ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Nº 2612.

Zur Photometrie des Saturnringes.

Von Prof. H. Seeliger.

Wäre der Saturnring ein Körper von zusammenhängender Oberfläche, so müsste, wenn nicht unwahrscheinliche Annahmen über ihre Structur gemacht werden sollen, die scheinbare Intensität der Beleuchtung des Ringes sehr verschieden sein, je nach der Stellung der beleuchtenden Sonne oder der Erde. Lässt man z. B. das Lambert'sche Grundgesetz der Photometrie gelten, so würden daraus Veränderungen in der scheinbaren Helligkeit des Saturnringes hervorgehen, welchen schon der blosse Augenschein widerspricht. Bezeichnen nämlich l und l' die Elevationswinkel der Erde resp. der Sonne über der Ebene des Saturnringes gesehen von Saturn, so folgt sofort, dass die Intensität $\mathcal{J}$ der scheinbaren Beleuchtung des Saturnringes

$$\mathcal{J} = \gamma \sin l'$$

worin γ eine Constante bedeutet. Da nun l' zwischen den ungefähren Grenzen 0° und 28° schwankt, so ändert sich $\mathcal{J}$ sehr beträchtlich. Solche enorme Helligkeitsschwankungen werden nun, wie Zöllner (Photom. Untersuchungen p. 138 ff.) erwähnt, durch die Beobachtungen keineswegs constatirt, vielmehr scheint es, viel wahrscheinlicher, dass im Gegentheil der Ring immer nahe dieselbe Helligkeit darbietet. Ich lasse es vorderhand dahingestellt, ob diese letztere Annahme durch die Beobachtungen genügend begründet ist; jedenfalls entspricht sie weit mehr den tatsächlichen Verhältnissen, als die aus dem Lambert'schen Gesetze folgende Intensitätsformel. Aus diesem Grunde macht Zöllner die Annahme, dass in diesem Falle das Lambert'sche Gesetz nicht anwendbar, vielmehr die Intensität der Beleuchtung des Saturnringes durch die Sonne unabhängig von dem Incidenzwinkel sei, d. h. unabhängig von der Stellung der Sonne gegen die Ringebene. Mit Hülfe dieser Voraussetzung leitet er nun seine vielfach angewandte Formel ab, zur Reduction der beobachteten Lichtstärke des Saturn auf den Fall, wo dieser Planet ohne Ring erscheint. Diese Formel ist indess auch bei Zulassung der erwähnten Principien nicht richtig, indem der Saturnkörper, zufolge des bei ihm als gültig anzunehmenden Lambert'schen Gesetzes, als eine durchaus nicht überall gleich helle, vielmehr als eine am Rande viel lichtschwächere Scheibe erscheint. Ich gehe aber hier auf diesen Punkt nicht ein, indem ich mir die Besprechung dieser und ähnlicher Fragen für eine spätere Gelegenheit vorbehalten. Gegenwärtig möchte ich nur die Möglichkeit erörtern, eine plausible Erklärung dafür zu schaffen, dass der Saturnring so ganz andere Beleuchtungsverhältnisse zeigt, wie alle anderen Körper unseres Sonnensystems. Ich

werde dabei annehmen, dass der Saturnring in allen Lagen nahezu dieselbe Helligkeit darbiete, dass also die von ihm der Erde zugesandte Lichtquantität Q gegeben sei durch die Formel:

$$Q = \gamma \sin l \quad (1)$$

Es wird Sache der Beobachtungen sein, die Correctur, welche diese Formel nöthig hat, festzustellen.

