Zur graphischen Behandlung der Dioptrik.

Von **E. Kobald** in Leoben.

Fasst man in der geometrischen Optik einen leuchtenden Punkt und einen Lichtstrahl als gleichberechtigte Elemente auf, so erkennt man, dass das geometrische Princip der Dualität auch auf die Dioptrik, resp. Katoptrik übertragen werden kann. Bei den bekannten dioptrischen Constructionen*) zeigt sich aber eine eines jeden sachlichen Grundes entbehrende entschiedene Bevorzugung des leuchtenden Punktes und damit im Zusammenhange bei der Wahl der Cardinalpunkte eine entsprechende Bevorzugung der Hauptpunkte vor den Knotenpunkten. In den nachstehenden Zeilen soll die in der diesbezüglichen Literatur bisher bestehende Lücke zum Theil ausgefüllt und zunächst eine fundamentale Aufgabe der Dioptrik, deren Lösung sich unter Zugrundelegung der geraden Linie als Raumelement für eine naturgemäße Darstellung der Theorie der optischen Instrumente, wie an dem speciellen Falle eines Fernrohres gezeigt werden soll, als besonders geeignet erweist, behandelt werden.

Es seien zwei an einander stoßende Systeme centrierter, brechender Kugelflächen mit gemeinschaftlicher Achse durch ihre Knoten- und Brennpunkte gegeben.

In Fig. 1 seien die Punkte F_1 und F'_1 , beziehungsweise der erste und zweite Hauptbrennpunkt des ersten und die Punkte F_2 , F'_2 die analogen Punkte des zweiten Systems; K_1 , K'_1 seien die Knotenpunkte des ersten und K_2 , K'_2 die des zweiten Systems. Durch die Punkte K'_1 und K_2 ziehe man zwei parallele Gerade $K'_1 G_1$ und $K_2 G_2$ unter beliebiger Neigung gegen die Achse;

*) Man vergleiche z. B. Reusch, Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems; oder: Ferraris, Le proprietà cardinali degli strumenti diottrici.

die Punkte G_1 und G_2 seien in den zu den Brennpunkten F_1 und F_2 gehörigen Brennebenen gelegen. Es werden nun die Punkte G_1 und G_2 durch eine Gerade mit einander verbunden und parallel zu dieser durch K_1 und K_2 die Geraden $K_1 L$ und $K_2 P$, wobei L und P den durch die Brennpunkte F_1 und F_2 gehenden Brennebenen angehören, gezogen. Durch die Punkte L und P werden nun Parallele zu $K_1 G_1$, resp. $K_2 G_2$ gezogen, welche die

Fig. 1.

Achse in den Punkten K und K' schneiden. Ich behaupte nun, dass die so erhaltenen Punkte K und K' die Knotenpunkte der aus beiden Systemen bestehenden Combination sind. Da $KL \parallel K'P$ ist, ist zu zeigen, dass wenn KL als einfallender Strahl aufgefasst wird, $K'P$ der zugehörige, aus dem zweiten System austretende Strahl ist.

Um dies einzusehen, möge an die in Fig. 2 gegebene Construction des zu einem einfallenden Strahle AC gehörigen austretenden Strahles $A'C'$ nach der Brechung in einem durch seine Brennpunkte F , F' und Knotenpunkte K , K' gegebenen optischen System erinnert werden.

Fig. 2.

Demnach ist $G_1 G_2$ der nach der Brechung im ersten Systeme austretende Strahl, wenn KL der einfallende ist. Fasst man $G_1 G_2$

als einfallenden Strahl für das zweite System auf, so ist PK' der zugehörige austretende Strahl, womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Um die Brennpunkte der Combination zu finden, werde $F'_1 G_2$ und parallel zu dieser Geraden $K_1 N$ und $K'_2 Q$ gezogen; die Punkte N und Q liegen in den durch F_1 und F'_2 gehenden Brennebenen. Zieht man durch N die Parallele zur Achse, so schneidet diese KL in einem Punkte M der ersten Brennebene der Combination; zieht man ferner durch Q die Parallele zu $G_2 K_2$, so schneidet diese die Achse im zweiten Brennpunkte F' der Combination. In der That, fasst man die zur Achse Parallele MN als einfallenden Strahl auf, so ist nach der Brechung im ersten Systeme $F'_1 G_2$ der austretende Strahl; ist ferner $F'_1 G_2$ für das zweite System der einfallende Strahl, so ist $Q F'$ der austretende Strahl, d. h. F' der zweite Brennpunkt der Combination; $F' M$ sei die zugehörige Brennpunktebene. Betrachtet man aber den Punkt M als leuchtenden Punkt, von welchem die Strahlen ML und MN ausgehen, so sind die zugehörigen, die Combination verlassenden Strahlen PK' und $Q F'$ einander parallel, d. h. M gehört der ersten Brennebene an.

Fällt man von M das Loth auf die Achse, so ist dessen Fusspunkt F der erste Brennpunkt des ganzen Systems.

Die auseinandergesetzte Construction gestattet aber auch den Ort der Cardinalpunkte und der Brennweiten des zusammengesetzten Systems in der einfachsten Weise zu berechnen. Zu dem Ende wähle man einen beliebigen Punkt O auf der Achse, etwa links von K , als Anfangspunkt und bezeichne die Abscissen der Punkte:

$$\begin{array}{lll} (F_1, K_1, K'_1, F'_1), & \text{resp. mit } F_1, K_1, K'_1, F'_1 \\ (F_2, K_2, K'_2, F'_2) & \text{,,} & \text{,,} & F_2, K_2, K'_2, F'_2 \\ (F, K, K', F) & \text{,,} & \text{,,} & F, K, K', F' \end{array}$$

und setze: $K_2 - K'_1 = t$

$$\begin{array}{ll} K_1 - F_1 = q'_1, & F'_1 - K'_1 = q_1 \\ K_2 - F_2 = q'_2, & F'_2 - K'_2 = q_2 \\ K - F = q', & F' - K' = q, \end{array}$$

so ist zunächst:

$$a) F_2 - F'_1 = t - q_1 - q'_2.$$

Aus den Ähnlichkeiten:

$$\triangle F_1 K_1 N \sim \triangle F'_1 F_2 G_2 \sim \triangle F'_2 Q K'_2$$

folgen mit Rücksicht auf a) die Gleichungen:

$$b) \left\{ \begin{array}{l} F_1 N = F_2 G_2 \frac{\varphi'_1}{t - \varphi_1 - \varphi'_2} \\ F_2 Q = F_1 G_1 \frac{\varphi_2}{t - \varphi_1 - \varphi'_2}; \end{array} \right.$$

ebenso erhält man wegen:

$$\triangle K_1 L N \infty \triangle F'_1 G_1 G_2 \infty \triangle K'_2 P Q.$$

Die Gleichungen:

$$c) \left\{ \begin{array}{l} L N = F'_1 G_1 \frac{\varphi'_1}{t - \varphi_1 - \varphi'_2} \\ P Q = F'_1 G_1 \frac{\varphi_2}{t - \varphi_1 - \varphi'_2}. \end{array} \right.$$

Bezeichnet man den Winkel, welchen die durch K'_1 willkürlich gezogenen Gerade $K'_1 G_1$ mit der Achse einschließt, mit α , so ist

$$d) \left\{ \begin{array}{l} F_2 G_2 = \varphi'_2 \cdot \tan \alpha, \\ F'_1 G'_1 = \varphi_1 \cdot \tan \alpha, \end{array} \right.$$

welche Werte man sich in b) und c) eingesetzt denken möge. Ferner ist:

$$\begin{aligned} F_1 N &= F M = (F - K) \tan \alpha \\ P Q &= F' M' = (K' - F') \cdot \tan \alpha \\ L N &= (F_1 - F) \tan \alpha \\ F'_2 Q &= (F' - F'_2) \tan \alpha; \end{aligned}$$

dies mit b) und c) unter Berücksichtigung von d) verglichen, gibt:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} K - F = \varphi' = \frac{\varphi'_1 \varphi'_2}{\varphi_1 + \varphi'_2 - t} \\ F' - K' = \varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi'_2 - t} \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} F - F_1 = \frac{\varphi_1 \varphi'_1}{\varphi_1 + \varphi'_2 - t} \\ F'_2 - F' = \frac{\varphi_2 \varphi'_2}{\varphi_1 + \varphi'_2 - t}. \end{array} \right.$$

Addiert man die zwei ersten der Gleichungen (1) und (2) und ebenso die zwei letzten derselben Gleichungen zu einander, so erhält man nach leichter Umformung:

$$(3) \quad \begin{cases} K = K_1 + \frac{t \varphi'}{\varphi_2} \\ K' = K_2 - \frac{t \varphi}{\varphi_1} \end{cases}$$

Wenn man nun zunächst nur drei Medien annimmt und dann von Fläche zu Fläche fortschreitend sich die auseinander-gesetzte Construction jedesmal durchgeführt denkt, so gelangt man zur Erkenntnis, dass irgend ein optisches System der gedachten Art durch seine Brenn- und Knotenpunkte — die Existenz und Lage der Hauptpunkte ergibt sich ebenfalls durch Erwägungen der einfachsten Art — vollkommen bestimmt ist. Ferner ergibt sich, wie zu jedem einfallenden Strahl der austretende und zu jedem Punkt das entsprechende Bild sowohl durch Construction als Rechnung gefunden werden kann. Verfährt man in der angedeuteten Weise vollkommen systematisch, so gelangt man zu einer vollständigen und zugleich sehr anschaulichen Darstellung der Dioptrik eines Systems centrierter brechender Kugelflächen.

Die angegebene Construction verliert ihre Bedeutung, d. h. die Cardinalpunkte fallen ins Unendliche, wenn der zweite Hauptbrennpunkt F'_1 des ersten Systems mit dem ersten Hauptbrennpunkt F_2 des zweiten Systems zusammenfällt. Ein so beschaffenes System, welches bekanntlich die Eigenschaft hat, parallel zu einander einfallende Strahlen wieder parallel zu einander austreten zu lassen, wird ein teleskopisches oder ein Fernrohr genannt. Die beiden Theile, aus welchem dasselbe besteht, mögen als Objectiv und Ocular bezeichnet werden.

In Fig. 3 sei BK_1 ein unter dem beliebigen Winkel α gegen die Achse auffallender Hauptstrahl des Objectivs; der entsprechende, austretende Strahl sei $D'\Omega$, seine Neigung gegen die Achse $= -\alpha'$. Der Punkt Ω , in welchem der gebrochene Strahl die Achse schneidet, ist der Ort des Auges. Zieht man $AC \parallel BK_1$, so ist der zugehörige austretende Strahl $A'C' \parallel D'\Omega$. Denkt man sich im Punkte A der Achse eine Senkrechte $AB = y$ errichtet und betrachtet diese als lineares Object, so ist $A'B' = y'$ das zugehörige Bild. Die beiden Dreiecke $K'_1 F'_1 G$ und $K_2 F_2 G$ haben eine gemeinschaftliche Seite, welche resp. den Winkeln α und α' gegenüberliegt. Daher ist:

$$\varphi_1 \cdot \tan \alpha = \varphi_2 \cdot \tan (-\alpha');$$

oder ersetzt man das Verhältniß der Tangenten durch das der Winkel, so erhält man die Vergrößerung:

$$(A) \quad \frac{a'}{a} = - \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

Fig. 3.

Da $AB = CD$ und $A'B' = C'D'$ ist, so erhält man aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CDK_1 und $C'D'K_2$ die Linearvergrößerung

$$(B) \quad \frac{y'}{y} = - \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Mittelst der Dreiecke $K_2F_2'D'$ und $\Omega F_2'D'$ ergibt sich:

$$\varphi_2 \tan \alpha = \overline{F_2'\Omega} \cdot \tan(-\alpha'),$$

d. i.

$$\overline{K_2'\Omega} = \varphi_2 + \varphi_2 \cdot \frac{\varphi_2'}{\varphi_1} = \omega.$$

Setzt man noch:

$$l = \varphi_1 + \varphi_2' = K_1'K_2,$$

wo man l als die Rohrlänge bezeichnen kann, so erhält man zur Bestimmung der Lage des Augenpunktes die Gleichung:

$$(C) \quad \omega = l \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Setzt man ferner die Gegenstandsweite $AK_1 = f$ und die Bildweite $A'\Omega = f'$, so ergibt sich aus den Dreiecken ABK_1 und $A'B'\Omega$:

$$f = \frac{y}{\tan \alpha}$$

$$f' = \frac{y'}{\tan \alpha'}.$$

Dividiert man diese Gleichungen durcheinander, so erhält man, wenn man gleichzeitig (A) und (B) berücksichtigt:

$$\frac{f'}{f} = \frac{\varphi_2 \varphi_2'}{\varphi_1 \varphi_1'}.$$

Bezeichnet man die absoluten Brechungsexponenten des ersten und letzten Mediums, resp. mit n und n' , so hat man:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1'} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\varphi_2'}{\varphi_1} = - \frac{n}{n'} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Daher erhält man:

$$(D) \quad \frac{f'}{f} = \frac{n}{n'} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha'} \right)^2.$$

Bild und Object bewegen sich also stets im gleichen Sinne; die Geschwindigkeit, mit der sich das Object bewegt, ist aber, wenn das Fernrohr vergrößert, im Verhältnisse des Quadrates der Vergrößerung größer als jene, mit der sich das Bild bewegt.

Da nun K_1 und Ω conjugierte Punkte sind, so muss es über Ω hinaus einen Punkt — er möge mit O bezeichnet werden — geben, in welchem bei fortgesetzter Annäherung des Objectes an das Fernrohr das Bild vom Gegenstande gleichsam eingeholt wird.

Um diesen Punkt durch eine Construction zu erhalten, denke man sich in Fig. 4 durch K_1' unter beliebigem Winkel $K_1'\Phi$ gezogen und den Punkt Φ mit K_2 verbunden. Man ziehe nun $K_1G_1 \parallel K_2\Phi$ und $K_2'G_2 \parallel K_1'\Phi$. Die Verbindungslinie G_1G_2 schneidet, hinreichend verlängert, die Achse in dem gesuchten

Punkte O . Um dies zu beweisen, denke man sich zunächst $G_2 \Omega \parallel K_2 \Phi$ gezogen, so ist der Punkt Ω der Ort des Auges, was man leicht einsieht, wenn man sich noch durch K_1 einen Hilfsstrahl parallel zu $K'_1 \Phi$ gezogen denkt. Nun erwäge man,

Fig. 4.

dass F_1 und F_2' sowohl, als auch K_1 und Ω conjugierte Punkte sind, woraus folgt, dass die Geschwindigkeiten, mit welchen Object und Bild sich bewegen, sich verhalten wie $F_1 K_1 : F_2' \Omega$. Da aber

$$\triangle O K_1 G_1 \sim \triangle O \Omega G_2 \text{ und } \triangle \Omega F_2' G_2 \sim \triangle K_1 F_1 G_1$$

ist, so folgt:

$$\frac{O K_1}{O \Omega} = \frac{F_1 K_1}{F_2' \Omega} = \frac{\varphi_1 \varphi_1'}{\varphi_2 \varphi_2'},$$

d. h. während der Gegenstand die Strecke $K_1 O$ zurücklegt, legt das Bild die Strecke ΩO zurück. Rechnet man die Bild- und Gegenstandsweite von dem Punkte O aus, und bezeichnet die bezüglichen Abstände mit f_0 und f_0' , so erhält nach (D):

$$(D) f_0' = f_0 \cdot \frac{n}{n'} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha'} \right)^2.$$

Die Construction des Punktes O , welcher von Einigen der Mittelpunkt des teleskopischen Systems genannt wird, gestaltet sich besonders einfach, wenn man das Objectiv und Ocular als

unendlich dünne Linsen annimmt. In diesem Falle ist derselbe nämlich das Bild, welches das Ocular für sich allein von dem Halbierungspunkte des Linsenabstandes entwirft.

Damit das vom Fernrohr erzeugte Bild deutlich erscheint, muss dasselbe mindestens um ebensoviel vom Auge entfernt sein als der Nahepunkt des Auges von diesem. Da für ein bestimmtes Auge diese Entfernung eine gegebene Größe ist, so kann, wenn in der Gleichung (D) dieselbe für f' eingesetzt wird, die kleinste Entfernung f von dem teleskopischen Systeme, für welche die Accommodation noch möglich ist, berechnet werden. Für ein normalsichtiges Auge kann dieser specielle Wert von f' etwa zu 12—15 cm angenommen werden.

Nimmt man die Vergrößerung z. B. gleich 15 und $n' = n$ an, so wird:

$$f = 15^3 \text{ cm} = 33.75 \text{ m}.$$

Für ein und dasselbe Auge wächst die fragliche Entfernung mit dem Quadrat der Vergrößerung. Ist das Fernrohr ein umgekehrtes, d. h. ein solches teleskopisches System, welches verkleinert, so wird im allgemeinen schon für sehr geringe Entfernungen des Objectes vom Objective deutliches Sehen möglich sein. Nimmt man z. B. ein aus 2 unendlich dünnen Sammellinsen bestehendes Fernrohr von 15 cm Länge mit dreimaliger Vergrößerung, so kann, wenn dasselbe umgekehrt wird, ein Object bei einer Entfernung von circa 5 cm von der ersten Linse deutlich gesehen werden. Bei einem umgekehrten Gallileischen Fernrohre, wo der Augenpunkt — vorausgesetzt, dass dasselbe beim directen Durchsehen vergrößert — um mehr als die Rohrlänge von der Zerstreuungslinse liegt, kann bei jeder Entfernung des reellen Objectes von der Concavlinse die Accommodation stattfinden.

Soviel mir bekannt ist, wurde auf die auseinandergesetzte Bedingung dafür, dass mittelst eines teleskopischen Systems ein in endlicher Entfernung gelegenes Object deutlich gesehen wird, bisher noch nie aufmerksam gemacht.*)

Eine wichtige Anwendung findet das umgekehrte Fernrohr beim Polarisationsmikroskop, welches auch als mikroskopischer

*) Man vergleiche z. B. Gauß' Werke. Bd. V, § 260, Art. 12; Hansen, „Untersuchung des Weges eines Lichtstrahles...“, S. 120 und 121; Ferraris, Strumenti diottrici, S. 176.

Polarisationsapparat*) oder als Konoskop**) bezeichnet wird. Das Linsensystem, welchem nämlich die Aufgabe zufällt, die aus dem zu untersuchenden Krystalle austretenden, stark divergenten Strahlen schwächer divergent zu machen, wird sowohl wegen der zu erreichenden Größe des „Gesichtsfeldes“ als auch wegen Hintanhaltung einer radialen Verzerrung des Interferenzbildes zweckmäßig als verkleinerndes Fernrohr hergestellt.

*) Müller-Pfaundler, Lehrb. d. Physik. VIII. Auflage, II. Band. Seite 567.

**) Tschermak, Lehrb. d. Mineralogie. 3. Aufl., S. 174.