Einzelwirkungen kennt, deren Ermittlung durch die im Vorigen angegebenen Hülfsmittel ausnehmend erleichtert wird.

VII. *Ueber eine neue Interferenzerscheinung dicker Platten; von Dr. Paul Zech.*

Wenn man zwei gleich dicke planparallele Glasplatten unter einem kleinen Winkel zusammenstellt und zwischen dieselben ungefähr in der Richtung der Kante des Winkels hindurchsieht gegen eine helle Fläche so beobachtet man Interferenzstreifen, deren Erscheinung sogleich an die zweier gekreuzten Gypsplatten im Polarisationsmikroskop erinnert. Die Erklärung dieser Erscheinung, die ich zuerst bei Prof. Reusch in Tübingen sah, ist Gegenstand dieses Aufsatzes.

Im Band 109 dieser Annalen S. 70 habe ich Formeln aufgestellt für die Intensität des an einer planparallelen Platte reflectirten Lichts. Diese Formeln wurden durch Betrachtung einer einfallenden, gebrochenen und reflectirten Welle gefunden, jeder der unendlich vielen einfallenden Strahlen giebt unendlich viele reflectirte Strahlen, nämlich keinmal oder einmal oder zweimal u. s. w. an der zweiten Gränzfläche reflectirte; die Resultante aller diesen Strahlen zugehörigen Schwingungen ist die der reflectirten Wellenebene zugehörige Schwingung. Daraus folgt, dafs in jenen Formeln unmittelbar die Erscheinungen der Interferenz liegen. Bisher wurde die Interferenz bei dünnen Platten in reflectirtem Licht in der Art behandelt, dafs man nur den keinmal und den einmal an der zweiten Gränzfläche reflectirten Strahl betrachtete und ihren Gangunterschied bestimmte. Dunkelheit entsteht, so oft

$$d \cos \alpha' = k \frac{\lambda'}{2}$$

wobei d die Dicke der Platte, α' der Brechungswinkel, k eine beliebige ganze Zahl und λ' die Wellenlänge des betrachteten homogenen Lichts für Glas.

Diese Formel ergibt sich aus beiden Theorien und man kann sich leicht Rechenschaft geben, warum sie gültig bleibt auch wenn man die innen vielfach reflectirten Strahlen noch hereinzieht. Einmal nämlich ist die Intensität dieser vielfach reflectirten Strahlen sehr gering und zweitens, wenn man einen r mal und einen anderen s mal im Innern reflectirten Strahl betrachtete, so ist der Gangunterschied:

$$2(s - r)d \cos \alpha'$$

also Dunkelheit, so oft:

$$d \cos \alpha' = k \frac{\lambda'}{2(s - r)}$$

Bei dem Newton'schen Versuch erhält man also durch die Interferenz dieser zwei Strahlen viel mehr dunkle Ringe, aber immer fällt der $(s - r)$ te Ring zusammen mit einem Ring, den die gewöhnliche Betrachtung giebt.

Aus diesen zwei Bemerkungen ergibt sich, dafs die vollständigere Betrachtung von der gewöhnlichen sich besonders in der Intensität der hellen Ringe unterscheidet, da für die ersteren in den Zwischenraum zwischen die dunkeln Hauptringe noch schwache dunkle Ringe fallen, welche die zweite vernachlässigt. Ferner sieht man, dafs, wenn es sich blofs um die Form nicht um die wechselnde Intensität der Ringe handelt, die Vernachlässigung der innen mehrmal reflectirten Strahlen gestattet ist.

Ich gehe nun zur Erklärung der angeführten Erscheinung. Es falle auf die erste Glasplatte ein Lichtstrahl A , er giebt zwei reflectirte B und C , der erste keinmal, der zweite einmal innen reflectirt; diese zwei Strahlen fallen auf die zweite Platte und geben vier reflectirte Strahlen. Verfolgt man die umgekehrte Richtung, so geben diese vier Strahlen als einfallende gedacht den einzigen A und interferiren, wenn der Gangunterschied nicht grofs ist. Da die Platten dick sind und nahezu parallel, so können Strahlen nur interferiren, wenn sie dieselbe Zahl von Reflexion er-

litten haben, also nur der Strahl D , durch Reflexion von B im Innern der zweiten Platte, und der Strahl E , durch Reflexion von C an der Vorderfläche der zweiten Platte entstanden.

Der Gangunterschied der Strahlen B und C ist nun nach den obigen Bezeichnungen:

$$2 d \cos \alpha'$$

der Gangunterschied der durch die zweite Platte hervor-
gebracht wird, ist:

$$2 d \cos \alpha',$$

wenn α' , der neue Brechungswinkel, der nicht viel verschieden ist von α , da die Platten nahezu parallel sind.

Folglich der Gangunterschied der Strahlen D und E :

$$2 d (\cos \alpha' - \cos \alpha).$$

Für das Auge, welches in der Richtung A sieht, findet Dunkelheit statt, so oft:

$$2 d (\cos \alpha' - \cos \alpha) = k \cdot \lambda.$$

Aus dieser Bedingungsgleichung ist die Form der dunkeln Linien abzuleiten.