Der Formel (1) kann man, wie erwähnt, nur durch ziemlich willkürliche Annahmen entsprechen, so lange man die Hypothese festhält, der Saturnring bestehe aus einer compacten festen oder flüssigen Masse. Nun hat aber Maxwell schon vor 25 Jahren gezeigt, dass diese Hypothese schon aus rein mechanischen Gründen zu verwerfen und dass man gezwungen sei, anzunehmen, der Saturnring werde aus einzelnen discreten Massenpunkten gebildet, er sei also etwa einem dichten Meteorschwarm vergleichbar. Dieses schöne und unanfechtbare Resultat von Maxwell will ich hier adoptiren und es wird sich daraus die interessante Thatsache ergeben, dass man dann den photometrischen Erscheinungen, welche der Saturnring darbietet und welche ich vorläufig durch die Formel (1) definirt habe, vollständig entsprechen kann, auch wenn man das Lambert'sche Gesetz, dessen Allgemeinheit übrigens durchaus nicht überschätzt werden soll, gelten lässt.

Nimmt man an, was wohl statthaft sein dürfte, dass jedes Theilchen des Saturnringes näherungsweise die Kugelform habe, so folgt daraus, dass alle Theilchen dieselbe Lichtmenge von der Sonne empfangen und alle dieselbe Lichtmenge der Erde zusenden. Auch werden, da die Dimensionen des Ringes im Vergleich zu der Entfernung des Saturn von der Sonne und Erde sehr klein sind, alle Theilchen zu gleicher Zeit gleich hell erscheinen. Ferner wird man von der Phase, in welcher jedes Theilchen erscheint, absehen dürfen, denn dieses wird in Folge der grossen Entfernung des Saturn stets so vollständig erleuchtet erscheinen, dass die Reduction wegen der Phase völlig zu vernachlässigen sein wird. Sie beträgt z. B. bei Anwendung des Lambert'schen Gesetzes, erst wenn Saturn in Quadratur steht, 0.5 Procent der gesammten Lichtmenge.

Man kann sich nun die Constitution des Saturnringes von sehr verschiedener Art denken, nur muss daran festgehalten werden, dass Theorie und Erfahrung übereinstimmend aussagen, dass der Ring sehr nahe in einer Ebene liege und eine sehr geringe Dicke habe. Nimmt man demnach die Materie, welche den Ring formirt, etwa von staubförmiger Structur an, so wird man sie sich so angeordnet

denken, dass sie etwa einen sehr niedrigen Cylinder, dessen Basis ein Kreisring ist, in homogener Weise erfüllt. Würde die Höhe dieses Cylinders direct unendlich klein angenommen, so würde die vom ganzen Ringe der Erde zugesandte Lichtmenge, dem früheren zufolge, constant sein müssen. Anders gestaltet sich die Sache, wenn die Höhe des Cylinders zwar klein, aber von endlicher Grösse angenommen wird. Man wird dann eine ähnliche Betrachtung anzustellen haben, wie sie Zöllner zur Begründung des Emanationsgesetzes (Photom. Untersuchungen p. 17) angewendet hat. Etwas allgemeiner werden wir sagen dürfen: Nicht alle Theilchen in einer zur Ringebene parallelen Schicht werden zur Beleuchtung beitragen. Ein Theil von ihnen wird von davorliegenden Theilchen beschattet, ein anderer Theil für den Beobachter auf der Erde verdeckt. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieser Eventualitäten ist nun offenbar grösser, je kleiner die beiden Elevationswinkel l und l' sind und man wird demzufolge annehmen dürfen, dass die Lichtquantität des ganzen Ringes

$$Q = f(\sin l, \sin l') \quad (2)$$

ist, wobei $f(x)$ eine Function bedeutet, die mit x zugleich wächst und abnimmt. Bei homogener Vertheilung der Masse wird man weiter, analog der angeführten Zöllner'schen Betrachtung, $f(x) = \gamma x$ setzen dürfen; dann aber folgt für die scheinbare Intensität

$$\mathcal{I} = \frac{Q}{\sin l} = \gamma \sin l' \quad (3)$$

wodurch man wieder auf den schon oben als mit den Beobachtungen unvereinbar erklärten Ausdruck kommt. Man darf sich also den Ring nicht aus staubförmiger Materie angeordnet denken, der eine Schicht von endlicher Dicke bildet.

