Ueber die Zahl der Kreispunkte einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung.

Von A. Voss in Darmstadt.

In der Salmon-Fiedler'schen Raumgeometrie findet sich eine Untersuchung, durch welche die Zahl der Kreispunkte einer allgemeinen F_n gleich $n(10n^2 - 25n + 16)$ bestimmt wird*). Es ist der Zweck dieser Note zu zeigen, dass diese Zahl noch einer weiteren Reduction bedarf.

Das Problem der Kreispunkte ist, projectivisch aufgefasst, äquivalent mit dem folgenden: Die Zahl der Punkte zu finden, deren beide Haupttangente einen festen Kegelschnitt schneiden (eine Fläche zweiten Grades berühren)**). Es sei nun die Gleichung der Fläche in homogenen Coordinaten:

$$(1) \quad f = 0,$$

die Gleichung des Kegelschnittes in der Ebene $x_4 = 0$:

$$(2) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Alsdann sind die projectivischen Kreispunkte gegeben durch den Schnitt des Systemes (vgl. Salmon a. a. O.):

$$(3) \quad f = 0, \quad \frac{A_1}{f_2^2 + f_3^2} = \frac{A_2}{f_1^2 + f_3^2} = \frac{A_3}{f_1^2 + f_2^2},$$

wo:

$$A_1 = f_{22}f_3^2 - 2f_{23}f_2f_3 + f_{33}f_2^2,$$

$$A_2 = f_{33}f_1^2 - 2f_{13}f_3f_1 + f_{11}f_3^2,$$

$$A_3 = f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2.$$

Der Schnitt der Fläche mit der Ebene $x_4 = 0$ enthält $3n(n-2)$ Wendepunkte, welche bestimmt sind durch das Verschwinden der Hesse'schen Determinante:

*) Zweite Auflage S. 43—46.

**) Vgl. eine Bemerkung von Herrn Fiedler a. a. O. S. 621.

$$(4) \quad \Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Indem man (4) in den 3 äquivalenten Formen

$$\Delta \equiv A_1 \equiv A_2 \equiv A_3 = 0$$

schreibt, erkennt man, dass die genannten $3n(n-2)$ Punkte gemeinsame Lösungen des Systemes (3) sind, *wonach die Zahl der Kreispunkte gleich:*

$$n[10n^2 - 28n + 22]$$

ausfällt.

Es ist vielleicht nicht uninteressant, einen mehr geometrischen Weg zur Bestimmung der genannten Zahl einzuschlagen.

Sei demnach die Gleichung des Kegelschnittes K gegeben durch:

$$(5) \quad \begin{cases} a_x = 0, \\ \sum a_{ik} x_i x_k = 0. \end{cases}$$

Die Haupttangente der F_n , welche K schneiden, bilden eine windschiefe Fläche W , welche F_n in einer Curve Σ berührt, deren Doppelpunkte zum Theil die gesuchten x Kreispunkte sind. Man erhält die Gleichung einer Fläche Φ , welche die Curve Σ ausschneidet, wenn man aus den Gleichungen:

$$(6) \quad \begin{cases} a_y = 0, & \sum y_i f_i = 0, \\ \sum a_{ik} y_i y_k = 0, & \sum f_{ik} y_i y_k = 0 \end{cases}$$

die y eliminiert. Es geschieht dies, indem man die Discriminante der in λ quadratischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} f_{ik} + \lambda a_{ik} & a_i f_i \\ a_k & 0 \\ f_k & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 A + 2\lambda B + C = 0$$

gleich Null setzt. Dabei ist:

$$C = -(a_x)^2 H,$$

wo H die Hesse'sche Determinante von (1), A die Determinante der a_{ik} , geändert mit den a_i, f_i . Es ist daher:

$$(7) \quad \Phi = A(a_x)^2 H + B^2.$$

Die Curve Σ ist mithin von der Ordnung $\nu = 2n(3n-4)$. Da $\Phi = 0$ die Doppelcurve $(3n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung $a_x = 0$, $B = 0$ enthält, so hat Σ $n(3n-4)$ wirkliche Doppelpunkte, nämlich die $3n(n-2)$

Wendepunkte des Schnittes von $f=0$, $a_x=0$ und die $2n$ Punkte, in denen K die F_n schneidet. Die gesuchten x Kreispunkte sind ihre weiteren wirklichen Doppelpunkte, so dass der Rang von Σ gleich:

$$r = 2n(3n-4)(7n-10) - 2x - 6n(n-2) - 4n.$$

Die Fläche W der Haupttangente ist von der Ordnung:

$$N = 2n(n-1)n - 2 + 6n(n-2),$$

sie hat ferner $\varrho = 4n(n-3)(3n-2)$ Rückkehrerzeugende, es sind die vierpunktigen Tangente von F_n , welche K treffen. Zu singulären Erzeugenden von W geben Veranlassung:

- 1) die Punkte, in denen die parabolische Curve von F_n der Curve Σ begegnet. Sie *berührt* aber, wie aus (7) folgt, dieselbe in $4n(n-2)(3n-4)$ Punkten;
- 2) die $2n$ Schnittpunkte von F_n und K , ihnen entspricht je ein Paar *doppelte* singuläre Erzeugende;
- 3) die $2n(n-1)(3n-4)$ Punkte, in denen die Flächen $A=0$, $f=0$, $B=0$ sich schneiden. In einem solchen Punkte a berührt die Tangentialebene von F_n den Kegelschnitt in einem Punkte b , während die Gerade (ba) Haupttangente und zugleich Tangente von Σ ist. Auch diese Punkte ergeben *doppelte* singuläre Erzeugende von W . Die Gesamtzahl der singulären Geraden ist also:

$$k = 4n(n-2)(3n-4) + 8n + 4n(n-1)(3n-4).$$

Es ist also der Rang von W :

$$R = N + \frac{1}{2} k.$$

Aus der Gleichheit des Geschlechtes von W und Σ folgt endlich:

$$2\nu - r = N - \varrho - \frac{1}{2} k,$$

aus welcher Gleichung sich x ergibt.

Handelt es sich übrigens darum, auf eine möglichst kurze Art die Zahl x zu ermitteln, so kann man sich des folgenden Verfahrens bedienen. Man ersetze den Kegelschnitt K durch zwei sich schneidende Gerade l_1, l_2 . Dann entstehen zwei windschiefe Flächen von Haupttangente der F_n , welche diese Geraden treffen; sie berühren die F_n in Curven k_1, k_2 , welche durch Flächen $3n-4^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden. k_1, k_2 begegnen sich mithin in $n(3n-4)^2$ Punkten. Zu diesen gehören 1) die $3n(n-2)$ Wendepunkte von F_n in der Ebene (l_1, l_2) , 2) die $n(n-1)(n-2)$ Berührungspunkte der von dem Schnitt von l_1, l_2 auslaufenden Haupttangente.

Es ist demnach:

$$n(3n-4)^2 - 3n(n-2) - n(n-1)(n-2)$$

die Zahl der Punkte, deren Haupttangente mit l_1, l_2 ein Vierseit bilden. Fügt man hinzu die Zahl derjenigen, deren beide Haupttangente entweder l_1 oder l_2 treffen, welche gleich der doppelten Classe von F_n ist, so muss sich die Zahl der Kreispunkte wie vorhin ergeben. In der That hat man:

$$x = n(3n-4)^2 - 3n(n-2) - n(n-1)(n-2) + 2n(n-1)^2.$$

Darmstadt, im Juli 1875.