Man nehme die Kante des Flächenwinkels der zwei Platten zur Axe der y , die Axe der x in einer Gränzebene der ersten Platte senkrecht zur Axe der y , die Axe der z senkrecht zu beiden andern. Da es sich nur um Richtungen handelt, so kann man den unter dem Winkel α im Azimuth w gegen die Ebene der xz einfallenden Strahl durch den Ursprung gelegt denken: bewegt sich dann der reflectirte in den von den drei positiven Axen gebildeten Raum, so ist seine Gleichung:

$$\frac{x}{\cos w} = \frac{y}{\sin w} = \frac{z}{\cot \alpha}$$

Ist ferner die Gränzebene der zweiten Platte:

$$z = x \operatorname{tg} \mu,$$

so ist deren Normale:

$$z = -x \cot \mu$$

und der Einfallswinkel α , für die zweite Platte gegeben durch:

$$\cos \alpha_1 = \sin \mu \cos w \sin \alpha - \cos \mu \cos \alpha$$

Setzt man $\frac{n k \lambda'}{2d} = \vartheta$, wobei n das Brechungsverhältniß ist, so hat man jetzt als Bedingungsgleichung:

$$(1). \quad \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \\ - \sqrt{n^2 - 1 + (\sin \mu \cos w \sin \alpha - \cos \mu \cos \alpha)^2} = \vartheta.$$

Denkt man sich nun das Auge auf der Axe der y , so sieht es für ein constantes ϑ eine dunkle Linie auf eine zur xz -Ebene parallele Ebene projicirt. Da das Auge stets noch in der Richtung der Axe der y sieht, so kann man die Coordinaten x und z dieser dunkeln Linie ausdrücken durch:

$$(2). \quad x = f \sin \alpha \cos w \quad z = f \cos \alpha,$$

wo f die Sehweite des Auges ist.

Eliminirt man aus (1) und (2) die Winkel α und w , so hat man die gesuchte Linie. Bequemer ist es, die Linie auf andere zu beziehen, welche zu den Platten symmetrisch liegen. Diefs geschieht, indem man die Axen um den Winkel $\frac{1}{2}\mu$ dreht. Sind ξ und ζ die neuen Coordinaten, so ist:

$$x = \xi \cos \frac{1}{2}\mu - \zeta \sin \frac{1}{2}\mu = f \sin \alpha \cos w \\ z = \xi \sin \frac{1}{2}\mu + \zeta \cos \frac{1}{2}\mu = f \cos \alpha,$$

also nach einigen Umformungen:

$$f\vartheta = \sqrt{[(n^2 - 1)f^2 + (\xi \sin \frac{1}{2}\mu + \zeta \cos \frac{1}{2}\mu)^2]} \\ - \sqrt{[(n^2 - 1)f^2 + (\xi \sin \frac{1}{2}\mu - \zeta \cos \frac{1}{2}\mu)^2]}.$$

Schafft man die Wurzeln weg, so ergibt sich endlich:

$$16\xi^2\zeta^2\sin^2\frac{1}{2}\mu\cos^2\frac{1}{2}\mu - 4f^2\vartheta^2[(n^2 - 1)f^2 \\ + \xi^2\sin^2\frac{1}{2}\mu + \zeta^2\cos^2\frac{1}{2}\mu] + f^4\vartheta^4 = 0$$

oder

$$[4\xi^2\sin^2\frac{1}{2}\mu - f^2\vartheta^2][4\zeta^2\cos^2\frac{1}{2}\mu - f^2\vartheta^2] = 4f^4\vartheta^2(n^2 - 1)$$

und diefs ist die Gleichung der gesuchten Linien in der einfachsten Form.

Bedenkt man, dafs $f\vartheta$ stets klein ist gegen ξ und ζ , so kann man $f^2\vartheta^2$ in den zwei Factoren links weglassen und man hat:

$$\xi\zeta = \pm \frac{f^2\vartheta\sqrt{n^2 - 1}}{\sin \mu}$$

d. h. zwei Systeme gleichseitiger Hyperbeln, deren Asymptoten die Coordinatenachsen sind, und darin liegt der Grund der Aehnlichkeit mit der Erscheinung bei gekreuzten Gypsplatten.

Es möge mir gestattet seyn, hier noch einen Nachtrag zu meiner letzten Abhandlung im 109. Bande anzufügen, und zwar zur No. 7. Es sind nämlich in diesen Annalen Bd. 58, S. 453 Beobachtungen von Brewster über Farben dünner Plättchen erwähnt, welche ebenfalls in den Formeln 29 bis 36 enthalten sind.

1. Bei einer Wasserschicht auf Flufsspath verschwinden die Ringe, wenn das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, und der Einfallswinkel $53^{\circ} 11'$ oder $78^{\circ} 4'$ beträgt (S. 458). Der erste Winkel ist der Polarisationswinkel des Wassers, also hat man in den Formeln 29 bis 36:

$$\alpha' = \frac{1}{2}\pi - \alpha \text{ und } m = 45^{\circ}$$

$$\gamma - f = \gamma' \text{ und } \gamma + f_0 = -\gamma'$$

und nach Formel 32:

$$s_0 = s \frac{\cos(45+n)}{\cos(15-n)}$$

d. h. die Intensität des zurückgeworfenen Lichts ist unabhängig von γ' oder von der Dicke der Wasserschicht, es giebt keine farbigen Ringe. Dieses Resultat beruht darauf, dafs, wenn die Wasserschicht kein Licht reflectirt, mit dem am Flufsspath reflectirten Licht keine Interferenz entstehen kann.

Ebenso unterbleibt die Interferenz, wenn das Licht auf den Flufsspath unter dessen Polarisationswinkel aus dem Wasser auffällt, also wenn:

$$\alpha'' = \frac{1}{2}\pi - \alpha', \text{ oder } n = 45^{\circ}.$$

Dies geschieht beim Einfallswinkel $78^{\circ} 4'$ auf Wasser.

2. Auch bei andern Einfallswinkeln, als den Polarisationswinkeln der zwei Substanzen können die Ringe zum Verschwinden gebracht werden, indem man das Licht unter

einem bestimmten Azimuth polarisirt. Z. B. bei einer Wasserschicht auf schwarzem Glas, dessen Polarisationswinkel $56^{\circ} 45'$ ist, erhält man keine Ringe, wenn das Licht im Azimuth 79° polarisirt unter dem Polarisationswinkel einfällt (S. 461).

Nimmt man die Intensität des einfallenden Lichts zur Einheit, so geben die Formeln 29 bis 36:

$$s_0^2 = 0,003814 \frac{tg^2 \gamma'}{1 + 1,004 tg^2 \gamma'}$$

$$\sigma_0^2 = 0,005789 \frac{1 + 0,2604 tg^2 \gamma'}{1 + 0,8824 tg^2 \gamma'}$$

Sowohl das senkrecht zur Einfallsebene als das in derselben polarisirte Licht giebt Ringe. Es ist aber für $tg \gamma' = 0$:

$$s_0^2 = 0 \text{ und } \sigma_0^2 = 0,005789$$

für $tg \gamma' = \infty$ ist:

$$s_0^2 = 0,003799 \text{ und } \sigma_0^2 = 0,001708$$

d. h. bei dem senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Licht erhält man Ringe, deren Intensitäten 0 zum Minimum und 0,003799 zum Maximum haben, bei den in der Einfallsebene polarisirten Ringen, deren Intensitäten 0,005789 zum Maximum und 0,001708 zum Minimum haben. Diese Ringe fallen zusammen und die Gesamtintensität ($s_0^2 + \sigma_0^2$) ist:

$$0,005789 \text{ für } tg \gamma' = 0 \text{ und } 0,005507 \text{ für } tg \gamma' = \infty,$$

d. h. es entstehen Ringe, deren Intensität zwischen 0,0058 und 0,0055 wechselt und darum für das Auge nicht bemerkbar sind.

Für einen beliebigen Einfallswinkel findet man das Azimuth, in welchem das Licht polarisirt seyn muß, damit die Ringe verschwinden, wenn man ausdrückt, daß die Gesamtintensität ($s_0^2 + \sigma_0^2$) für $tg \gamma' = 0$ und für $tg \gamma' = \infty$ denselben Werth hat. Diefß giebt nach den Formeln 32 bis 36, wenn das gesuchte Azimuth φ ist:

$$\sin^2 \varphi \frac{\cos^2(m+n)}{\cos^2(m-n)} + \cos^2 \varphi \frac{\cos^2(\mu+\nu)}{\cos^2(\mu-\nu)}$$

$$= \sin^2 \varphi \frac{\sin^2(m-n)}{\sin^2(m+n)} + \cos^2 \varphi \frac{\sin^2(\mu-\nu)}{\sin^2(\mu+\nu)}$$

woraus:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin(m+n) \cos(m-n)}{\sin(\mu+\nu) \cos(\mu-\nu)} \sqrt{\frac{\sin 4\mu \sin 4\nu}{\sin 4m \sin 4n}}.$$

Wendet man diese Formel auf den eben behandelten Fall an, so ergibt sich $\varphi = 79^\circ 23'$, während Brewster sagt: etwa $79^\circ 0'$.

3. Endlich finden sich S. 462 Beobachtungen über eine Seifenschicht auf Diamant. Die Resultate giebt folgende Tabelle:

Einfallswinkel	Azimuth der Polarisationssebene		
		nach Brewster's	nach meiner
	beobachtet	Formel	Formel
55° 52'	90° 0'	90° 0'	90° 0'
60	73 0	74 27	74 7
65	68 30	67 49	67 28
67 43	66 20	65 10	64 50
70	63 30	63 14	64 4
75	59 15	58 23	59 14

Brewster's Formel beruht darauf, daß er annimmt (S. 463), die zwei Lichtbündel, aus deren Interferenz die Ringe sich bilden, seyen für den vorliegenden Fall senkrecht zu einander polarisirt und darum entsteht keine Interferenz.