Ganz anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn man sich die einzelnen Kugeln, aus welchen der Ring besteht, nahe in einer Ebene vertheilt denkt. Wären aber dann ihre gegenseitigen Entfernungen im Vergleich zu ihren Dimensionen sehr gross, so müsste die vom Ringe ausgesandte Lichtquantität (mit Ausnahme sehr kleiner Werthe für l) constant bleiben. Wir werden demnach weiter annehmen müssen, dass diese Annahme nicht begründet ist. Dann wird aber jede Kugel, schon bei nicht kleinen Elevationswinkeln, jeder scheinbar hinter ihr stehenden um so mehr Licht entziehen, theils durch Verdeckung, theils durch Beschattung, je kleiner die Winkel l und l' werden. Ein genaues rechnerisches Verfolgen der hier auftretenden Umstände wird äusserst complicirt. Es wird dies aber vermieden durch gewisse Annahmen, die im Einzelnen wohl unrichtig sein, in ihrem Durchschnittswerth aber den Mittelzustand innerhalb des Ringes repräsentiren werden. Zunächst soll $l = l'$ gesetzt werden. Beide Winkel sind in der That nur wenig verschieden von einander; ihr Gleichsetzen aber bringt die wesentliche Vereinfachung hervor, dass der Schattenwurf gerade von der denselben erzeugenden Kugel verdeckt wird. Ferner soll für die Rechnung angenommen werden, dass die einzelnen Kugeln aequidistant stehen in

der Richtung, welche von der Erde nach dem Saturn gezogen wird. Man hat also das Licht zu berechnen, welches der nicht verdeckte Theil einer jeden Kugel zur Erde sendet. Die Kugeln projiciren sich am Himmel als gleich grosse sphärische Kreise, die sich gegenseitig schneiden; das Licht der linsenförmigen Fläche nun, die zwei solchen auf einander folgenden Kreisen gemeinschaftlich ist, ist demnach als unwirksam in Abzug zu bringen. Wegen der Kleinheit der Kugeln wird man hierbei die sphärischen Kreise als ebene betrachten dürfen.

Es bezeichne nun δ die Winkelentfernung der Mittelpunkte zweier sphärischer Kreise, ϱ ihren Radius, d die wirkliche Entfernung der Centra und r den wirklichen Radius einer Kugel, A die Entfernung Erde-Saturn, l , wie früher, den Elevationswinkel der Erde über der Ebene des Saturnringes, dann ist:

$$\delta = \frac{d \sin l}{A}; \quad \varrho = \frac{r}{A}$$

Ist weiter $\mathcal{I}$ die Intensität des Sonnenlichtes, σ der scheinbare Sonnenradius, gesehen vom Saturn, μ die Albedo der betrachteten Kugel und θ der Winkel, den die Normale eines Kugelelementes df mit der Richtung nach der Sonne oder Erde bildet, so sendet nach Lambert's Formeln das Element df die Lichtmenge dq zur Erde, wobei:

$$dq = \mathcal{I} \frac{\sin^2 \sigma \cdot \mu}{A^2} \cdot df \cdot \cos \theta \cdot \varphi(\cos \theta) \quad (4)$$

Unter $\varphi(\cos \theta)$ ist hierbei das anzuwendende Emanationsgesetz verstanden; Lambert setzt bekanntlich in nicht ganz einwurfsfreier Weise: $\varphi(\cos \theta) = \cos \theta$. Denkt man sich nun um die Erde als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius 1 gelegt, so wird sich auf dieser die beleuchtete Kugel als sphärischer Kreis mit dem Radius ϱ projiciren und das Flächenelement df als ein Flächenelement $d\varphi$ desselben Kreises. Ist dann x die Winkelentfernung dieses Elementes vom Kreismittelpunkt, so ergibt sich sofort:

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{\varrho^2} \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\varrho^2}};$$

$$d\varphi = \frac{df \cos \theta}{A^2}$$

Wird demnach $\gamma = \mathcal{I} \cdot \mu \cdot \sin^2 \sigma$ gesetzt, so erhält man aus (4):

$$dq = \gamma \cdot d\varphi \cdot \varphi \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{\varrho^2}} \right) \quad (5)$$

Integrirt man in Bezug auf die ganze Fläche des Kreises, so erhält man die Lichtmenge Q , welche die voll erleuchtete Kugel der Erde zusendet und wenn man nur über die oben erwähnte linsenförmige Fläche integrirt, die Lichtmenge L , welche diese Fläche ausstrahlt. Da weiter die Anzahl A der den Saturnring bildenden Kugeln als sehr gross angenommen werden muss, so wird die Licht-

menge R , die der Saturnring aussendet, gefunden durch die Formel:

$$R = A(Q - L) \quad (6)$$

Ich habe nun die genannte Integration für zwei verschiedene q ausgeführt. Zuerst wurde $q(\cos \vartheta) = 1$ gesetzt. Es besagt dies, dass die beleuchtete Kugel sich als überall gleich hell erleuchteter Kreis darstellt. In diesem Falle ist die Rechnung sehr einfach. Setzt man nämlich:

$$\cos \varphi = \frac{\delta}{2q} = \frac{d}{2r} \cdot \sin l$$

so wird:

$$R = A \cdot \gamma \cdot q^2 \cdot [\pi - (2\varphi - \sin 2\varphi)] \quad (7)$$

Soll nun dieses Beleuchtungsgesetz der angesetzten Bedingung (1) entsprechen, so muss sich eine Constante Γ bestimmen lassen, dergestalt, dass für die vorkommenden Werthe von $l = 0^\circ$ bis $l = 28^\circ$ näherungsweise:

$$\pi - (2\varphi - \sin 2\varphi) = \Gamma \sin l$$

ist. Dieses lässt sich nun in der That bewerkstelligen. Ich habe diese Rechnung, sowie auch die folgenden, unter

der Annahme ausgeführt, dass $\frac{d}{2r}$ nicht sehr von der Einheit verschieden sei. Soll nämlich für alle genannten Werthe von l dasselbe Beleuchtungsgesetz herrschen, so darf die gegenseitige Verdeckung der einzelnen Kugeln bei keinem kleineren Werth für l als 28° beginnen. Es muss also:

$$\frac{d}{2r} < \frac{1}{\sin 28^\circ} \text{ d. h. } < 2.1$$

sein.

Wird d grösser angenommen, so ist zunächst die vom Saturnring ausgehende Lichtmenge constant bis zum Elevationswinkel l , der sich bestimmt aus der Gleichung:

$$\sin l = \frac{2r}{d}$$

und von da ab tritt die Formel (7) in Wirksamkeit.

Ich habe nun für 3 Annahmen über die Grösse $\frac{d}{2r}$ innerhalb der obigen Grenzen durch eine Ueberschlagsrechnung gefunden für $X = \pi - (2\varphi - \sin 2\varphi)$ und $\Gamma \sin l$:

	$\frac{d}{2r} = 2.0; \Gamma = 7.0$		$\frac{d}{2r} = 1.5; \Gamma = 5.7$		$\frac{d}{2r} = 1.0; \Gamma = 3.9$	
	X	$\Gamma \sin l$	X	$\Gamma \sin l$	X	$\Gamma \sin l$
$l = 30^\circ$	3.142	3.500	2.689	2.850	1.913	1.950
25	2.918	2.958	2.368	2.509	1.639	1.648
20	2.505	2.394	1.959	1.949	1.341	1.334
15	1.975	1.812	1.514	1.475	1.024	1.009
10	1.360	1.115	1.032	0.990	0.691	0.687
5	0.674	0.610	0.522	0.497	0.348	0.340
0	0	0	0	0	0	0

Alle 3 Zahlenreihen genügen der gestellten Bedingung vollkommener, als diese Bedingung selbst durch die Beobachtungen festgestellt ist. Der letzte Fall entspricht schon der nicht sehr wahrscheinlichen Annahme, dass die einzelnen Kugeln direct an einander gereiht sind.

Die zweite Annahme über das Emissionsgesetz $q(\cos \vartheta)$, welche ich verfolgt habe, ist die Lambert'sche. Es wurde also in Formel (4) $q(\cos \vartheta) = \cos \vartheta$ gesetzt. Fällt man auf die Mitte der Verbindungslinie der beiden Kreiscentra eine Senkrechte, so wird die linsenförmige Fläche in zwei Theile zerfällt. Heisst $2L_1$ die von dem einen, $2L_2$ die von dem andern Theile ausgehende Lichtmenge, so dass also:

$$L = 2L_1 + 2L_2 \quad (8)$$

so finden sich die Grössen L_1 und L_2 am einfachsten durch Einführung rechtwinkliger Coordinaten ξ und η , und zwar ergibt sich sofort:

$$L_1 = \gamma \int_{1/2\delta}^{\rho} d\eta \int_0^{\frac{(\rho^2 - \eta^2)^{1/2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{q^2}(\xi^2 + \eta^2)}}} d\xi \quad L_2 = \gamma \int_{1/2\delta}^{\rho} d\eta \int_0^{\frac{(\rho^2 - \eta^2)^{1/2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{q^2}[\xi^2 + (\delta - \eta)^2]}}} d\xi$$

Die Integration in Bezug auf ξ lässt sich ohne Weiteres ausführen, indem allgemein die Formel gilt:

$$\int \sqrt{a - bx^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a - bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} \arcsin x \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Man erhält so:

$$L_1 = \gamma \cdot \frac{1}{2} \pi \int_{\frac{1}{2}\delta}^{\rho} d\eta \cdot \frac{\rho^2 - \eta^2}{2\rho} = \frac{\pi}{4} \rho^2 \gamma \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{\delta}{2\rho} + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{2\rho} \right)^3 \right]$$

und ferner:

$$L_2 = \gamma \int_{\frac{1}{2}\delta}^{\rho} d\eta \cdot \left[\frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 - \eta^2} \sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2} (\rho^2 + \delta^2 - 2\delta\eta)} + \frac{\rho^2 - (\delta - \eta)^2}{2\rho} \arcsin \sqrt{\frac{\rho^2 - \eta^2}{\rho^2 - (\delta - \eta)^2}} \right]$$

Setzt man demnach:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \int_{\frac{1}{2}\delta}^{\rho} d\eta \sqrt{\rho^2 - \eta^2} \sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2} (\rho^2 + \delta^2 - 2\delta\eta)} \\ \Psi &= \int_{\frac{1}{2}\delta}^{\rho} d\eta \cdot \frac{\rho^2 - (\delta - \eta)^2}{\rho} \arcsin \sqrt{\frac{\rho^2 - \eta^2}{\rho^2 - (\delta - \eta)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

so wird nach (8):

$$L = \gamma \cdot \frac{1}{2} \pi \rho^2 \left[\frac{2}{3} - \frac{\delta}{2\rho} + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{2\rho} \right)^3 \right] + \gamma \Phi + \gamma \Psi$$

Für $\delta = 0$ ergibt sich hieraus die Lichtmenge

$$Q = \pi \cdot \gamma \rho^2 \cdot \frac{2}{3}$$

und wenn dies in Formel (6) eingesetzt wird:

$$R = A \cdot \gamma \cdot \frac{1}{2} \pi \rho^2 \cdot \left[\frac{2}{3} + \frac{\delta}{2\rho} - \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{2\rho} \right)^3 \right] - A \gamma \cdot \Phi - A \gamma \cdot \Psi \quad (10)$$

Es wird sich empfehlen, die Integrale Φ und Ψ in etwas anderer Form darzustellen. Führt man an Stelle von η als Integrationsvariable x durch die Gleichung ein:

$$\eta = \frac{1}{2}\delta + (\rho - \frac{1}{2}\delta)x \quad \text{und setzt man weiter:} \quad k = \frac{\rho - \frac{1}{2}\delta}{\rho + \frac{1}{2}\delta}$$

so wird man leicht folgende Formen aufstellen können:

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \rho^2 \cdot \frac{8k^2}{(1+k)^3} \cdot \int_0^1 \frac{(1-x)(1-kx)}{(1+x)(1-kx)} \arcsin \sqrt{\frac{(1-x)(1+kx)}{(1+x)(1-kx)}} dx \\ \Phi &= \rho^2 \cdot \frac{8k^2}{(1+k)^3} \cdot \sqrt{2(1-k)} \int_0^1 dx \sqrt{x(1-x)(1+kx)} dx \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ich habe bei den folgenden Zahlenwerthen noch gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \pi \left[\frac{2}{3} + \frac{\delta}{2\rho} - \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{2\rho} \right)^3 \right] \\ \frac{\Phi}{\rho^2} &= \frac{8k^2}{(1+k)^3} \cdot \sqrt{2(1-k)} \cdot Y \\ \frac{\Psi}{\rho^2} &= \frac{8k^2}{(1+k)^3} \cdot X \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

so dass jetzt die Gleichung (10) die viel einfachere Form annimmt:

$$R = A \gamma \rho^2 \cdot \left(B - \frac{\Phi}{\rho^2} - \frac{\Psi}{\rho^2} \right).$$

Zur Verwerthung der vorstehenden Formeln ist die Berechnung der Integrale X und Y nothwendig. Das erste muss auf mechanischem Wege ermittelt werden, das zweite ist ein elliptisches und lässt sich ohne Mühe auf die vollständigen Integrale der ersten und zweiten Gattung zurückführen und infolge dessen mit Hülfe der bekannten Tafeln für diese Transcendenten leicht berechnen. Da ich nun solche Tafeln nicht zur Hand hatte, habe ich auch Y auf mechanischem Wege ermittelt. Soll eine grössere Genauigkeit erstrebt werden, als hier nothwendig war, so wird man indess das mechanische Integrationsverfahren für Y nicht in Anwendung bringen. Denn in diesem Falle bietet selbst die Gauss'sche Methode (Methodus nova integralium valores etc.) nur eine geringe Convergenz und es müssen eine

grosse Anzahl Coefficienten berechnet werden. Hier wurden aber sowohl für X als auch für Y die Gauss'schen Vorschriften in Anwendung gebracht.

Auf diese Weise ergaben sich folgende Zahlen, welche durch Herrn List controlirt worden sind:

h	B	X	Y	Ψ Q^2	Φ Q^2	R
0.0	2.094	0.881	0.393	0.000	0.000	2.094
0.1	2.046	0.886	0.403	0.053	0.033	1.960
0.2	1.939	0.891	0.412	0.165	0.097	1.677
0.3	1.811	0.895	0.421	0.293	0.163	1.355
0.4	1.679	0.897	0.430	0.418	0.220	1.041
0.5	1.551	0.899	0.439	0.533	0.260	0.758
0.6	1.432	0.901	0.448	0.633	0.282	0.517
0.7	1.322	0.904	0.456	0.721	0.282	0.319
0.8	1.221	0.910	0.464	0.799	0.258	0.164
0.9	1.130	0.927	0.472	0.876	0.200	0.054
1.0	1.047	1.047	0.480	1.047	0.000	0.000

Die solchergestalt berechnete Lichtmenge des Ringes zeigt nun wieder einen Verlauf, der sehr ähnlich demjenigen der Function $Q = I \sin l$ ist. Um dies einzusehen, haben wir zu bedenken, dass:

$$\frac{d}{2r} \sin l = \frac{\delta}{2Q} = \frac{1-k}{1+k},$$

woraus folgt:

$$\sin l = \frac{1-k}{1+k} \cdot \left(\frac{2r}{d} \right)$$

Ich habe die den einzelnen k entsprechenden $\sin l$ wiederum unter denselben Annahmen abgeleitet, welche schon oben verfolgt worden sind. Es ergibt eine leichte Rechnung:

k	$\frac{d}{2r} = 2$	$\frac{d}{2r} = 1.5$	$\frac{d}{2r} = 1.0$
0.0	0.500	0.667	1.000
0.1	0.409	0.547	0.818
0.2	0.333	0.445	0.667
0.3	0.269	0.339	0.539
0.4	0.214	0.284	0.429
0.5	0.167	0.222	0.333
0.6	0.125	0.167	0.256
0.7	0.088	0.118	0.177
0.8	0.056	0.074	0.111
0.9	0.026	0.035	0.053
1.0	0.000	0.000	0.000

Da für grössere Werthe von l als 28° eine Vergleichung mit der Formel (1) nicht nothwendig ist, so hat sich diese nur auf die Werthe von $\sin l \leq 0.470$ zu beziehen. Durch Abschätzung habe ich nun in den 3 Fällen der Reihe nach $I = 4.5$, 3.5 und 2.1 gesetzt und hierdurch eine

genügende Uebereinstimmung von $I \sin l$ mit der berechneten Lichtstärke R erhalten, wie folgende Zusammenstellung nachweist:

R	$\frac{d}{2r} = 2.0$	$\frac{d}{2r} = 1.5$	$\frac{d}{2r} = 1.0$
2.094	2.250		
1.960	1.841		
1.677	1.499	1.558	
1.355	1.211	1.188	
1.041	0.963	0.994	0.901
0.758	0.752	0.778	0.700
0.517	0.562	0.584	0.525
0.319	0.396	0.413	0.372
0.164	0.252	0.259	0.233
0.054	0.117	0.123	0.111
0.000	0.000	0.000	0.000

Es sind hier, wie a priori selbstverständlich, ganz ausgesprochene Abweichungen vorhanden; es konnte sich auch nur darum handeln, einen ungefähren Parallelismus der Grösse R mit dem ohnehin nur ganz beiläufig aus den Beobachtungen folgenden Beleuchtungsgesetze (1) herzustellen. Dies ist aber wohl vollständig gelungen.

Tiefer auf den Gegenstand einzugehen ist, so lange nicht genauere Beobachtungen über die Schwankungen in der Intensität der Beleuchtung des Saturnringes vorliegen, unmöglich. Vielleicht aber wird das Vorstehende geeignet sein, das Interesse der photometrischen Beobachter auf diesen Punkt zu richten. Diese Beobachtungen würden am besten in einer andern Form angestellt werden, als dies gewöhnlich bei der Beobachtung der Körper unseres Sonnensystems geschieht. Hier wird es sich nicht sowohl darum handeln, die Gesamtmasse des Lichtes, welche der Saturnring zu verschiedenen Zeiten aussendet, zu bestimmen, als vielmehr die Intensität seiner Beleuchtung, welche durch Vergleichung mit hellen Flächen, die der photometrische Apparat zu liefern hätte, und der Vergleichung dieser mit Punkten der Saturnoberfläche erlangt werden kann. Dasselbe Resultat erhält man nun freilich auch durch die Beobachtung der Lichtmenge, die der ganze Saturnkörper uns zusendet. Dieses ist aber ein Ungenauigkeiten mit sich führender Umweg, weil die Lichtquantität des Ringes nur ein kleiner Bruchtheil der vom Saturnsphäroide ausgehenden Lichtmenge ist.

Sollten nun dergleichen Beobachtungen angestellt werden, so werden auch die theoretischen Untersuchungen über die Constitution der Saturnringe eine festere Basis erlangen. Jedenfalls wird man die hier vertretenen Ansichten gründlicher prüfen können. Ob man freilich auf diesem Wege einen Anhalt über die Constitution des Ringes kennzeichnende Grösse k innerhalb engerer Grenzen finden wird, ist zweifelhaft; denn es scheint das nahe Parallellaufen der Lichtcurven für verschiedene Werthe von k darauf hinzudeuten, dass zu diesem Zwecke eine grössere Genauigkeit der photometrischen Methoden erforderlich sein würde.

München 1884 Aug. 3.

H. Seeliger.