Über die Bedeutung kleiner Massenänderungen für die Newtonsche Centralbewegung.

Von Dr. E. Strömgren.

Eine von Th. v. Oppolzer ausgesprochene Vermutung, daß die durch Niederströmen von Materie aus dem Welt- raume bewirkte Vergrößerung der Erdmasse eine teilweise Erklärung der Säkularänderung der Mondlänge geben könnte, hat Gylden veranlaßt (A. N. 2593), eine Untersuchung des obigen Themas vorzunehmen.

Nachdem Gylden zuerst einige Sätze über den allge- meinen Fall gegeben hat, untersucht er besonders die Be- wegung eines Körpers, wenn die attrahierende Masse eine langsame, der Zeit proportionale, Massenvergrößerung er- leidet, ein Fall, der wohl, jedenfalls für lange Zeiten, den im Sonnensystem wirklich vor sich gehenden Prozessen einiger- maßen entsprechen dürfte.

Gylden leitet mit Hülfe von einer reduzierten Zeit durch die Methode der successiven Annäherungen die Bewegung in einer intermediären Bahn ab und führt die Untersuchung bis auf die erste Potenz der Bahnexcentricität durch. In derselben Richtung wie Gylden hat später Mestschersky (A. N. 3153 und 3807) den allgemeinen Fall behandelt und gezeigt, daß unter gewissen Annahmen über die Massen- änderung die Bewegungsgleichungen sich exakt integrieren lassen.

Lehmann-Filhés kommt in seinem Aufsatz über Cen- tralbewegungen (A. N. 3479–80) auf dieselbe Frage zurück. Für den Fall der zur Zeit proportionalen Massenänderung leitet er durch die Methode der Variation der elliptischen Bahnelemente den Satz her, daß, wenn wir von höheren Potenzen der Massenänderung absehen, die Bahn sich der Zeit proportional langsam verengert, während die Excentricität und die Perihellänge nur periodischen Variationen unterworfen sind. Dieser Satz gilt für beliebige Excentricitäten.

Eine wirkliche Durchführung der Rechnung hat aber Lehmann-Filhés nicht gegeben. Der Verfasser hat das Pro- blem aufs neue in Angriff genommen und nach veränderter Methode die Berechnung des Gylden–Lehmann-Filhéschen Spezialfalles durchgeführt. Es hat sich dabei herausgestellt, daß die Bewegung ohne jede Reihenentwicklung in bezug

auf die Excentricität sich in geschlossener und sehr einfacher Form ausdrücken läßt.

Wir bezeichnen im allgemeinen das Gesetz der Massen- änderung des attrahierenden Körpers mit $\sigma \varphi(t)$, wo σ eine sehr kleine Größe und $\varphi(0) = 0$ ist. Die Bewegungs- gleichungen lauten dann

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2 [1 + \sigma \varphi(t)]}{r^3} x &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2 [1 + \sigma \varphi(t)]}{r^3} y &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

wo k^2 die Gravitationskonstante darstellt und die Summe der zwei Massen gleich 1 ist für $t = 0$.

Es mag sofort erwähnt werden, daß außer dem von Gylden und Lehmann-Filhés hergeleiteten Flächenintegral

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \text{Konst.} \quad (2)$$

wir auch in einer ersten Näherung in bezug auf die Massen- änderung ein dem Integral der lebendigen Kraft entsprechen- des Integral ableiten können. Wenn wir die erste Gleichung (1)

mit $2 \frac{dx}{dt}$, die zweite mit $2 \frac{dy}{dt}$ multiplizieren, erhalten wir, wenn wir mit V die Geschwindigkeit bezeichnen

$$\frac{d(V^2)}{dt} + \frac{2k^2}{r^2} \frac{dr}{dt} + 2k^2 \sigma \varphi(t) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = 0;$$

d. i.

$$\frac{d(V^2)}{dt} - 2k^2 \frac{d}{dt} \frac{1}{r} - 2k^2 \sigma \varphi(t) \frac{d}{dt} \frac{1}{r} = 0.$$

Durch Integration ergibt sich:

$$V^2 - 2 \frac{k^2}{r} - 2k^2 \sigma \int \varphi(t) \frac{d}{dt} \frac{1}{r} dt = \text{Konst.}$$

oder, wenn wir partiell integrieren:

$$V^2 - 2 \frac{k^2}{r} [1 + \sigma \varphi(t)] + 2k^2 \sigma \int \varphi'(t) \frac{1}{r} dt = \text{Konst.} \quad (3)$$

Wenn wir ein für die Zeit t oskulierendes Elementen- system definieren, bezogen auf die für diese Zeit geltende Masse, $1 + \sigma \varphi(t)$, erhalten wir mit Lehmann-Filhés aus (2) für den Parameter (p):

$$k\sqrt{[1 + \sigma \varphi(t)] p} = \text{Konst.} \quad (4)$$

Für die oskulierende halbe große Achse (a) muß die Gleichung Geltung haben:

$$V^2 = k^2 [1 + \sigma \varphi(t)] \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (5)$$

Wenn wir mit a_0 die halbe große Achse in der ohne

Rücksicht auf die Massenänderung berechneten Bahn bezeichnen, erhalten wir aus (3):

$$V^2 = k^2 \left[1 + \sigma \varphi(t) \right] \frac{2}{r} - \frac{k^2}{a_0} - 2 k^2 \sigma \int_0^t \varphi'(t) \frac{1}{r} dt, \quad (6)$$

Durch Subtraktion erhalten wir aus (5) und (6):

$$\frac{1}{a} + \frac{\sigma \varphi(t)}{a} = \frac{1}{a_0} + 2 \sigma \int_0^t \varphi'(t) \frac{1}{r} dt. \quad (7)$$

Setzen wir $a = a_0 + \delta a$, und vernachlässigen wir die zweite Potenz von σ , so gibt uns (7):

$$\delta a = a_0 \sigma \varphi(t) - 2 a_0^2 \sigma \int_0^t \varphi'(t) \frac{1}{r} dt. \quad (8)$$

Der Wert $\frac{1}{r}$ ist aus der Keplerschen Bewegung als Funktion von t bekannt (Tisserand I, 224):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} \left(1 + 2 \sum_1^\infty \mathcal{F}_i(i\epsilon) \cos i(\epsilon + \mu t - \pi) \right). \quad (9)$$

Wenn wir dann das Integral in (8) berechnen können, leiten wir in einer ersten Näherung aus (4) und (8) die Variation der halben großen Achse (a) und Excentricität (e) ab.

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{\mu a} \frac{\partial \Omega}{\partial \epsilon} \\ \frac{de}{dt} &= - \frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu a^2 e} \frac{\partial \Omega}{\partial \pi} - \sqrt{1-e^2} \frac{(1 - \sqrt{1-e^2})}{\mu a^2 e} \frac{\partial \Omega}{\partial \epsilon} \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu a^2 e} \frac{\partial \Omega}{\partial e} \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= - \frac{2}{\mu a} \frac{\partial \Omega}{\partial a} + \sqrt{1-e^2} \frac{(1 - \sqrt{1-e^2})}{\mu a^2 e} \frac{\partial \Omega}{\partial e} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Wenn wir dann die partiellen Derivierten der Störungsfunktion Ω in eine geeignete Form gebracht und die Gleichungen (12) integriert haben, ist aber zu bemerken, daß wir zu den in dieser Weise erhaltenen Elementen eine Korrektur anzubringen haben.

Die durch (12) hergeleiteten Elementenvariationen stellen die Differenzen dar zwischen den auf die Masse Eins bezogenen oskulierenden und den auf dieselbe Masse bezogenen ungestörten Elementen. Das, was wir aber suchen, sind die

Wir werden im folgenden sehen wie einfach sich die Berechnung des Integrals in (8) stellt, wenn $\varphi(t) = t$ angenommen wird.

Um aber auch die Variationen der zwei übrig bleibenden Elemente, m. Länge der Epoche (ϵ) und Perihellänge (π) zu verfolgen, greifen wir das ganze Problem in anderer Weise an.

Wir schreiben die Gleichungen (1) in folgender Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2 x}{r^3} &= - k^2 \sigma \varphi(t) \cdot \frac{x}{r^3} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2 y}{r^3} &= - k^2 \sigma \varphi(t) \cdot \frac{y}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

oder, wenn $\Omega = \frac{k^2 \sigma \varphi(t)}{r}$ gesetzt wird,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2 x}{r^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2 y}{r^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Wir können dann das Problem als ein gewöhnliches Störungsproblem auffassen und in bekannter Weise die Störungen der Bahnelemente in einer ersten Annäherung dadurch herleiten, daß wir in die Störungsfunktion die ungestörten Elemente einsetzen.

Um die gestörten Elemente zu erhalten, haben wir folgende Gleichungen zu integrieren:

Differenzen zwischen den auf die Masse $[1 + \sigma \varphi(t)]$ bezogenen oskulierenden und den auf die Masse Eins bezogenen ungestörten Elementen. D. i. wir müssen die durch die Integration von (12) erhaltenen Elemente um den Unterschied der oskulierenden Elemente, bezogen auf die Masse $[1 + \sigma \varphi(t)]$ und auf die Masse Eins resp., korrigieren.

Diese zwei Elementensysteme sind in folgender Weise voneinander abhängig:

$$\left. \begin{aligned} k^2 [1 + \sigma \varphi(t)] p &= k^2 p_1 \\ e \cos(l - \pi) &= \frac{p}{r} - 1, \quad e_1 \cos(l_1 - \pi_1) = \frac{p_1}{r} - 1; \\ e \sin(l - \pi) &= \frac{\sqrt{p}}{k \sqrt{1 + \sigma \varphi(t)}} \cdot \frac{dr}{dt}, \quad e_1 \sin(l_1 - \pi_1) = \frac{\sqrt{p_1}}{k} \cdot \frac{dr}{dt}, \\ l &= v + \pi = l_1 = v_1 + \pi_1, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

wenn wir das zweite Elementensystem mit dem Index 1 bezeichnen und die augenblickliche Länge des gestörten Körpers, die ja in beiden Systemen denselben Wert hat, durch $l = l_1$ dargestellt wird.

Wenn wir dem vorliegenden Probleme gemäß die höheren Potenzen von $\sigma \varphi(t)$ vernachlässigen und die Gleichungen $\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}$, $\varepsilon + \mu t - \pi = E - e \sin E$ beachten, so ergibt sich für die Differenzen $a - a_1$ etc. aus (13) leicht

$$\left. \begin{aligned} a - a_1 &= a \sigma \varphi(t) \left(1 - 2 \frac{a}{r}\right) \\ e - e_1 &= \frac{1 - e^2}{e} \sigma \varphi(t) \left(1 - \frac{a}{r}\right) \\ \pi - \pi_1 &= -\frac{\sin v}{e} \sigma \varphi(t) \\ (\varepsilon - \varepsilon_1) + (\mu - \mu_1) t &= \sigma \varphi(t) \left(-\frac{\sin v}{e} (1 - \sqrt{1 - e^2}) + e \sin E\right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

wo wir in den mit $\sigma \varphi(t)$ multiplizierten Gliedern keine Rücksicht mehr auf Indices zu nehmen brauchen.

Die Gleichungen (14) geben uns ganz allgemein in einem bestimmten Zeitmomente die Differenzen zwischen zwei Elementensystemen eines Körpers, bezogen auf zwei durch eine kleine Größe erster Ordnung verschiedene in einem und demselben Punkte befindlichen Massen.

Wenn wir uns jetzt unserer Hauptaufgabe zuwenden, haben wir die in (12) vorkommenden partiellen Derivierten von Ω in eine nach der Zeit integrierbare Form zu bringen.

Mit Hülfe von (9) erhalten wir:

$$\Omega = \frac{k^2 \sigma t}{r} = \frac{k^2}{a} \sigma \left(t + 2t \sum_1^{\infty} \mathcal{F}_i(i\varepsilon) \cos i(\varepsilon + \mu t - \pi) \right), \quad (15)$$

daß
$$\frac{\partial \Omega}{\partial \pi} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon},$$

wodurch die zweite Gleichung (12) folgende einfache Form erhält:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1 - e^2}{\mu a^2 e} \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}. \quad (17)$$

Für die Berechnung von $\int \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} dt$ gehen wir in der folgenden Weise vor.

Da $\Omega = \frac{k^2 \sigma t}{r}$, haben wir:

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} dt = k^2 \sigma \int t \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{1}{r} dt.$$

Aus (9) ergibt sich aber

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{1}{r} = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dt} \frac{1}{r}$$

und also ist $\int \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} dt = \frac{k^2 \sigma}{\mu} \int t \frac{d}{dt} \frac{1}{r} dt$, woraus durch partielle Integration:

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} dt = \frac{k^2 \sigma}{\mu} \left(\frac{t}{r} - \int \frac{dt}{r} \right). \quad (18)$$

$$\Omega = \frac{k^2}{a} \sigma \left(\varphi(t) + 2 \varphi(t) \sum_1^{\infty} \mathcal{F}_i(i\varepsilon) \cos i(\varepsilon + \mu t - \pi) \right) \quad (15)$$

und man sieht sofort, daß die in (12) angezeigten Operationen bei vielen verschiedenen Annahmen über die Funktion $\varphi(t)$ in Form von Reihenentwickelungen die gesuchten Elementenvariationen ohne Schwierigkeit geben werden.

Wir wollen uns jetzt auf den Fall $\varphi(t) = t$ beschränken, und wir werden sehen, daß in diesem Falle — wie außerdem in vielen anderen — die Integration der Gleichungen (12) in einfacher geschlossener Form erhalten werden kann.

Zunächst sehen wir aus der Gleichung

Das Integral $\int \frac{dt}{r}$ läßt sich in sehr einfacher Weise berechnen.

Wir erhalten mit Hülfe der Gleichungen

$$r = a(1 - e \cos E) \quad \text{und} \quad \varepsilon + \mu t - \pi = E - e \sin E$$

$$\int \frac{dt}{r} = \frac{1}{\mu a} \int dE = \frac{E}{\mu a} = \frac{1}{a} \left(t + \frac{e}{\mu} \sin E \right) \quad (19)$$

und also aus (18):

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} dt = \frac{k^2 \sigma}{\mu} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) t - \frac{k^2 \sigma}{\mu^2 a} e \sin E. \quad (20)$$

Den Wert $\int \frac{\partial \Omega}{\partial e} dt$ können wir in folgender Weise berechnen.

Wir haben

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial e} dt = k^2 \sigma \int t \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{r} dt = -k^2 \sigma \int \frac{t}{r^2} \frac{\partial r}{\partial e} dt.$$

Wenn wir aber successive beachten, daß

$$r = a(1 - e \cos E), \quad \varepsilon + \mu t - \pi = E - e \sin E,$$

$$dt = \frac{r^2}{k \sqrt{p}} dv \quad \text{und} \quad \cos E - e = \frac{r}{a} \cos v$$

erhalten wir

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial e} dt = \frac{\mu a^2}{\sqrt{1-e^2}} \sigma \int t \cos v dv = \frac{\mu a^2}{\sqrt{1-e^2}} \sigma \int t \frac{d \sin v}{dt} dt$$

und durch partielle Integration unter Beachtung, daß $\sin v = \frac{a}{r} \sqrt{1-e^2} \sin E$

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial e} dt = \frac{\mu a^2}{\sqrt{1-e^2}} \sigma \left(t \sin v - \int \sin v dt \right) = \frac{\mu a^2}{\sqrt{1-e^2}} \sigma \left(t \sin v + \frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu} \cos E \right) \quad (21)$$

Für das letzte bei der Integration von (12) nötige Integral $\int \frac{\partial \Omega}{\partial a} dt$ erhalten wir leicht, da $\frac{\partial \Omega}{\partial a} = -\frac{\Omega}{a}$

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial a} dt = -\frac{k^2 \sigma}{a} \int \frac{t}{r} dt = -\frac{k^2 \sigma}{a} t \int \frac{dt}{r} + \frac{k^2 \sigma}{a} \int \int \frac{dt^2}{r} \quad (22)$$

Aus (19) kennen wir den Wert des Integrals $\int \frac{dt}{r}$, und für das Doppelintegral erhalten wir nach ähnlichem Verfahren:

$$\int \int \frac{dt^2}{r} = \frac{t^2}{2a} - \frac{e}{\mu^2 a} \cos E + \frac{e^2}{4\mu^2 a} \cos 2E. \quad (23)$$

Wenn wir die erhaltenen Resultate (17), (20), (21), (22), (23) zusammenfassen und in (12) einsetzen, erhalten wir, mit Rücksicht darauf, daß Konstanten hinzugefügt werden müssen, die für $t=0$ die Elementenvariationen zum Verschwinden bringen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta a &= 2a\sigma \left[a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) t - \frac{e}{\mu} (\sin E - \sin E_0) \right] \\ \Delta e &= \frac{(1-e^2)\sigma}{e} \left[a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) t - \frac{e}{\mu} (\sin E - \sin E_0) \right] \\ \Delta \pi &= \frac{\sigma}{e} \left(t \sin v + \frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu} (\cos E - \cos E_0) \right) \\ \Delta \varepsilon &= (1 - \sqrt{1-e^2}) \Delta \pi + \mu \sigma t^2 + 2e\sigma t \sin E + \frac{2e\sigma}{\mu} (\cos E - \cos E_0) - \frac{e^2\sigma}{2\mu} (\cos 2E - \cos 2E_0) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Wenn wir jetzt die in (14) gegebenen Korrekturen für $\varphi(t) = t$ hinzufügen, erhalten wir schließlich für die aus einer der Zeit proportionalen Massenänderung folgenden Elementenvariationen erster Ordnung δa , δe , $\delta \pi$:

$$\left. \begin{aligned} \delta a &= -a\sigma \left(t + 2\frac{e}{\mu} (\sin E - \sin E_0) \right) \\ \delta e &= -\frac{1-e^2}{\mu} \sigma (\sin E - \sin E_0) \\ \delta \pi &= +\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\mu} \sigma (\cos E - \cos E_0) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen geben, wie leicht zu zeigen ist, ein mit (4) und (8) identisches Resultat.

Wenn wir die Variation der mittleren Länge, $L = \varepsilon + \mu t$, berechnen wollen, haben wir unter Anwendung der in (24) gegebenen Werte von Δa und $\Delta \varepsilon$

$$\Delta \mu = -\frac{3}{2} \frac{\mu}{a} \Delta a = -3\mu\sigma \left[a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) t - \frac{e}{\mu} (\sin E - \sin E_0) \right]$$

und, mit Rücksicht auf die hinzuzufügende Konstante

$$\Delta \varepsilon + \int \Delta \mu dt = \Delta \varepsilon - 3\mu\sigma \left(\frac{e}{\mu} t (\sin E + \sin E_0) + \frac{2e}{\mu^2} (\cos E - \cos E_0) - \frac{e^2}{2\mu^2} (\cos 2E - \cos 2E_0) \right). \quad (26)$$

Setzen wir den Wert von $\Delta \varepsilon$ aus (24) in (26) ein, so erhalten wir:

$$\Delta \left(\varepsilon + \int \mu dt \right) = \mu \sigma t^2 - 3e\sigma t \sin E_0 - e\sigma t \sin E + \frac{\sigma}{e} (1 - \sqrt{1-e^2}) t \sin v + \text{rein period. Glieder,}$$

und mit Hinzufügung von dem in (14) gegebenen Werte von $(\varepsilon - \varepsilon_1) + (\mu - \mu_1) t$ wird

$$\delta L = \mu \sigma t^2 - 3e\sigma t \sin E_0 + \text{rein period. Glieder.} \quad (25)'$$