannte Gleichung für $T - T_0$ ist nur aus der bekannten Fundamentalgleichung der Finsternisse

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = L^2$$

$$[(T - T_0)p' - u - (T - T_0 - \tau)u']^2 + [q_0 + (T - T_0)q' - v - (T - T_0 - \tau)v']^2 = k_2.$$

abgeleitet. x und y sind die bez. Coordinaten des Mondes, ξ und η diejenigen des Beobachtungsortes in einem Coordinatensystem, dessen z -Axe der Schattenaxe parallel ist; L ist der Radius des Schattenkreises in einer durch den Beobachtungsort senkrecht zur z -Axe gelegten Ebene. Diese Gleichung muss daher für die gefundene Zeit T des Contactes streng erfüllt sein. Also die einfache und sichere Controle ist: man berechne x, y, ξ, η, L unter Benutzung der schon berechneten oder in den Ephemeriden gegebenen Differentialquotienten für die gefundene Zeit des Contactes, und bilde die Summe der Quadrate $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$, am bequemsten unter Benutzung von Quadrattafeln; diese Summe muss $= L^2$ sein.

Speciell für Sternbedeckungen lautet die Controle, unter Anwendung der Bezeichnungen des Nautical Almanac oder Berliner Jahrbuches: