I gruppi continui proiettivi semplicemente infiniti nello spazio ordinario.

(Del prof. GIULIO PITTARELLI, a Roma.)

Nelle opere del prof. LIE:

Vorlesungen über Differentialgleichungen, etc.,

Vorlesungen über continuirliche Gruppen, edite tutt'e due dal dottore SCHEFFERS,

Theorie der Transformationsgruppen, edita in collaborazione del professore F. ENGEL,

si trovano numerosi esempi ed applicazioni di gruppi proiettivi nel piano e nello spazio. Ma nella III.^e Abtheilung del III.^o Abschnitt di quest'ultima opera è detto espressamente, a pag. 179, non esser nelle vedute dell'Autore di trattare i gruppi proiettivi nello spazio a tre dimensioni in maniera così compiuta come nel piano. E poco dopo, a pag. 182, soggiunge l'Autore: « Se noi avessimo già ridotte ai diversi tipi le trasformazioni infinitesimali dello spazio, « come già facemmo nel piano a pag. 85, sarebbe assai facile in generale di « trovare tutte le curve gobbe, le quali ammettano almeno una trasformazione « infinitesimale proiettiva, ecc. »

Lo scopo della presente Memoria è appunto di risolvere il problema precedente, sperando così di recare una qualche contribuzione, benchè piccola, ad una teoria che, creata dal LIE co' suoi lavori, fornisce anche materia a corsi universitari come quello del KLEIN (semestre d'estate del 1893), e del nostro CREMONA (anno scolastico corrente).

A luogo opportuno ed a piè di pagina saranno citati altri lavori che abbiano attinenza col soggetto.

§ 1. Formole generali in coordinate omogenee.

Una trasformazione infinitesimale proiettiva dello spazio a tre dimensioni in coordinate omogenee è definita dal sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_k a_{ik} x_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \quad (1)$$

ovvero dal simbolo:

$$Xf = \sum_i \sum_k a_{ik} x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (2)$$

dove f è una funzione qualunque delle coordinate.

Le equazioni finite del gruppo generato da quella trasformazione infinitesimale, cioè le espressioni delle x in funzione di t , sono gl'integrali del sistema (1) con le condizioni iniziali che per $t=0$ sia $x_i = x_i^0$, essendo x_i^0 le coordinate del punto iniziale x^0 .

Le (1) danno le variazioni delle coordinate sotto la forma:

$$\partial x_i = \partial t \sum_k a_{ik} x_k, \quad (3)$$

mentre, per la funzione f ,

$$\partial f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial x_i = \partial t \sum_i \sum_k a_{ik} x_k = \partial t Xf. \quad (3^{bis})$$

Sia ora:

$$\sum x \xi = \xi_x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

l'equazione di un piano ξ .

La trasformazione Xf applicata ai punti di questo piano li condurrà nei punti del piano $\xi + \partial \xi$; abbiamo cioè:

$$(\xi + \partial \xi)_{x+\partial x} = \xi_x + \xi_{\partial x} + x_{\partial \xi} + \partial \xi_{\partial x} = 0.$$

Trascurando l'ultimo termine del 2.° ordine, se vogliamo che tutta l'espressione precedente si riduca a $\xi_x = 0$, dobbiamo porre identicamente, qualunque sia x ,

$$\xi_{\partial x} + x_{\partial \xi} \equiv 0. \quad (4)$$

Ponendo per ∂x_i i valori (3) possiamo scrivere:

$$\sum_i \xi_i \sum_k a_{ik} x_k \partial t + \sum_i x_i \partial \xi_i \equiv 0,$$

e sommando prima rispetto a k , poi rispetto ad i , abbiamo:

$$\sum_i x_i (\partial \xi_i + \partial t \sum_k a_{ki} \xi_k) \equiv 0.$$

Onde si traggono le variazioni delle coordinate ξ_i

$$\partial \xi_i = - \partial t \sum_k a_{ki} \xi_k, \quad (5)$$

le equazioni differenziali

$$\frac{d \xi_i}{dt} = - \sum_k a_{ki} \xi_k, \quad (6)$$

ed il simbolo

$$\Xi \varphi = - \sum_i \sum_k a_{ki} \xi_k \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}. \quad (7)$$

I sistemi (1) e (6) di equazioni differenziali si dicono, nei trattati, sistemi aggiunti, e si ha la relazione:

$$0 = \sum x_i \frac{d \xi_i}{dt} + \sum \xi_i \frac{d x_i}{dt} = \sum \frac{d}{dt} (\xi_i x_i), \quad \text{ossia} \quad \xi_x = 0,$$

perchè x e ξ si appartengono. I loro integrali danno, in funzion di t , le coordinate dei punti della traiettoria di un punto iniziale x^0 , ovvero le coordinate dei piani tangenti che, a partire da uno iniziale ξ^0 , toccano una sviluppabile, osculatrice della traiettoria, se ξ_0 e x_0 si appartengono, come supponiamo.

Denotiamo con z_{ij} le coordinate di un raggio xy e con ζ_{ij} quelle di un asse $\xi\eta$. Se per y prendiamo il punto $x + \partial x$ e per η il piano $\xi + \partial \xi$, abbiamo, a meno del fattore ∂t ,

$$z_{ij} = x_i \sum_k a_{jk} x_k - x_j \sum_k a_{ik} x_k \quad (8)$$

$$\zeta_{ij} = \xi_j \sum_k a_{ki} \xi_k - \xi_i \sum_k a_{kj} \xi_k. \quad (9)$$

Le rette (8) e (9) furon dette da CHASLES *caratteristiche*, rispettivamente, del punto x e del piano ξ nel movimento infinitamente piccolo d'un corpo solido libero nello spazio.

Si potrebbero anche assegnare le formole per la trasformazione infinitesimale dei raggi e degli assi partendo dalle trasformazioni dei punti e dei piani. Così al raggio $p + \partial p$ ed all'asse $\pi + \partial \pi$ spetteranno le coordinate che si traggono dalle due matrici

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_1 + \partial x_1 & \dots & x_4 + \partial x_4 \\ y_1 + \partial y_1 & \dots & y_4 + \partial y_4 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cccc} \xi_1 + \partial \xi_1 & \dots & \xi_4 + \partial \xi_4 \\ \eta_1 + \partial \eta_1 & \dots & \eta_4 + \partial \eta_4 \end{array} \right\|.$$

[Per non ingenerar confusione chiamerò z o ζ le caratteristiche e p o π le rette qualunque xy o $\xi\eta$.]

Cosicchè, per esempio, trascurando gl'infinitesimi del 2.^o ordine:

$$p_{ij} + \partial p_{ij} = \begin{vmatrix} x_i + \partial x_i & x_j + \partial x_j \\ y_i + \partial y_i & y_j + \partial y_j \end{vmatrix} = p_{ij} + x_i \partial y_j - y_i \partial x_j - x_j \partial y_i + y_j \partial x_i,$$

onde poi

$$\partial p_{ij} = x_i \partial y_j - y_i \partial x_j - x_j \partial y_i + y_j \partial x_i, \quad (10)$$

e sostituendo alle variazioni delle coordinate le loro espressioni e passando alle equazioni differenziali, abbiamo un sistema di equazioni differenziali il cui tipo è:

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = a_{j1} p_{i1} - a_{i1} p_{j1} + a_{j2} p_{i2} - a_{i2} p_{j2} + a_{j3} p_{i3} - a_{i3} p_{j3} + a_{j4} p_{i4} - a_{i4} p_{j4}. \quad (10^{bis})$$

Nei secondi membri di queste equazioni figureranno soltanto cinque delle 6 coordinate, mancherà cioè la coordinata p_{hk} se hk è una combinazione d'indici differenti da ij .

Si ottengono formole più semplici ed immediate partendo dalle coordinate z_i ($i = 1, \dots, 6$) di KLEIN legate dalla relazione fondamentale

$$\sum_i z_i^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 + z_6^2. \quad (11)$$

Da questa segue per differenziazione:

$$\sum_i z_i dz_i = z_1 dz_1 + \dots + z_6 dz_6 = 0. \quad (12)$$

Siano ora le formole di trasformazione infinitesimale proiettiva tra le z

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_k \alpha_{ik} z_k \quad (i, k = 1, \dots, 6). \quad (13)$$

Dovendo esser verificata la (12) qualunque sia z , avremo l'equazione identica:

$$\sum_i z_i \sum_k \alpha_{ik} z_k = \sum_{ik} \alpha_{ik} z_i z_k = 0.$$

Or questa equazione si deve ridurre alla (11), la sola identica esistente tra le coordinate di una retta qualunque dello spazio; dunque avremo:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \dots = \alpha_{66} = \alpha, \quad (14)$$

per esempio, indi

$$\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0. \quad (15)$$

Da ciò si deduce che il determinante dei coefficienti è gobbo, ed il numero

di essi da 36 si riduce a 16, tanti quanti sono i coefficienti della trasformazione (1).

Se una funzione Ω delle coordinate di punti, di rette o di piani rimane invariata per la trasformazione, essa dovrà riprodursi moltiplicata per un fattore indipendente dalle coordinate. Sia, per esempio, Ω funzione di x : si può porre, a meno d'infinitesimi del 2.° ordine,

$$\Omega(x + \partial x) = \Omega(x) + \sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} \partial x_i.$$

Dovendo il secondo membro ridursi alla funzione Ω , avremo, tenendo presente la (3^{bis}), e dinotando con ρ un fattore:

$$\sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} \partial x_i = \partial t X \Omega = \rho \Omega, \quad (16)$$

cosicchè allora viene appunto

$$\Omega(x + \partial x) = (1 + \rho) \Omega(x).$$

Ricordiamo poi che se un ente ammette la trasformazione infinitesimale Xf ammetterà tutte quelle del gruppo generato da Xf (*).

Se la funzione Ω è il primo membro dell'equazione di un piano ξ invariante dovremo avere qualunque sia x

$$\rho \xi_x = \{ \xi_1 \sum_k a_{ik} x_k + \dots \} \partial t.$$

Di qui ponendo $-\rho = \sigma \partial t$, avremo per le coordinate di un piano invariante ξ

$$-\sigma \xi_i = \sum_k a_{ki} \xi_k \quad (**). \quad (17)$$

E così per le coordinate di un punto invariante x

$$s x_i = \sum_k a_{ik} x_k. \quad (18)$$

Le (17) e (18) forniscono una stessa equazione in $\sigma = (-s)$ di 4.° grado

$$\Delta(\sigma) = \begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \sigma & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \sigma & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

(*) Vedasi: LIE, *Vorlesungen über Differentialgleichungen*, etc., pag. 72, Satz 9.

(**) Il segno $-$ è posto perchè così esso si presenta nella (6), ed è molto giovevole mantenerlo; come si vedrà sempre meglio in seguito.

Consideriamo l'omografia tra due spazi S ed S' sovrapposti definita dall'equazione [connesso (1, 1)]

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i \xi'_k = 0, \quad (19)$$

ovvero separatamente in coordinate di punti e di piani

$$s x'_i = \sum_k a_{ik} x_k \quad (20)$$

$$-\sigma \xi'_i = \sum_k a_{ki} \xi'_k. \quad (21)$$

È notissimo allora che l'equazione $\Delta(\sigma) = 0$ serve a determinare i punti ed i piani uniti dell'omografia (19).

Ad ogni tipo d'omografia (20) corrisponderà un tipo d'equazioni differenziali (1) formate sostituendo ad $s x'_i$ le quantità $\frac{dx_i}{dt}$, ed in pari tempo ad ogni conseguente tipo duale d'omografia (21) corrisponderà un tipo d'equazioni differenziali (6) formate sostituendo a $\sigma \xi'_i$ le quantità $\frac{d\xi'_i}{dt}$, e poi scrivendo ξ in luogo di ξ' . Così facendo gl'integrali dei sistemi aggiunti (1) e (6) saranno sempre, senz'altro, determinati con la condizione $\xi_x = 0$.

Il determinante $\Delta(\sigma)$ fu chiamato determinante caratteristico da CAUCHY, ed è pur noto l'uso che si fa di esso per l'integrazione dei sistemi (1) e (6).

Si vede dunque che i due problemi di classificare le omografie tra due spazi sovrapposti e d'integrare un sistema di equazioni differenziali lineari di 1.º ordine ed omogenee rientrano l'uno nell'altro.

Chiamerò l'omografia (19) *aggiunta* ai sistemi differenziali (1) e (6) e propriamente l'omografia (20) aggiunta al sistema (1) e l'omografia (21) aggiunta al sistema (6).

La classificazione delle omografie in uno spazio a un numero qualunque di dimensioni come teoria di forme bilineari si trova sostanzialmente nel lavoro fondamentale del WEIERSTRASS: *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, Kön. Akad. zu Berlin, 1868. Ma la traduzione geometrica dei risultati analitici del prof. WEIERSTRASS si deve al mio amico SEGRE, il quale dedicò due Memorie al soggetto: l'una *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, nel vol. 19, serie 3.ª delle Memorie dei Lincei, 1884; l'altra *Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale ecc.* nel tom. 37, serie 2.ª delle Memorie dell'Accademia di Torino, 1885. In quello stesso anno 1884 anche il prof. LORIA

nel vol. 22 del Giornale di BATTAGLINI si occupò della teoria in quistione nella Nota: *Sulle corrispondenze proiettive tra due piani e tra due spazi*, dando una completa classificazione delle omografie.

Si comprende come partendo dalle formole di WEIERSTRASS e mettendo a profitto i risultati geometrici, specialmente di SEGRE, io avrei potuto giungere a dar le forme canoniche dei secondi membri di (20) e (21) ovvero dei sistemi (1) e (6) per eseguirne poi l'integrazione. Ed io avevo cominciato a fare i calcoli opportuni, allorchè il mio collega ed amico CASTELNUOVO m'additò la Memoria del prof. PREDELLA: *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni*, serie 2.^a, vol. 17, 1889, di questi Annali, nella quale la quistione è risolta. Apprendesi anzi da quella Memoria che anche il JORDAN nel tomo 73 dei Comptes Rendus a pag. 787 in una Nota: *Sur la résolution des équations différentielles linéaires*, mostrò la possibilità di giungere ad equazioni del tipo

$$\frac{dy_1}{dt} = \sigma y_1, \quad \frac{dz_1}{dt} = \sigma z_1 + y_1, \dots \quad \frac{dw_1}{dt} = \sigma w_1 + v_1,$$

dove σ è radice multipla del determinante caratteristico annullante minori di dato ordine. Il risultato di JORDAN è analiticamente importante; ma sono i lavori geometrici su riferiti quelli che permettono, come si vedrà, di delineare in un modo molto netto la posizione della curva integrale del sistema d'equazioni differenziali, non soltanto rispetto agli enti fondamentali dell'omografia, ma anche rispetto ad altri enti che si mutano in sè stessi per le trasformazioni del gruppo.

Perchè il lettore possa fare gli opportuni riscontri avverto ch'io adoprerò così il simbolo del SEGRE, ch'è in sostanza quello immaginato dal WEILER (*), per indicare la distribuzione dei divisori elementari del determinante caratteristico, come il corrispondente del PREDELLA. Per comprendere il simbolo adoperato dal SEGRE occorrerebbe un discorso un po' lungo; laddove il simbolo del PREDELLA è di più facile intelligenza. Il PREDELLA usa i numeri 0, 1, 2 per dinotare un punto unito (dimensione 0), una retta unita (dimensione 1), un piano unito (dimensione 2). Se due enti si appartengono o coincidono i loro simboli saranno chiusi tra (). Per esempio il simbolo $[(0\ 0)\ 0\ 0]$ indica l'esistenza di 4 punti uniti di cui 2 coincidenti; gli corrisponde il simbolo $[2\ 1\ 1]$ di SEGRE che mostra due radici semplici ed una doppia del determi-

(*) *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades*. Math. Ann., Bd. 7.

nante caratteristico che non ne annulla i subdeterminanti. Ancora nel simbolo [1 0 0] di PREDELLA è messa in chiaro l'esistenza di un raggio unito e due punti uniti fuori di esso; a quel simbolo corrisponde l'altro di SEGRE [(1 1) 1 1] che dinota l'esistenza di due punti uniti forniti da due radici semplici del determinante $\Delta(\sigma)$ alle quali si riferisce il gruppo 1 1, e l'esistenza di una radice doppia che per l'annullarsi dei subdeterminanti del 3.° ordine fornisce non più un punto unito doppio, ma infiniti situati sopra un raggio, al quale si riferisce il gruppo (1 1) ecc. Adoprerò pure i simboli di WEILER, nella classificazione fatta per le coordinate di rette modificati da SEGRE in ciò che questi usa le parentesi { } invece delle [] ecc.

Notisi infine che le omografie definite dalle equazioni integrali avranno la stessa distribuzione degli elementi uniti dell'omografia aggiunta alle equazioni differenziali, ma le radici e gl'invarianti assoluti saranno funzioni esponenziali delle grandezze $\sigma_i t$, come mostrerà l'integrazione.

§ 2. I 13 tipi di gruppi.

A) LE TRAJETTORIE SONO CURVE SGHEMME (E DUALMENTE).

N. 1: [1 1 1 1] $\equiv$ [0 0 0 0]:

Omografie aggiunte (*):

$$\begin{aligned} x'_1 &= \sigma_1 x_1, & x'_2 &= \sigma_2 x_2, & x'_3 &= \sigma_3 x_3, & x'_4 &= \sigma_4 x_4 \\ -\xi'_1 &= \sigma_1 \xi'_1, & -\xi'_2 &= \sigma_2 \xi'_2, & -\xi'_3 &= \sigma_3 \xi'_3, & -\xi'_4 &= \sigma_4 \xi'_4. \end{aligned}$$

Le quattro radici sono distinte; si hanno quattro punti uniti e quattro piani uniti che formano un tetraedro, tre coppie di rette unite che ne sono gli spigoli.

Le equazioni differenziali si formano e s'integrano subito. Chiamando x' e ξ^0 il punto ed il piano iniziale si hanno le:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 e^{\sigma_1 t}, & x_2 &= x_2^0 e^{\sigma_2 t}, & x_3 &= x_3^0 e^{\sigma_3 t}, & x_4 &= x_4^0 e^{\sigma_4 t} \\ \xi_1 &= \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 &= \xi_2^0 e^{-\sigma_2 t}, & \xi_3 &= \xi_3^0 e^{-\sigma_3 t}, & \xi_4 &= \xi_4^0 e^{-\sigma_4 t} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(*) Sopprimo il fattore di proporzionalità nelle x , ma lo faccio eguale a -1 nelle ξ per poter passare subito alla equazione differenziale (6) del § 2.

come integrali dei sistemi

$$\frac{dx_i}{dt} = \sigma_i x_i, \quad \frac{d\zeta_i}{dt} = -\sigma_i \zeta_i. \quad (2)$$

Bisogna poi distinguere due casi.

1.^o caso corrispondente al simbolo $\{11 \ 11 \ 11\}$, (caso generale).

Le coordinate della caratteristica di x e di quella di ξ sono per le (2):

$$z_{ij} = (\sigma_j - \sigma_i) x_i x_j, \quad \zeta_{ij} = (\sigma_i - \sigma_j) \xi_i \xi_j. \quad (3)$$

Eliminando il prodotto $x_1 x_2 x_3 x_4$ o l'altro $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ abbiamo le equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \frac{z_{12} z_{34}}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_4)} &= \frac{z_{23} z_{14}}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_4)} = \frac{z_{31} z_{24}}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_4)} \\ \frac{\zeta_{12} \zeta_{34}}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_4)} &= \frac{\zeta_{23} \zeta_{14}}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_4)} = \frac{\zeta_{31} \zeta_{24}}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_4)}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

che rappresentano, come è notissimo, il complesso tetraedrale di REYE. Il piano ξ^0 , essendo osculatore alla traiettoria nel punto x^0 , avrà le coordinate espresse da:

$$\begin{aligned} \xi_1^0 &= (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_4)(\sigma_1 - \sigma_4) x_2^0 x_3^0 x_4^0 = \rho_1 \frac{x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^0}{x_1^0} \\ \xi_2^0 &= -(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_4)(\sigma_2 - \sigma_4) x_1^0 x_3^0 x_4^0 = \rho_2 \frac{x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^0}{x_2^0} \\ \xi_3^0 &= (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_4)(\sigma_2 - \sigma_4) x_1^0 x_2^0 x_4^0 = \rho_3 \frac{x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^0}{x_3^0} \\ \xi_4^0 &= -(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) x_1^0 x_2^0 x_3^0 = \rho_4 \frac{x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^0}{x_4^0}, \end{aligned}$$

dove ρ_i sono i prodotti delle differenze di $\sigma_h, \sigma_j, \sigma_k$. Avremo dunque a meno del fattore $x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^0$, le

$$\xi_i^0 x_i^0 = \rho_i. \quad (5)$$

Ed allora le (1) danno successivamente, in forza della (5),

$$x_i = \frac{\xi_i}{\xi_i^0} e^{\sigma_i t} = \frac{\rho_i}{\xi_i}, \quad (6)$$

che definiscono la ben nota reciprocità per la quale ad un piano α di equazione $\alpha_x = 0$ corrisponde la superficie di 3.^a classe:

$$\sum \frac{\rho_i \alpha_i}{\xi_i} = 0,$$

con quattro piani doppi, tangenti secondo una conica la superficie, nelle facce del tetraedro fondamentale; e ad un punto a di equazione $a_\xi = 0$ la superficie di 3.º ordine:

$$\sum \frac{\rho_i a_i}{x_i} = 0,$$

con quattro punti doppi conici nei vertici dello stesso tetraedro.

Il complesso tetraedrale (4) dipende dalle sole σ ; esso è invariante rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo. Come prova di ciò si osservi che la trasformazione infinitesimale di una retta p è data dalle formole:

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = (\sigma_i + \sigma_j)p_{ij}. \quad (7)$$

Di qui segue, trascurando i termini del 2.º ordine:

$$(p_{ij} + \delta p_{ij})(p_{hk} + \delta p_{hk}) = p_{ij}p_{hk} + (\sigma_i + \sigma_j + \sigma_h + \sigma_k)p_{ij}p_{hk}\delta t;$$

onde se ij , hk sono combinazioni binarie differenti la somma delle σ è eguale a $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4$, ed il secondo membro dell'equazione precedente si riduce al termine $p_{ij}p_{hk}$ moltiplicato pel fattore, che non muta, $1 + (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)\delta t$.

Se invece, per un dato valor finito di t , cioè per una data trasformazione finita del gruppo, consideriamo come corrispondenti i due punti x ed x^0 nei due spazi S ed S^0 sovrapposti (e dualmente) trasformati l'uno dell'altro, rimettendo in vista nelle (1) il fattore di proporzionalità ρ , avremo le equazioni dell'omografia:

$$\rho x_1 = x_1^0 e^{\sigma_1 t}, \quad \rho x_2 = x_2^0 e^{\sigma_2 t}, \quad \rho x_3 = x_3^0 e^{\sigma_3 t}, \quad \rho x_4 = x_4^0 e^{\sigma_4 t}, \quad (8)$$

ed i valori di ρ che danno gli elementi uniti, che sono poi i vertici (e le facce) dello stesso tetraedro, sono:

$$\rho = e^{\sigma_1 t}, \quad e^{\sigma_2 t}, \quad e^{\sigma_3 t}, \quad e^{\sigma_4 t}.$$

Il determinante della sostituzione (8) è poi $e^{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)t}$ sempre diverso da zero. Onde si conclude che l'omografia non è mai degenerare, come osservò anche il TORELLI nella sua Nota: *Sul gruppo monomio individuato da una trasformazione infinitesimale proiettiva* (*). E mentre gl'invarianti dell'omografia aggiunta sono i rapporti $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_4$, quelli della (8) sono invece i rapporti $e^{\sigma_1 t} : e^{\sigma_2 t} : e^{\sigma_3 t} : e^{\sigma_4 t}$.

(*) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, gennaio 1884; vedi un'altra Nota nei Rendiconti dell'Accad. di Napoli, maggio 1894: *Sulle equazioni finite del gruppo monomio*, ecc.

È noto pure come si compongano coi primi rapporti i rapporti anarmonici fondamentali dei quattro punti nei quali la caratteristica del punto x incontra i quattro piani uniti (e dualmente). Perchè si ha per esempio, chiamando α uno dei suddetti rapporti anarmonici

$$\alpha = (1 \ 2 \ 3 \ 4) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3} : \frac{\sigma_1 - \sigma_4}{\sigma_2 - \sigma_4} = - \frac{z_{31} z_{24}}{z_{23} z_{14}},$$

per le (4) ecc. Inoltre poi il quoziente

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3}$$

è il rapporto anarmonico formato dal punto di contatto della tangente coi punti comuni alle tre facce $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ del tetraedro fondamentale, ecc. (*).

L'omografia (8) dà luogo invece ad un altro complesso di rette congiungenti coppie di punti corrispondenti come x ed x^0 . Le coordinate delle congiungenti e l'equazione del complesso si ottengono dalle (3) e (4) mutandovi da per tutto le differenze $\sigma_i - \sigma_j$ nelle $e^{\sigma_i t} - e^{\sigma_j t}$.

Le equazioni (1) individuano famiglie di curve e di sviluppabili osculatrici diversissime, algebriche o trascendenti, che chiameremo curve o sviluppabili W (**); ma è facile vedere come tutte si comportino rispetto agli elementi uniti della trasformazione.

Supponiamo $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_4$, e scriviamo le (1) sotto forma di rapporti come segue:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1^0 : x_2^0 e^{(\sigma_2 - \sigma_1)t} : x_3^0 e^{(\sigma_3 - \sigma_1)t} : x_4^0 e^{(\sigma_4 - \sigma_1)t}$$

ovvero:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1^0 e^{(\sigma_1 - \sigma_4)t} : x_2^0 e^{(\sigma_2 - \sigma_4)t} : x_3^0 e^{(\sigma_3 - \sigma_4)t} : x_4^0.$$

Dalla prima forma di questi rapporti si vede che per $t = -\infty$ la curva passa pel punto $\xi_1 = 0$ di coordinate (1, 0, 0, 0), e dalla seconda si vede che per $t = \infty$ la curva passa pel punto $\xi_4 = 0$ di coordinate (0, 0, 0, 1).

(*) Vedi LINDEMANN, *Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung*, nel vol. 7 dei Math. Annalen, Memoria che contiene numerosi ed importanti risultati, e che avrò occasione di citare insieme alla prima parte del 2.^o volume di CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorles. über die Geometrie*.

(**) W iniziale di « Wurf » (di STAUDT) quaderna d'elementi di dato rapporto anarmonico. Vedansi, per la ragion della denominazione, le Lezioni litografate del prof. KLEIN, Göttingen, 1893, dal titolo: *Einleitung in die Köhere Geometrie I*.

Lo stesso ragionamento applicato alle ξ mostra che la curva è osculata, per $t = -\infty$, dal piano $x_4 = 0$ nel punto $\xi_1 = 0$, e per $t = \infty$ è osculata dal piano $x_1 = 0$ nel punto $\xi_4 = 0$. Esprimendo poi per mezzo delle (1) le coordinate z_{ij} o ξ_{ij} della tangente in funzione di t , date dalle (3), si deduce allo stesso modo che lo spigolo $\xi_1, \xi_2 \equiv x_3, x_4 = 0$ è tangente nel punto $t = -\infty$, e lo spigolo $\xi_3, \xi_4 \equiv x_1, x_2 = 0$ è tangente nel punto $t = \infty$.

Non supponendo relazione alcuna tra le σ_i , pur essendo queste distinte, nessuna quadrica e nessun complesso lineare è trasformato in sè stesso, come lo è invece il complesso tetraedrale più generale

$$a z_{23} z_{14} + b z_{31} z_{24} + c z_{12} z_{34} = 0,$$

la cui equazione in virtù della nota identità $z_{23} z_{14} + z_{31} z_{24} + z_{12} z_{34} = 0$ si può ridurre a forma binomia, per esempio, alla

$$(b - a) z_{31} z_{24} + (c - a) z_{12} z_{34} = 0.$$

2.^o caso corrispondente al simbolo $[(\overline{11}) \ 11 \ 11]$.

Proponiamoci invece di determinare quelle quadriche e quei complessi lineari che, per certe relazioni tra le σ , possano trasformarsi in sè, e di trovare quelle relazioni. Se $F = a_x^2$ è, in notazione simbolica, una quadrica così fatta, applicando il criterio (16) del § 1 dovremo avere l'identità

$$a_x a_{dx} = \rho a_x^2, \quad (9)$$

se per dx_i si pongono i valori (2). Ciò porta a concludere che devono essere nulli i coefficienti a_{ii} e due coppie di coefficienti a_{hk} corrispondenti a due combinazioni hk d'indici differenti (altrimenti le σ dovrebbero essere eguali), e che supposta diverso da zero la coppia $a_{14} a_{23}$ l'identità (9) che in questo caso si riduce alla

$$a_{14}(\sigma_1 + \sigma_4)x_1x_4 + a_{23}(\sigma_2 + \sigma_3)x_2x_3 = \rho(a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3),$$

porge la relazione tra le σ

$$\sigma_1 + \sigma_4 = \sigma_2 + \sigma_3 \quad (*). \quad (10)$$

In forza della relazione (10) le superficie del fascio-schiera

$$F(x) \equiv x_1x_4 + mx_2x_3 = 0 \quad \text{ovvero} \quad \Phi(\xi) \equiv \xi_1\xi_4 + \mu\xi_2\xi_3 = 0, \quad (11)$$

(*) Si potrebbe supporre diversa da zero la sola coppia di coefficienti a_{ii} , a_{hk} per esempio a_{33} , a_{12} . In questo caso la quadrica è un cono $a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$, e dev'essere $\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_3$. Questo caso sarà esaminato al § 3 in coordinate non omogenee.

si mutano in sè stesse per tutte le trasformazioni del gruppo (1). Ma per le relazioni (7) e per la (10) anche il fascio di complessi lineari

$$p_{14} + k p_{23} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \pi_{23} + k \pi_{14} = 0 \quad (*), \quad (12)$$

si muta in sè, ed è il solo che abbia questa proprietà. Questo fascio di complessi ha per direttrici le rette unite $\xi_1, \xi_4 = 0, \xi_2, \xi_3 = 0$ che sono polari reciproche rispetto alle quadriche (11). E se $k = m$ le generatrici dell'iperboloide cui appartengono $\xi_1 \xi_3, \xi_2 \xi_4$ sono anche rette del complesso (12); se invece $k = -m$ apparterranno al complesso le rette del sistema $\xi_1 \xi_2, \xi_3 \xi_4$.

Applicando la trasformazione finita, per esempio alla quadrica (11), abbiamo, per (10),

$$x_1 x_4 + m x_2 x_3 = e^{(\sigma_1 + \sigma_4)t} (x_1^0 x_4^0 + m x_2^0 x_3^0),$$

cioè $F(x) = e^{(\sigma_1 + \sigma_4)t} F(x^0)$. Volendosi invece, dal punto di vista dell'algebra, $F(x) = F(x^0)$, bisognerebbe annullare l'esponente di e , qualunque sia t . Ciò richiede le due condizioni:

$$\sigma_1 + \sigma_4 = 0, \quad \sigma_2 + \sigma_3 = 0. \quad (13)$$

Allora le radici dell'equazione che dà i valori ρ in (8) sono reciproche, come dev'essere per un teorema sulle forme quadratiche che si mutano in sè stesse dovuto al FROBENIUS (vedi SEGRE, *Ricerche*, ecc.). Or noi possiamo sempre soddisfare a quelle due condizioni. Infatti dalla (10) si ha:

$$\sigma_1 + \sigma_4 = \sigma_2 + \sigma_3 = 2\sigma,$$

per esempio, onde:

$$(\sigma_1 - \sigma) + (\sigma_4 - \sigma) = 0, \quad (\sigma_2 - \sigma) + (\sigma_3 - \sigma) = 0. \quad (14)$$

Scrivendo le (1) dopo l'introduzione del fattore di proporzionalità $e^{\sigma t}$, così:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1^0 e^{(\sigma_1 - \sigma)t} : x_2^0 e^{(\sigma_2 - \sigma)t} : x_3^0 e^{(\sigma_3 - \sigma)t} : x_4^0 e^{(\sigma_4 - \sigma)t},$$

si vede ch'è lecito determinare σ con le condizioni (14) concordanti in virtù di (10).

Ponendo $k = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_4 - \sigma_1}$ ovvero $k = \frac{\sigma_4 - \sigma_1}{\sigma_3 - \sigma_2}$ si hanno quei due complessi che furon detti dal LINDERMANN nella Memoria citata (pag. 75-77) « Rotations-complexe » e « Translations-complexe » per quei *movimenti* dello spazio che,

(*) CAPORALI e DEL PEZZO, *Introduzione alla teoria dello spazio rigato*, § 20, pag. 307 nelle *Memorie di Geometria* di CAPORALI.

in una determinazione metrica proiettiva, sono definiti come trasformazione in sè della quadrica fondamentale in modo che ciascun sistema di generatrici sia trasformato in sè stesso.

Le curve (1), situate allora sulle superficie $F(x)$ del fascio (11) contenenti i punti iniziali x^0 furon detti ivi dal LINDEMANN *eliche proiettive* (*). Esse sono le trasformate omografiche delle lossodromie della sfera.

Per provarlo consideriamo una qualunque delle quadriche $F(x)$ per es. quella passante pel punto (1, 1, 1, 1)

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0. \quad (15)$$

Questa quadrica è proiettata stereograficamente dal punto su di essa, $\zeta_4 = 0$, sopra un piano rappresentativo i cui punti y li riferiamo a quel triangolo fondamentale ch'è sezione di esso piano coi piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, mediante le formole note

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 : y_2 : y_3 : \frac{y_2 y_3}{y_1}. \quad (16)$$

Sul piano rappresentativo l'omografia dello spazio individua un'omografia di simbolo $[0 \ 0 \ 0]$, contenuta nella data, la cui espressione analitica è:

$$y_1 : y_2 : y_3 = y_1^0 e^{\sigma_1 t} : y_2^0 e^{\sigma_2 t} : y_3^0 e^{\sigma_3 t}, \quad (17)$$

e la curva rappresentata da queste equazioni è la proiezione stereografica della (1) situata sulla superficie (15). Supponiamo ora che la (15) sia una sfera, e che le (16) definiscano la proiezione stereografica in senso stretto, che sia cioè il piano rappresentativo parallelo al piano tangente in $\zeta_4 = 0$ alla sfera. Su questo piano si ha in tal caso un'omografia della quale l'origine è un punto unito e gli altri due punti uniti sono i punti ciclici. Allora, com'è noto, le (17) definiscono una spirale logaritmica (**), alle cui tangenti compete la proprietà (metrico-proiettiva) d'inclinarsi ad angolo costante sui raggi vettori. Proiettando di nuovo sulla sfera, il fascio dei raggi vettori dà il fascio dei meridiani passanti pel centro di proiezione, e la spirale logaritmica dà una

(*) Vedi anche: *Vorles. über Geom.*, Bd. 2, th. 1.^a, pag. 336 e seg.

(**) CLEBSCH, *Vorles. über die Geom.* a pag. 979, 988 e seg. nel capitolo sui connessi. Vedasi poi l'esteso e fondamentale lavoro dei prof. F. KLEIN e S. LIE pubblicato nel vol. 4 dei *Math. Annalen*, 1871: *Ueber diejenigen ebenen Curven welche... in sich übergehen*, oltre alle due Note del 6 e 13 giugno 1870 nei *Comptes Rendus* dal titolo: *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces*. — KLEIN, *Einleitung in die höhere Geometrie I*, già citato.

curva che, per la notissima proprietà della conservazione degli angoli nella proiezione stereografica, taglia sotto lo stesso angolo i meridiani che incontra: e questa curva è la lossodromia.

3.^o caso corrispondente al simbolo $\{(\overline{11}) (\overline{11}) 11\}$.

Se anche la quadrica

$$x_1 x_2 + n x_3 x_4 = 0,$$

o il complesso

$$p_{12} + h p_{34} = 0,$$

dovessero mutarsi in sè stessi, sarebbe necessariamente

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3 + \sigma_4.$$

Questa relazione insieme all'altra del caso precedente

$$\sigma_1 + \sigma_4 = \sigma_2 + \sigma_3,$$

fornisce

$$\sigma_2 - \sigma_4 = \sigma_4 - \sigma_2,$$

cioè:

$$\sigma_2 = \sigma_4,$$

onde poi

$$\sigma_1 = \sigma_3;$$

il determinante caratteristico $\Delta(\sigma)$ avrebbe due coppie di radici eguali. Ma questo caso sarà esaminato più tardi al n.^o 10. Adunque nel gruppo $[1111]$ non vi sono trasformazioni corrispondenti al simbolo $\{(\overline{11}) (\overline{11}) 11\}$.

Per realizzare un tipo così fatto bisogna considerare un'omografia qualunque, per esempio la

$$x'_1 = \sigma_1 x_1, \quad x'_2 = \sigma_2 x_2, \quad x'_3 = \sigma_3 x_3, \quad x'_4 = \sigma_4 x_4, \quad (18)$$

ed in coordinate di rette

$$p'_{ij} = \sigma_i \sigma_j p_{ij}.$$

La quadrica $x_1 x_4 + m x_2 x_3 = 0$ ed il complesso $p_{14} + k p_{23} = 0$ si mutano in sè stessi se

$$\sigma_1 \sigma_4 = \sigma_2 \sigma_3.$$

E se lo stesso avviene per la quadrica $x_1 x_2 + n x_3 x_4 = 0$ e pel complesso $p_{12} + h p_{34} = 0$ dev'essere

$$\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_4.$$

Da queste due relazioni tra le σ segue moltiplicando membro a membro ovvero in croce

$$\sigma_1^2 = \sigma_3^2, \quad \sigma_2^2 = \sigma_4^2,$$

onde, escluso il caso delle radici eguali,

$$\sigma_1 = -\sigma_3, \quad \sigma_2 = -\sigma_4. \quad (19)$$

Siccome (*) gl'invarianti assoluti o i rapporti delle radici sono i rapporti anarmonici che due punti corrispondenti qualunque formano coi punti nei quali la loro congiungente interseca i piani uniti, così chiamando xx' la coppia di punti corrispondenti ed a_1, a_2, a_3, a_4 i punti tracce della xx' sui piani uniti, abbiamo per le (19):

$$\left. \begin{aligned} (xx' a_1 a_2) &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, & (xx' a_1 a_3) &= -1, & (xx' a_1 a_4) &= -\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \\ (xx' a_2 a_3) &= -\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, & (xx' a_2 a_4) &= -1, & (xx' a_3 a_4) &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

non tutti indipendenti, ma dei quali si scorge il significato.

$$\text{N. 2: } [2 \ 1 \ 1] \equiv [(0 \ 0) \ 0 \ 0], \quad \sigma_1 = \sigma_2.$$

1.^o caso corrispondente al simbolo $\{2 \ 2 \ 1 \ 1\}$, (caso generale).

Omografie aggiunte:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \sigma_2 x_1 + \lambda_1 x_2, & x'_2 &= \sigma_2 x_2, & x'_3 &= \sigma_3 x_3, & x'_4 &= \sigma_4 x_4, \\ -\xi_1 &= \sigma_2 \xi'_1, & -\xi_2 &= \sigma_2 \xi'_2 + \lambda_1 \xi_1, & -\xi_3 &= \sigma_3 \xi'_3, & -\xi_4 &= \sigma_4 \xi'_4 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Gli elementi uniti sono:

il punto doppio $\xi_1 = 0$ ed il piano doppio $x_2 = 0$, doppi, perchè corrispondenti al valore σ_2 della radice doppia;

i punti ed i piani semplici

$$\xi_3 = 0, \quad \xi_4 = 0,$$

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 0;$$

le rette doppie

$$\xi_1 \cdot \xi_3 \equiv x_2 \cdot x_4, \quad \xi_1 \cdot \xi_4 \equiv x_2 \cdot x_3,$$

aventi in comune il punto ξ_1 ed il piano x_2 ;

le rette semplici sghembe

$$\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4, \quad \xi_3 \cdot \xi_4 \equiv x_1 \cdot x_2.$$

(*) SEGRE, *Sulla teoria e sulla classificazione*, ecc., pag. 13.

Nelle formole dell'omografia aggiunta la costante λ_1 non può esser nulla (altrimenti si avrebbe il caso del n.º 6), ma non è costante essenziale, dipende dal punto-unità del sistema di coordinate, come osserva il PREDELLA, e si può anche porre eguale ad 1, come nelle formole di JORDAN. Riferendosi infatti allo stesso tetraedro coordinato e mutando il punto-unità si potrà scrivere $x_i = \alpha_i y_i$ e, conseguentemente, $x'_i = \alpha_i y'_i$, onde si avrà $y'_2 = \sigma_2 y_2$, $y'_3 = \sigma_3 y_3$, $y'_4 = \sigma_4 y_4$, mentre la prima delle (1) darà $y'_1 = \sigma_2 y_1 + \lambda_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2$. Nulla vieta di porre $\lambda_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1$: ciò equivale, in sostanza, a scegliere in un modo o nell'altro il vertice $\xi_2 = 0$ sulla retta unita $\xi_1 \xi_2$ ed il piano x_1 del fascio $\xi_3 \xi_4$, vertice e piano non uniti nell'omografia. Quest'osservazione valga per tutti i casi che, nel seguito, troveremo analoghi all'attuale.

Le equazioni differenziali sono:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \sigma_2 x_1 + \lambda_1 x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= \sigma_2 x_2, & \frac{dx_3}{dt} &= \sigma_3 x_3, & \frac{dx_4}{dt} &= \sigma_4 x_4 \\ \frac{d\xi_1}{dt} &= -\sigma_2 \xi_1, & \frac{d\xi_2}{dt} &= -\sigma_2 \xi_2 - \lambda_1 \xi_1, & \frac{d\xi_3}{dt} &= -\sigma_3 \xi_3, & \frac{d\xi_4}{dt} &= -\sigma_4 \xi_4. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Le ultime tre in x_2, x_3, x_4 s'integrano immediatamente; la prima, ponendovi il valor trovato di x_2 in funzione di t , diviene un'equazione lineare di primo ordine del noto tipo

$$\frac{dy}{dt} = py + q,$$

dove p e q sono funzioni di t , il cui integrale è il notissimo:

$$y = e^{\int p dt} \left\{ \int e^{-\int p dt} q dt + \text{cost.} \right\}.$$

Anche quest'osservazione valga fatta ora per sempre. Eseguendo le integrazioni abbiamo:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t) e^{\sigma_2 t}, & x_2 &= x_2^0 e^{\sigma_2 t}, & x_3 &= x_3^0 e^{\sigma_3 t}, & x_4 &= x_4^0 e^{\sigma_4 t} \\ \xi_1 &= \xi_1^0 e^{-\sigma_2 t}, & \xi_2 &= (\xi_2^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t) e^{-\sigma_2 t}, & \xi_3 &= \xi_3^0 e^{-\sigma_3 t}, & \xi_4 &= \xi_4^0 e^{-\sigma_4 t}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Scrivendo le equazioni della prima linea sotto la forma:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : \frac{x_2^0}{x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t} : \frac{x_3^0 e^{(\sigma_3 - \sigma_2) t}}{x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t} : \frac{x_4^0 e^{(\sigma_4 - \sigma_2) t}}{x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t},$$

posto $\tau_4 > \tau_3 > \tau_2$ ed osservando che:

$$\lim_{t=-\infty} \frac{x_3^0 e^{(\tau_3 - \tau_2)t}}{x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t} = \lim_{t=-\infty} \frac{x_3^0 (\tau_3 - \tau_2) e^{(\tau_3 - \tau_2)t}}{\lambda_1 x_2^0} = 0,$$

si trae che la curva passa pel punto $\xi_1 = 0$ per $t = -\infty$. Così passa pel punto $\xi_4 = 0$ corrispondentemente al valore $t = \infty$, ed inoltre in $\xi_1 = 0$ è osculata dal piano $x_4 = 0$, in $\xi_4 = 0$ dal piano $x_2 = 0$, mentre la tangente nel primo punto è la retta $\xi_1 \xi_3$, quella nel secondo è la $\xi_1 \xi_4$.

Formando le coordinate z_{ij} della caratteristica di x dalla matrice

$$\begin{vmatrix} \tau_2 x_1 + \lambda_1 x_2 & \tau_2 x_2 & \tau_3 x_3 & \tau_4 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix},$$

si trova subito che l'equazione del complesso quadratico è in questo caso:

$$\lambda_1(\tau_3 - \tau_4)z_{23}z_{24} = (\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4)z_{12}z_{34}.$$

Questo complesso corrisponde al simbolo $[(1\ 1)\ (2\ 2)]$ nella classificazione di WEILER, pag. 188, n.º 29 della Memoria citata.

Essendovi ancora tre piani uniti $x_2 x_3 x_4$ si può ricercare il rapporto anarmonico α , sulla tangente, del punto di contatto x e delle tre tracce $a_2 a_3 a_4$ su quei piani; e si trova:

$$\alpha = (x a_2 a_3 a_4) = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_4}.$$

2.º caso corrispondente al simbolo $[(1\ \bar{1})\ 2\ 2]$.

Se ci proponiamo di trovare le quadriche $F(x)$ o $\Phi(\xi)$ che si mutano in sè per le trasformazioni del gruppo, troviamo che i soli fasci-schiera di coni e di coniche

$$x_3 x_4 + \lambda x_2^2 = 0 \quad (4)$$

$$\xi_3 \xi_4 + \lambda \xi_1^2 = 0, \quad (5)$$

rispettivamente col vertice in $\xi_1 = 0$ e sul piano $x_2 = 0$, si mutano in sè stessi, quando però sia verificata la relazione

$$2\sigma_2 = \sigma_3 + \sigma_4. \quad (6)$$

Ed allora anche il fascio di complessi

$$p_{12} + k p_{34} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \pi_{34} + k \pi_{12} = 0, \quad (7)$$

si muta in sè stesso.

Determinando l in modo che il cono (4) passi per x^0 e λ in modo che la conica (5) tocchi ξ^0 , sarà la curva (3) posta sul cono e la sviluppabile osculatrice toccherà la conica.

N. 3: $[3\ 1] \equiv [(0\ 0\ 0)\ 0]$, $\{3\ 3\}$, $\tau_3 = \tau_2 = \tau_1$.

Omografie aggiunte:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \tau_1 x_1 + \lambda_1 x_2, & x'_2 &= \tau_1 x_2 + \lambda_2 x_3, & x'_3 &= \tau_1 x_3, \\ & & x'_4 &= \tau_4 x_4, \\ -\xi'_1 &= \tau_1 \xi'_1, & -\xi'_2 &= \tau_1 \xi'_2 + \lambda_1 \xi'_1, & -\xi'_3 &= \tau_1 \xi'_3 + \lambda_2 \xi'_2, \\ & & -\xi'_4 &= \tau_4 \xi'_4. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Gli elementi uniti sono:

il punto triplo $\xi_1 = 0$ ed il punto semplice $\xi_4 = 0$; il piano triplo $x_3 = 0$ ed il piano semplice $x_4 = 0$, le rette unite triple entrambe $\xi_1 \cdot \xi_4 \equiv x_2 \cdot x_3$, $x_3 \cdot x_4 \equiv \xi_1 \cdot \xi_2$.

Integrando le equazioni differenziali

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \tau_1 x_1 + \lambda_1 x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= \tau_1 x_2 + \lambda_2 x_3, & \frac{dx_3}{dt} &= \tau_1 x_3, \\ & & \frac{dx_4}{dt} &= \tau_4 x_4, \\ \frac{d\xi_1}{dt} &= -\tau_1 \xi_1, & \frac{d\xi_2}{dt} &= -\tau_1 \xi_2 - \lambda_1 \xi_1, & \frac{d\xi_3}{dt} &= -\tau_1 \xi_3 - \lambda_2 \xi_2, \\ & & \frac{d\xi_4}{dt} &= -\tau_4 \xi_4, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

si trova:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \left(x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 x_3^0 t^2 \right) e^{\tau_1 t}, & x_2 &= (x_2^0 + \lambda_2 x_3^0 t) e^{\tau_1 t}, \\ x_3 &= x_3^0 e^{\tau_1 t}, & x_4 &= x_4^0 e^{\tau_4 t}, \\ \xi_1 &= \xi_1^0 e^{-\tau_1 t}, & \xi_2 &= (\xi_2^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t) e^{-\tau_1 t}, \\ \xi_3 &= \left(\xi_3^0 - \lambda_2 \xi_2^0 t + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \xi_1^0 t^2 \right) e^{-\tau_1 t}, & \xi_4 &= \xi_4^0 e^{-\tau_4 t}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

La traiettoria passa (e si vede come prima) pel punto ξ_1 , corrispondente al valore $t = -\infty$, col piano osculatore x_4 e con la tangente $\xi_1 \cdot \xi_2$, e passa pel

punto ξ_4 , corrispondente al valore $t = \infty$, col piano osculatore $x_3 = 0$ e con la tangente $\xi_1 \cdot \xi_4$.

Il complesso delle caratteristiche è:

$$\lambda_1 z_{23} z_{24} + \lambda_2 z_{34} z_{34} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\sigma_1 - \sigma_2} z_{21} z_{34} = 0,$$

corrispondente al tipo [3 3] di WEILER [pag. 200, n.º 47].

Non vi sono complessi lineari uniti (che si trasformano, cioè, in sè stessi). Ma vi sono fasci uniti di coni e di coniche: essi sono, come si trova facilmente col solito metodo,

$$\begin{aligned} F(x) &\equiv \lambda_1 x_2^2 - 2\lambda_2 x_1 x_3 + m x_3^2 = 0 & ; \\ \Phi(\xi) &\equiv \lambda_2 \xi_2^2 - 2\lambda_1 \xi_1 \xi_3 + \mu \xi_1^2 = 0, & \end{aligned} \quad (4)$$

col vertice e col piano rispettivamente nel punto semplice ξ_4 e nel piano opposto $x_4 = 0$: sono le sole quadriche che si trasformano in sè stesse.

Queste coniche sono le curve involuppi delle loro tangenti, e quei coni sono i luoghi di rette, appartenenti alle omografie di simbolo [3] (ovvero [(0 0 0)]) del piano $x_4 = 0$ o del punto (stella) $\xi_4 = 0$ contenute nella omografia data. Le coordinate delle generatrici dei coni o delle tangenti alle coniche sono fornite dalle equazioni (3) tolte le espressioni di x_4 e di ξ_4 , e sopprimendo, se si vuole, il fattore $e^{\sigma_1 t}$ che figura come fattore di proporzionalità: restano così le x_1, x_2, x_3 ; ξ_1, ξ_2, ξ_3 espresse con funzioni di 2.º grado nel parametro t . Inoltre poi m e μ nelle (4) si possono determinare in modo che il cono, o la conica, del fascio passi per x^0 , o tocchi ξ^0 : ed infatti, come verifica, sostituendo in $F(x)$ ed in $\Phi(\xi)$ i valori (3) si ha, a meno del fattore $e^{2\sigma_1 t}$ o del fattore $e^{-2\sigma_1 t}$,

$$F(x) = F(x^0) = 0, \quad \Phi(\xi) = \Phi(\xi^0) = 0,$$

equazioni che determinano appunto m e μ .

I coni e le coniche dei fasci (4) hanno tra loro rispettivamente un contatto del 3.º ordine (quattro generatrici e quattro tangenti consecutive comuni), e propriamente i coni lungo la retta unita $\xi_1 \cdot \xi_4 \equiv x_2 \cdot x_3$ col piano tangente nel piano unito $x_3 = 0$ triplo, le coniche nell'altra retta unita $\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4$ col punto di contatto nel punto unito triplo $\xi_1 = 0$.

Determinando, come sopra, m (e μ) in modo che il cono passi per x^0 (e la conica tocchi ξ^0), la curva (3) giacerà sul cono (e la sviluppabile (3) toc-

cherà la conica), anzi, come si vide poco fa, passerà pel vertice del cono stesso, avrà il piano osculatore $x_3 = 0$, e la tangente nella retta $\xi_1 \cdot \xi_4$, lungo la quale i conici del fascio si sovroscolano.

Se, per fissar le idee, diamo a t il significato di tempo, ricordando che per $t = \infty$ si ha il punto ξ_4 e per $t = -\infty$ si ha il punto ξ_1 , diremo che il punto mobile descrive una curva (trascendente) sopra un cono quadrico, passando prima, da tempo infinito, per un punto ξ_1 (unito), poi, all'origine del tempo, pel punto x^0 , ed infine accostandosi vieppiù al vertice, dove giunge solo dopo trascorso un tempo infinito.

Volendo, possiamo determinare μ , dato il cono $F(x)$ cioè dato m , in modo che la conica $\Phi(\xi)$ sia, in coordinate di rette, la sezione prodotta dal piano $x_4 = 0$ sul cono $F(x) = 0$. Per questo, ritenendo sempre che il covariante identico sia $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$ onde, nel piano $x_4 = 0$, $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$, cercando l'equazione tangenziale di $F(x)$, si trova:

$$\lambda_3 \xi_2^2 = 2 \lambda_1 \xi_1 \xi_3 - \frac{\lambda_1 m}{\lambda_2} \xi_1^2 = 0,$$

e paragonando con $\Phi(\xi)$ si ha:

$$\mu = - \frac{\lambda_1 m}{\lambda_2}.$$

N. 4: $[2 \ 2] \equiv [(0 \ 0) \ (0 \ 0)]$, $\tau_2 = \tau_1$, $\tau_4 = \tau_3$.

Omografie aggiunte:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \tau_1 x_1 + \lambda_1 x_2, & x'_2 &= \tau_1 x_2, & x'_3 &= \tau_3 x_3 + \lambda_2 x_4, \\ & & x'_4 &= \tau_3 x_4, \\ -\xi_1 &= \tau_1 \xi'_1, & -\xi_2 &= \tau_1 \xi'_2 + \lambda_1 \xi'_1, & -\xi_3 &= \tau_3 \xi'_3, \\ & & -\xi_4 &= \tau_3 \xi'_4 + \lambda_2 \xi'_3. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Elementi uniti:

i punti doppi $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$,

i piani doppi $x_3 = 0$, $x_4 = 0$,

le due rette unite sghembe $\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4$, $\xi_3 \cdot \xi_4 \equiv x_1 \cdot x_2$ giacenti sui piani uniti e passanti per i punti uniti,

un'altra retta che si appoggia alle precedenti ed è la retta $\xi_1 \cdot \xi_3 \equiv x_2 \cdot x_4$ che congiunge i punti uniti ed è intersezione dei piani uniti.

Equazioni differenziali:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \tau_1 x_1 + \lambda_1 x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= \tau_1 x_2, & \frac{dx_3}{dt} &= \tau_3 x_3 + \lambda_2 x_4, \\ & & \frac{dx_4}{dt} &= \tau_3 x_4, \\ \frac{d\xi_1}{dt} &= -\tau_1 \xi_1, & \frac{d\xi_2}{dt} &= -\tau_1 \xi_2 - \lambda_1 \xi_1, & \frac{d\xi_3}{dt} &= -\tau_3 \xi_3, \\ & & \frac{d\xi_4}{dt} &= -\tau_3 \xi_4 - \lambda_2 \xi_3; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

equazioni integrali:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t) e^{\tau_1 t}, & x_2 &= x_2^0 e^{\tau_1 t}, & x_3 &= (x_3^0 + \lambda_2 x_4^0 t) e^{\tau_3 t}, \\ & & x_4 &= x_4^0 e^{\tau_3 t}, \\ \xi_1 &= \xi_1^0 e^{-\tau_1 t}, & \xi_2 &= (\xi_2^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t) e^{-\tau_1 t}, & \xi_3 &= \xi_3^0 e^{-\tau_3 t}, \\ & & \xi_4 &= (\xi_4^0 - \lambda_2 \xi_3^0 t) e^{-\tau_3 t}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Supponendo, come sempre, $\tau_3 > \tau_1$, si vede che la curva passa pel punto unito $\xi_1 = 0$ dov'è osculata dal piano unito $x_4 = 0$ ed ammette per tangente la retta unita $\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_2 \cdot x_4$: ciò per $t = -\infty$. Invece per $t = \infty$ si ha il punto $\xi_3 = 0$, il piano osculatore $x_2 = 0$ e la tangente $\xi_3 \cdot \xi_4 \equiv x_1 \cdot x_2$.

Cosicchè l'asserzione del LINDEMANN (Memoria citata, pag. 112) che la curva tocca la retta $x_2 = x_4 = 0$ dev'esser corretta (nel LINDEMANN al posto di x_2 è x_1). Essa poggia sull'affermazione che per $t = -\infty$ il rapporto $x_1 : x_3$ (nel LINDEMANN $x_2 : x_3$) ha un *valor finito*, mentre x_2 ed x_4 svaniscono. Ciò non è vero, come si vede subito. Perchè, intanto, x_2 ed x_4 potrebbero per $t = -\infty$ svanire soltanto allorchè fossero positive le due radici τ_1 e τ_3 ; ma nelle coordinate omogenee bisogna ragionar sui rapporti; e nel caso nostro, se $\tau_3 > \tau_1$, il rapporto $\frac{x_4}{x_2}$ svanisce per $t = -\infty$. Poi il rapporto:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t}{x_3^0 + \lambda_2 x_4^0 t} e^{(\tau_1 - \tau_3)t} = \frac{\frac{x_1^0}{t} + \lambda_1 x_2^0}{\frac{x_3^0}{t} + \lambda_2 x_4^0} e^{(\tau_1 - \tau_3)t},$$

per $t = -\infty$ essendo sempre $\tau_3 > \tau_1$, diviene ∞ .

Il complesso delle caratteristiche è:

$$\lambda_1 \lambda_2 \mathcal{Z}_{24}^2 - (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \mathcal{Z}_{12} \mathcal{Z}_{34} \quad (*).$$

Dalle (3) ricaviamo le equazioni:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^0}{x_2^0} + \lambda_1 t, \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_3^0}{x_4^0} + \lambda_2 t, \quad (4)$$

che rappresentano al variar di t due fasci di piani proiettivi, le cui rette d'intersezione passano pel punto corrispondente al valor di t della traiettoria e generano una quadrica rigata, che contiene la traiettoria suddetta. Gli assi dei fasci sono le rette unite sghembe $x_1 \cdot x_2 = 0$, $x_3 \cdot x_4 = 0$ dell'omografia; l'altra retta unita dell'omografia $x_2 \cdot x_4 = 0$ corrispondente a $t = \pm \infty$ che passa anche pel punto x^0 , è generatrice della quadrica.

Così pure le equazioni:

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\xi_2^0}{\xi_1^0} - \lambda_1 t, \quad \frac{\xi_4}{\xi_3} = \frac{\xi_4^0}{\xi_3^0} - \lambda_2 t, \quad (5)$$

individuano due punteggiate proiettive cogli stessi assi sghembi precedenti; $\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4$, $\xi_3 \cdot \xi_4 \equiv x_1 \cdot x_2$. Le congiungenti i punti corrispondenti generano una quadrica rigata i cui piani tangenti riescono osculatori alla sviluppabile fornita dalle (3), seconda linea orizzontale. La retta unita $\xi_1 \cdot \xi_3 \equiv x_2 \cdot x_4$, corrispondente al valor $t = \pm \infty$, è anche generatrice di questa quadrica.

Le equazioni delle due quadriche sono:

$$\frac{\lambda_2 x_1 x_4 - \lambda_1 x_2 x_3}{x_2 x_4} = \frac{\lambda_2 x_1^0 x_4^0 - \lambda_1 x_2^0 x_3^0}{x_2^0 x_4^0} = m \quad (6)$$

$$\frac{\lambda_2 \xi_2 \xi_3 - \lambda_1 \xi_1 \xi_4}{\xi_1 \xi_3} = \frac{\lambda_2 \xi_2^0 \xi_3^0 - \lambda_1 \xi_1^0 \xi_4^0}{\xi_1^0 \xi_3^0} = \mu. \quad (7)$$

Le (6) e (7) mostrano che i fasci-schiera di quadriche

$$F(x) \equiv \lambda_2 x_1 x_4 - \lambda_1 x_2 x_3 - m x_2 x_4 = 0$$

$$\Phi(\xi) \equiv \lambda_2 \xi_2 \xi_3 - \lambda_1 \xi_1 \xi_4 - \mu \xi_1 \xi_3 = 0,$$

sono quadriche invarianti pel gruppo di trasformazioni, e sono le sole, come si potrebbe trovare col solito metodo. Le F e Φ rappresenteranno una stessa

(*) WEILER, loco cit., pag. 178, n.° 14 simbolo $[(1\ 1)\ (1\ 1\ 2)]$; LINDEMANN, alla pag. 112 citata nel testo.

quadrica, in coordinate di punti o di piani, se $m = -\mu$. L'intersezione completa di due F o due Φ si compone delle rette unite $\xi_1 \cdot \xi_2, \xi_3 \cdot \xi_4$ sghembe, e dell'altra $\xi_1 \cdot \xi_3$ contata due volte.

Ma v'è anche un fascio di complessi lineari che si trasforma in sè stesso ed ha per equazione (*):

$$\lambda_2 p_{14} - \lambda_1 p_{23} + k p_{34} = 0, \quad (8)$$

ovvero in coordinate π_{ij}

$$\lambda_2 \pi_{23} - \lambda_1 \pi_{14} + k \pi_{31} = 0: \quad (8^{bis})$$

le direttrici coincidenti del fascio sono date dalla retta unita $\xi_1 \cdot \xi_3$. Secondoche k si pone eguale ad m o a μ il complesso conterrà le generatrici di F o di Φ .

Tutto ciò che abbiamo detto fino qui corrisponde al simbolo $\{(\overline{31}) \ 11\}$; ma nulla invece corrisponde al simbolo $\{(\overline{31}) \ (\overline{11})\}$. Infatti il fascio di complessi aventi per direttrici le rette unite sghembe

$$p_{12} + k p_{34} = 0,$$

non è unito, nè può esserlo; perchè, dinotando con p_{12}^0 e p_{34}^0 due valori iniziali, si ha $p_{12} = e^{\tau_1 t} p_{12}^0$, $p_{34} = e^{\tau_3 t} p_{34}^0$; permodochè

$$p_{12} + k p_{34} = e^{\tau_1 t} p_{12}^0 + e^{\tau_3 t} k p_{34}^0;$$

e dovrebbe poi essere $\tau_1 = \tau_3$, il che non è. Ma, come si vide nel 3.º caso del n.º 1, può bene avverarsi ciò per una trasformazione omografica qualunque (non di quelle che costituiscono il gruppo attuale) per esempio per la trasformazione aggiunta (1). Le quadriche (6) e (7) ed il complesso (8) sono enti invarianti anche rispetto ad essa; ma poiche si ha pure:

$$p'_{12} = \sigma_1^2 p_{12}, \quad p'_{34} = \sigma_3^2 p_{34},$$

così:

$$p'_{12} + k p'_{34} = \sigma_1^2 p_{12} + \sigma_3^2 k p_{34}.$$

(*) La trasformazione infinitesimale delle rette definita per mezzo delle (10) del § 1 e delle (2) di questo numero è data dalle formole:

$$\frac{d p_{12}}{d t} = 2 \sigma_1 p_{12}, \quad \frac{d p_{34}}{d t} = 2 \sigma_3 p_{34}, \quad \frac{d p_{23}}{d t} = (\sigma_1 + \sigma_3) p_{23} + \lambda_2 p_{24},$$

$$\frac{d p_{14}}{d t} = (\sigma_1 + \sigma_3) p_{14} + \lambda_1 p_{24}, \quad \frac{d p_{31}}{d t} = (\sigma_1 + \sigma_3) p_{31} - \lambda_1 p_{12} - \lambda_2 p_{14}, \quad \frac{d p_{24}}{d t} = (\sigma_1 + \sigma_3) p_{24}.$$

Applicando queste formole ad un complesso lineare si deduce l'equazione (8) col solito metodo.

Da ciò, per l'invariabilità del complesso, segue $\sigma_1^2 = \sigma_3^2$ cioè, escludendo il caso di radici eguali, $\sigma_3 = -\sigma_1$. Il significato geometrico più immediato di questo risultato si ha dalla relazione [vedi n.º 1 equazione (20)]

$$(xx' a_2 a_4) = -1.$$

N. 5: $[4] \equiv [(0\ 0\ 0\ 0)]$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4$.

Omografie aggiunte:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_2, & x'_2 &= \sigma_1 x_2 + \lambda_2 x_3, & x'_3 &= \sigma_1 x_3 + \lambda_3 x_4, \\ & & x'_4 &= \sigma_1 x_4 \\ -\xi_1 &= \sigma_1 \xi'_1, & -\xi_2 &= \sigma_1 \xi'_2 + \lambda_1 \xi'_1, & -\xi_3 &= \sigma_1 \xi'_3 + \lambda_2 \xi'_2, \\ & & -\xi_4 &= \sigma_1 \xi'_4 + \lambda_3 \xi'_3. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Elementi uniti:

il punto quadruplo $\xi_1 = 0$, il piano quadruplo $x_4 = 0$, e la retta $\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4$.

Equazioni differenziali:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= \sigma_1 x_2 + \lambda_2 x_3, & \frac{dx_3}{dt} &= \sigma_1 x_3 + \lambda_3 x_4, \\ & & \frac{dx_4}{dt} &= \sigma_1 x_4 \\ \frac{d\xi_1}{dt} &= -\sigma_1 \xi_1, & \frac{d\xi_2}{dt} &= -\sigma_1 \xi_2 - \lambda_1 \xi_1, & \frac{d\xi_3}{dt} &= -\sigma_1 \xi_3 - \lambda_2 \xi_2, \\ & & \frac{d\xi_4}{dt} &= -\sigma_1 \xi_4 - \lambda_3 \xi_3; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

loro integrali:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \left(x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 x_3^0 t^2 + \frac{1}{6} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 x_4^0 t^3 \right) e^{\sigma_1 t}, & x_3 &= (x_3^0 + \lambda_3 x_4^0 t) e^{\sigma_1 t} \\ x_2 &= \left(x_2^0 + \lambda_2 x_3^0 t + \frac{1}{2} \lambda_2 \lambda_3 x_4^0 t^2 \right) e^{\sigma_1 t}, & x_4 &= x_4^0 e^{\sigma_1 t} \\ \xi_1 &= \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_3 &= \left(\xi_3^0 - \lambda_2 \xi_2^0 t + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \xi_1^0 t^2 \right) e^{-\sigma_1 t} \\ \xi_2 &= \left(\xi_2^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t \right) e^{-\sigma_1 t}, & \xi_4 &= \left(\xi_4^0 - \lambda_3 \xi_3^0 t + \frac{1}{2} \lambda_2 \lambda_3 \xi_2^0 t^2 - \frac{1}{6} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \xi_1^0 t^3 \right) e^{-\sigma_1 t}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Si può prescindere, come si vede, dai fattori $e^{\tau_1 t}$, $e^{-\tau_1 t}$ nelle espressioni delle x e delle ξ .

La traiettoria è una cubica gobba, e l'involuppo è una sviluppabile di 3.^a classe duale della cubica, che sarà la sviluppabile osculatrice di questa, se x^0 e ξ^0 si appartengono, come si suppone (*). La curva passa pel punto $\xi_1 = 0$ oscula il piano $x_4 = 0$ e tocca la retta $\xi_1 \cdot \xi_2$, corrispondentemente al valore $t = \pm \infty$.

Le uniche quadriche che si trasformano in sè sono:

i coni del fascio

$$F(x) \equiv \lambda_2 x_3^2 - 2\lambda_3 x_1 x_4 + m x_4^2 = 0 \text{ col vertice in } \xi_1 = 0,$$

le coniche della schiera

$$\Phi(x) \equiv \lambda_2 \xi_2^2 - 2\lambda_1 \xi_2 \xi_1 + \mu \xi_1^2 = 0 \text{ sul piano } x_4 = 0.$$

I coni hanno un contatto del 3.^o ordine sul piano unito $x_4 = 0$ lungo la generatrice $x_3 \cdot x_4 \equiv \xi_1 \cdot \xi_2$; e così le coniche lo hanno nel punto ξ_1 lungo la stessa retta $\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4$. Questi coni (e queste coniche) sono gli enti invarianti nell'omografia della stella $\xi_1 = 0$ (e del piano $x_4 = 0$) contenuta nell'omografia data, di simbolo [3], cfr. il n.^o 3.

Inoltre determinando m in modo che $F(x)$ passi per x^0 , e μ in modo che $\Phi(\xi)$ tocchi ξ^0 , il cono sarà quello che proietta la cubica gobba dal suo punto $\xi_1 = 0$, e la conica sarà la sezione della sviluppabile osculatrice col suo piano $x_4 = 0$.

Il complesso delle caratteristiche è:

$$\frac{\lambda_{14} \lambda_{34}}{\lambda_1} + \frac{\lambda_{34} \lambda_{23}}{\lambda_3} - \frac{\lambda_{24}^2}{\lambda_2} = 0 \quad \text{WEILER, pag. 193, n.º 38 simbolo } [(1\ 2\ 3)]_1.$$

V'è inoltre un fascio di complessi lineari uniti, le cui direttrici coincidono nella retta unita $\xi_1 \cdot \xi_2$ dell'omografia: l'equazione del fascio è:

$$\lambda_1 p_{23} - \lambda_2 p_{14} + k p_{34} = 0.$$

(*) Dall'equazione del piano osculatore in un punto t si deducano le coordinate del piano osculatore ξ^0 nel punto iniziale x^0 : esse sono:

$$\begin{aligned} \xi_1^0 &= -\lambda_3^2 x_4^0, & \xi_2^0 &= \lambda_1 \lambda_2 x_3^0 x_4^0, & \xi_3^0 &= \lambda_1 x_4^0 (\lambda_2 x_2^0 x_4^0 - \lambda_2 x_3^0) \\ \xi_4 &= \lambda_1 \lambda_2 x_3^0 x_4^0 - 2\lambda_1 \lambda_2 x_2^0 x_3^0 x_4^0 + \lambda_2^2 x_4^0 x_4^0. \end{aligned}$$

Espressioni analoghe si potrebbero trovare per tutti i casi.

B) LE TRAJETTORIE SONO CURVE PIANE (E DUALMENTE).

N. 6: $[(1\ 1)\ 1\ 1] \equiv [1\ 0\ 0]$; *axiale Collineation* di SCHUR nei *Math. Ann.*, Bd. 19, pag. 430, *prospettiva di 1.^a specie* di BATTAGLINI nella terza Memoria: *Sulla geometria proiettiva*.

Nella Memoria di SEGRE: *Sulla teoria e sulla classificazione*, ecc. è detto che questo è il caso generale di una seconda categoria di omografie, per le quali vi sarà sempre un raggio r di punti uniti ed un asse ρ di piani uniti, mentre nei cinque casi precedenti il numero degli elementi uniti era finito.

Ciò basta per concludere che le traiettorie sono curve piane (e le sviluppabili sono con). Infatti se x^0 è il punto iniziale, il piano $x^0 \cdot \rho$ è invariante perchè appartiene al fascio ρ . Applicando dunque ad x^0 una trasformazione qualunque del gruppo esso si sposterà sulla traiettoria, ma non lascerà il piano $x^0 \cdot \rho$: dunque la traiettoria è piana (*).

1.^o caso corrispondente al simbolo $\{(1\ 1)(1\ 1)\ 1\ 1\}$.

Per maggior brevità adoterò la segnatura x'_i in luogo della $\frac{dx_i}{dt}$, e così ξ'_i in luogo di $\frac{d\xi_i}{dt}$; allora l'equazione $x'_i = \sigma_i x_i$ per esempio è un'equazione differenziale, ma la si può intendere anche come una delle equazioni dell'omografia aggiunta che serve a passare dallo spazio S allo spazio S' . Analogamente $\xi'_i = -\sigma_i \xi_i$ è un'equazione differenziale; ma se si vuole intenderla come equazione dell'omografia aggiunta, bisogna ricordare che in questa si ha propriamente $\xi_i = -\sigma_i \xi'_i$ per passare dallo spazio S' allo spazio S ; è questo scambio di spazi che conviene tener presente per evitar dubbi.

Equazioni differenziali:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \sigma_1 x_1, & x'_2 &= \sigma_1 x_2, & x'_3 &= \sigma_3 x_3, & x'_4 &= \sigma_4 x_4, \\ \xi'_1 &= -\sigma_1 \xi_1, & \xi'_2 &= -\sigma_1 \xi_2, & \xi'_3 &= -\sigma_3 \xi_3, & \xi'_4 &= -\sigma_4 \xi_4; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

integrali:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 e^{\sigma_1 t}, & x_2 &= x_2^0 e^{\sigma_1 t}, & x_3 &= x_3^0 e^{\sigma_3 t}, & x_4 &= x_4^0 e^{\sigma_4 t}, \\ \xi_1 &= \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 &= \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_3 &= \xi_3^0 e^{-\sigma_3 t}, & \xi_4 &= \xi_4^0 e^{-\sigma_4 t}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(*) Questo teorema è provato analiticamente dal sig. TANNENBERG nella sua Tesi: *Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendentes qui admettent un groupe continu de transformations*, citata nel 3.^o vol. dell'opera di LIE-ENGEL a pag. 115, e della quale devo la conoscenza al prof. CERRUTI. In questa Memoria si trovano discussi cinque tipi di trasformazioni omografiche infinitesimali insieme a cinque corrispondenti categorie di curve gobbe W . Cfr. più avanti alla fine del § 3.

Gli elementi uniti sono:

due punti semplici $\xi_3 = 0, \xi_4 = 0$ (corrispondenti alle radici semplici σ_3, σ_4);

due piani semplici $x_3 = 0, x_4 = 0$;

un raggio di punti uniti $r \equiv \xi_1 \cdot \xi_2$ (corrispondente alla radice doppia σ_1 che annulla i minori del 3.^o ordine);
 $\equiv x_3 \cdot x_4$

un asse di piani uniti $\rho \equiv x_1 \cdot x_2 \equiv \xi_3 \cdot \xi_4$.

Conseguentemente sono uniti i fasci di centri ξ_3 e ξ_4 e di piani x_4 ed x_3 rispettivamente. Intorno a quei centri e su quei piani si hanno due omologie piane ordinarie aventi r per asse di omologia e però di simboli $[(1\ 1)\ 1]$ ovvero $[1\ 0]$; mentre poi sui piani x_1, x_2 ed intorno ai punti ξ_1, ξ_2 si hanno omografie ordinarie di simbolo $[1\ 1\ 1]$ ovvero $[0\ 0\ 0]$. Quelle omologie, appartenenti al gruppo, si hanno trascurando le terze o le quarte equazioni nelle due linee in (2); e quelle omografie si hanno invece trascurando le prime o le seconde. Si avverta pure che alle coppie $\xi_1 \cdot \xi_2, x_1 \cdot x_2$ di punti e di piani uniti possiamo sostituire un'altra coppia qualunque di punti su r o di piani per ρ .

Le traiettorie sono curve piane situate nei piani $x_3^0 x_4 - x_1^0 x_2 = 0$ del fascio ρ (al variar di x^0); e le sviluppabili sono coni coi vertici nei punti $\xi_1^0 \xi_2 - \xi_3^0 \xi_4 = 0$ del raggio r . — Le caratteristiche dei punti x , come le congiungenti due punti corrispondenti qualunque, tagliano ρ ; le caratteristiche dei piani ξ , come le intersezioni di due piani corrispondenti qualunque, tagliano r .

2.^o caso corrispondente al simbolo $\{(\overline{1\ 1})\ (1\ 1)\ (1\ 1)\}$.

Nel caso precedente al fascio di complessi, avente per direttrici r e ρ , di equazione

$$p_{12} + k p_{34} = 0, \quad (3)$$

ed al fascio-schiera di quadriche, avente quelle rette per polari coniugate, di equazione

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + m x_3 x_4 &= 0 \\ \xi_1 \xi_2 + \mu \xi_3 \xi_4 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

corrispondono i due fasci:

$$\begin{aligned} e^{2\tau_1 t} p_{12}^0 + k e^{(\sigma_3 + \sigma_4) t} p_{34}^0 &= 0 \\ e^{2\tau_1 t} x_1^0 x_2^0 + m e^{(\sigma_3 + \sigma_4) t} x_3^0 x_4^0 &= 0. \end{aligned}$$

Ma i fasci (3) e (4) si mutano in sè stessi se è verificata la condizione

$$2\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_4. \quad (5)$$

Facendo un'analisi più accurata si troverà che non vi sono altri complessi uniti oltre a quelli del fascio (3); ma oltre al fascio (4) v'è un sistema lineare ∞^3 di quadriche che, in forza della (5), si muta in sè stesso, e che ha per equazione

$$\begin{aligned} F(x) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{34}x_3x_4, \\ \Phi(\xi) &= \alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + 2\alpha_{34}\xi_3\xi_4. \end{aligned} \quad (6)$$

Potendo determinare uno dei coefficienti a o α in modo che $F(x)$ passi per x^0 o $\Phi(\xi)$ tocchi ξ^0 , si vede subito che le traiettorie sono coniche situate su $F(x)$ e le sviluppabili sono coni circoscritti a $\Phi(\xi)$.

La forma delle (6) mostra l'importante fatto che le rette r e ρ sono coniugate rispetto ad F ed a Φ . Basta per questo immaginar decomposto, per esempio, il trinomio $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$ nei suoi fattori lineari $p_x = p_1x_1 + p_2x_2$ e $q_x = q_1x_1 + q_2x_2$, e poi scrivere F così:

$$F = p_x q_x + 2a_{34}x_3x_4 = 0,$$

donde si vede che, appunto, la retta $r \equiv x_3 \cdot x_4$ è coniugata all'asse $\rho \equiv p_x \cdot q_x \equiv x_1 \cdot x_2$, che è lo stesso, poichè i piani $p_x = 0$, $q_x = 0$ formano fascio con x_1 , x_2 . Potendosi intendere che $\Phi(\xi) = 0$ sia l'equazione tangenziale di F (*), vediamo subito come può avvenire il movimento: il punto x percorre una conica di F , ed il piano ξ , tangente ad F in x , involuppa il cono circoscritto ad F lungo quella conica; e se il piano di questa è, come dev'essere, un piano per ρ , il vertice del cono sarà il polo del piano ossia un punto di r . Le posizioni iniziali saranno un punto x^0 di F ed il piano tangente rispettivo ξ^0 .

(*) L'equazione tangenziale di $F = 0$ è:

$$a_{22}\xi_1^2 + a_{11}\xi_2^2 - 2a_{12}\xi_1\xi_2 + 2\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{34}}\xi_3\xi_4 = 0;$$

di qui paragonando con $\Phi = 0$ possiamo porre:

$$\alpha_{11} = a_{22}, \quad \alpha_{22} = a_{11}, \quad \alpha_{12} = -a_{12}, \quad \alpha_{34} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{34}},$$

donde, inversamente,

$$a_{11} = \alpha_{22}, \quad a_{22} = \alpha_{11}, \quad a_{12} = -\alpha_{12}, \quad a_{34} = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\alpha_{34}}.$$

Le equazioni (2) delle traiettorie e degli involucri si possono in questo caso semplificare.

Dalla (5) possiamo trarre:

$$\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma, \quad \sigma_4 = \sigma_1 - \sigma,$$

onde, per esempio, dividendo per $e^{\sigma_1 t}$

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 e^{\sigma t} : x_4^0 e^{-\sigma t},$$

e posto $\lambda = e^{\sigma t}$ e moltiplicando poi per λ

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1^0 \lambda : x_2^0 \lambda : x_3^0 \lambda^2 : x_4^0,$$

che sono ben le equazioni di una conica.

S'intende già che in questo e nei seguenti casi il complesso quadratico delle caratteristiche si scinde nei due speciali aventi per direttrici ρ ed r ; il primo formato dalle tangenti alle coniche, il secondo formato dalle generatrici dei coni.

N. 7: $[(1 \ 1) \ 2] \equiv [1 \ (0 \ 0)]$.

Equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \sigma_1 x_1, & x'_2 &= \sigma_1 x_2, & x'_3 &= \sigma_3 x_3 + \lambda_1 x_4, & x'_4 &= \sigma_3 x_4, \\ \xi'_1 &= -\sigma_1 \xi_1, & \xi'_2 &= -\sigma_1 \xi_2, & \xi'_3 &= -\sigma_3 \xi_3, & \xi'_4 &= -\sigma_3 \xi_4 - \lambda_1 \xi_3, \end{aligned} \quad (1)$$

integrali:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 e^{\sigma_1 t}, & x_2 &= x_2^0 e^{\sigma_1 t}, & x_3 &= (x_3^0 + \lambda_1 x_4^0 t) e^{\sigma_3 t}, & x_4 &= x_4^0 e^{\sigma_3 t}, \\ \xi_1 &= \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 &= \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_3 &= \xi_3^0 e^{-\sigma_3 t}, & \xi_4 &= (\xi_4^0 - \lambda_1 \xi_3^0 t) e^{-\sigma_3 t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Gli elementi uniti sono:

- un punto unito isolato $\xi_3 = 0$,
- un piano unito isolato $x_4 = 0$,
- un raggio $r \equiv \xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4$ di punti uniti,
- un asse $\rho \equiv x_1 \cdot x_2 \equiv \xi_3 \cdot \xi_4$ di piani uniti.

Nel piano unito $x_4 = 0$ si ha un'omologia ordinaria $[(1 \ 1) \ 1] \equiv [1 \ 0]$ di centro ξ_3 e di asse r (e dualmente nella stella $\xi_3 = 0$ si ha un'omologia ordinaria di piano $x_4 = 0$ sul quale giacciono sempre due rette corrispondenti e di asse ρ intorno al quale si segano due piani corrispondenti). In ogni piano

unito del fascio ρ , per esempio nel piano $x_4 = 0$ si ha un'omografia di simbolo $[2\ 1] \equiv [(0\ 0)\ 0]$ col punto doppio $\xi_3 = 0$ unito, col punto unito semplice ξ_2 ecc.

Le traiettorie sono curve trascendenti nei piani per ρ , le sviluppabili sono coni i cui vertici sono punti di r .

Non vi sono complessi lineari uniti (s'intende oltre ai complessi speciali r e ρ); e le uniche quadriche unite sono le coppie di piani per ρ e le coppie di punti su r .

Tutto ciò corrisponde al simbolo $\{(\overline{2\ 2})\ 1\ 1\}$. Invece nel gruppo non si trovano omografie cui corrisponda il simbolo $\{(\overline{2\ 2})\ \overline{1\ 1}\}$, per le quali, cioè sia unito il fascio dei complessi lineari avente per direttrici r e ρ .

Infatti dall'equazione del fascio $p_{12} + kp_{34} = 0$ si trae quella del fascio corrispondente:

$$e^{\sigma_1 t} p_{12}^0 + k e^{\sigma_3 t} p_{34}^0 = 0.$$

E perchè questo fascio coincida col primo dev'essere $\sigma_1 = \sigma_3$; il che non è.

Ma anche qui come nel n.° 1 e nel n.° 4 cade in acconcio avvertire che un'omografia generale può ben presentare questo caso.

Sia l'omografia data dalle (1). Allora:

$$p'_{12} + k p'_{34} \equiv \sigma_1^2 p_{12} + k \sigma_3^2 p_{34}.$$

Di qui, se il fascio è unito,

$$\sigma_1 = -\sigma_3, \quad (3)$$

che può ben essere. Siccome poi nell'omologia sul piano $x_4 = 0$ il rapporto $\sigma_1 : \sigma_3$ è la *costante* dell'omologia, così nel caso della relazione (3) questa costante vale -1 , e l'omologia è involutoria.

Adunque cotale omologia si può presentare in un'omografia qualunque del tipo (1), ma giammai in quelle che appartengono al gruppo (2).

Un'altra definizione facile del rapporto $\sigma_1 : \sigma_3$ si trova agevolmente. La congiungente due punti corrispondenti x ed x' nell'omografia si appoggia a ρ . Sia a il punto di appoggio ed a' il punto comune ad xx' ed al piano unito $x_4 = 0$: si ha:

$$(xx'aa') = \sigma_3 : \sigma_1.$$

E, se ha luogo la (3), il gruppo $(xx'aa')$ è armonico; onde xx' formano un'involuzione (i cui punti doppi sono aa') e sono permutabili tra loro.

N. 8: $[(2\ 1)\ 1] \equiv [(1\ 0)\ 0], \{(2\ 1)\ (2\ 1)\}.$

Equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_3, & x'_2 &= \sigma_1 x_2, & x'_3 &= \sigma_1 x_3, & x'_4 &= \sigma_4 x_4 \\ \xi'_1 &= -\sigma_1 \xi_1, & \xi'_2 &= -\sigma_1 \xi_2, & \xi'_3 &= -\sigma_1 \xi_3 - \lambda_1 \xi_1, & \xi'_4 &= -\sigma_4 \xi_4. \end{aligned}$$

Gli elementi uniti sono:

- un punto unito isolato $\xi_4 = 0$,
- un piano unito isolato $x_4 = 0$,
- un raggio $r \equiv \xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4$ di punti uniti,
- un asse $\rho \equiv x_2 \cdot x_3 \equiv \xi_1 \cdot \xi_4$ di piani uniti,
- ed r e ρ passano per ξ_1 e giacciono nel piano x_3 .

Le traiettorie sono curve nei piani per l'asse ρ , e gl'involuppi sono coni i cui vertici sono su r , curve ed involuppo dati dalle equazioni integrali:

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_1^0 + \lambda_1 x_3^0 t) e^{\sigma_1 t}, & x_2 &= x_2^0 e^{\sigma_1 t}, & x_3 &= x_3^0 e^{\sigma_1 t}, & x_4 &= x_4^0 e^{\sigma_4 t} \\ \xi_1 &= \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 &= \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_3 &= (\xi_3^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t) e^{-\sigma_1 t}, & \xi_4 &= \xi_4^0 e^{-\sigma_4 t}. \end{aligned}$$

N. 9: $[(3\ 1)] \equiv [(1\ 0\ 0)], \{(\overline{3\ 3})\}.$

Equazioni differenziali:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_3, & x'_2 &= \sigma_1 x_2, & x'_3 &= \sigma_1 x_3 + \lambda_2 x_4, \\ & & x'_4 &= \sigma_4 x_4 \\ \xi'_1 &= -\sigma_1 \xi_1, & \xi'_2 &= -\sigma_1 \xi_2, & \xi'_3 &= -\sigma_1 \xi_3 - \lambda_1 \xi_1, \\ & & \xi'_4 &= -\sigma_4 \xi_4 - \lambda_2 \xi_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

integrali:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \left(x_1^0 + \lambda_1 x_3^0 t + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 x_4^0 t^2 \right) e^{\sigma_1 t}, & x_2 &= x_2^0 e^{\sigma_1 t}, & x_3 &= (x_3^0 + \lambda_2 x_4^0 t) e^{\sigma_1 t}, \\ & & x_4 &= x_4^0 e^{\sigma_4 t} \\ \xi_1 &= \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 &= \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_3 &= (\xi_3^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t) e^{-\sigma_1 t}, \\ & & \xi_4 &= \left(\xi_4^0 - \lambda_2 \xi_3^0 t + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \xi_1^0 t^2 \right) e^{-\sigma_1 t}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

I fattori trascendenti $e^{\sigma_1 t}$, $e^{-\sigma_1 t}$ si possono sopprimere, e le (2) si riducono a funzioni di secondo grado del parametro t . Le traiettorie dunque sono

coniche nei piani del fascio $\rho: x_4^0 x_2 - x_2^0 x_4 = 0$, e gl'involuppi sono coni aventi i punti sulla punteggiata $r: \xi_2^0 \xi_1 - \xi_1^0 \xi_2 = 0$. I piani dell'asse ρ ed i punti del raggio r , aventi a comune il punto $\xi_1 = 0$ ed il piano $x_4 = 0$, sono i soli elementi uniti dell'omografia.

Cerchiamo se vi sono quadriche che si trasformano in sè stesse.

Se la quadrica $F = a_{\nu}^2$ si deve trasformare in sè stessa, applicando il criterio solito, si trova che dev'essere identicamente:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \lambda_1 x_3 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \lambda_2 x_4 \equiv 0.$$

Di qui le: $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{34} = 0$, $a_{14} \lambda_1 + a_{33} \lambda_2 = 0$. Da quest'ultima si trae poi, supposto data la quadrica soggetta alle prime cinque condizioni, per i coefficienti della trasformazione:

$$\lambda_1 = \mu a_{33}, \quad \lambda_2 = -\mu a_{14}, \quad (3)$$

essendo μ fattore non nullo, e non potendo essere nulli nè a_{33} nè a_{14} .

L'equazione della quadrica dunque è:

$$F = a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2 a_{14} x_1 x_4 + 2 a_{24} x_2 x_4 = 0, \quad (4)$$

o anche, posto $\nu = \frac{1}{\mu}$, per le (3)

$$F = a_{22} x_2^2 + a_{44} x_4^2 + 2 a_{24} x_2 x_4 + \nu (\lambda_1 x_3^2 - 2 \lambda_2 x_1 x_4) = 0.$$

Analogamente:

$$\Phi = a_{22} \xi_2^2 + a_{11} \xi_1^2 + 2 a_{12} \xi_1 \xi_2 + n (\lambda_2 \xi_3^2 - 2 \lambda_1 \xi_1 \xi_4) (*). \quad (4^{bis})$$

La F appartiene ad un fascio individuato dalla coppia di piani

$$a_{22} x_2^2 + a_{44} x_4^2 + 2 a_{24} x_2 x_4 = 0,$$

per l'asse ρ e dal cono

$$\lambda_1 x_3^2 - 2 \lambda_2 x_1 x_4 = 0, \quad (5)$$

(l'unico del fascio), forme ambedue invarianti.

(*) L'equazione tangenziale di F è:

$$a_{33} (a_{22} a_{44} - a_{24}^2) \xi_1^2 - a_{33} a_{14}^2 \xi_2^2 - a_{22} a_{14}^2 \xi_3^2 + 2 a_{33} a_{14} a_{24} \xi_1 \xi_2 - 2 a_{33} a_{22} a_{14} \xi_1 \xi_4 = 0,$$

ch'è composta con le ξ come è composta la Φ : il che è ben naturale.

Oltre al cono (5) appartiene al sistema lineare ∞^3 di quadriche F anche il cono:

$$a_{44}x_4^2 + \nu(\lambda_1 x_2^2 - 2\lambda_2 x_1 x_4) = 0, \quad (6)$$

ossia determinando il rapporto $a_{44}:\nu$ in modo che il cono passi pel punto x^0 :

$$\frac{\lambda_1 x_3^2 - 2\lambda_2 x_1 x_4}{x_4^2} = \frac{\lambda_1 x_3^0 - 2\lambda_2 x_1^0 x_4^0}{x_4^0} \left(= -\frac{a_{44}}{\nu} \right). \quad (6^{bis})$$

Questo cono contiene la traiettoria del punto x^0 data dalle equazioni (2).

Il piano $x_4 = 0$, tangente alla quadrica F , la taglia nelle due rette formate dalle equazioni:

$$x_4 = 0, \quad a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0. \quad (7)$$

Or queste rette sono coniugate armoniche rispetto alla coppia

$$\begin{aligned} x_4 = 0, \quad x_2 = 0 & \text{ cioè l'asse } \rho \\ x_4 = 0, \quad x_3 = 0 & \text{ cioè il raggio } r. \end{aligned}$$

Dunque ρ ed r sono tangenti coniugate fisse rispetto a tutte le quadriche invarianti F .

Determinando le costanti di F in modo ch'essa passi pel punto x^0 , avremo dunque che la traiettoria di x^0 è la conica comune al piano del fascio ρ : $x_4^0 x_2 - x_2^0 x_4 = 0$ ed alla corrispondente superficie F . Per quella traiettoria poi passano ∞^2 superficie F , chè il passaggio per x^0 equivale ad una sola condizione lineare delle tre di cui si può disporre per le F . Considerando il cono (6), o (6^{bis}), che pur contiene la traiettoria in questione, facciasi variare il punto x^0 in modo che il piano $x_4^0 x_2 - x_2^0 x_4 = 0$ non varii. Nasceranno altre traiettorie ed altri coni; ma come questi coni [n.° 3 equazione (4)] hanno tra loro un contatto del 3.° ordine lungo la generatrice $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, cioè lungo r , così le coniche suddette hanno anch'esse un contatto del 3.° ordine nel punto $\xi_1 = 0$ con la tangente comune ρ .

Possiamo anche assoggettare le quadriche F alla condizione che siano fisse per tutte le rette (7), il che richiede semplicemente

$$\frac{a_{22}}{\nu \lambda_1} = \frac{a_{33}}{a_{44}} = \lambda = \text{costante}.$$

Allora tutte le quadriche F si toccano lungo quelle stesse rette fisse: le sfere che si toccano in un punto, per esempio, sono in queste condizioni, e le rette comuni sono le rette che dal punto di contatto vanno ai punti ciclici del piano tangente.

Facciamo muovere adesso il piano intorno a ρ e la traiettoria ch'esso contiene. Il polo del piano mobile percorrerà la retta r . E se la posizione iniziale ξ^0 del piano ξ è quella del piano tangente ad F nel punto x^0 , il piano ξ invilupperà il cono tangente ad F lungo la traiettoria ed avente il vertice in quel punto di r ch'è polo, rispetto ad F , del piano della traiettoria.

Avvengono dunque quì gli stessi movimenti che trovammo nel secondo caso del n.º 6: soltanto qui non vi sono invarianti assoluti e le due rette r e ρ si tagliano.

Questo caso è trattato anch'esso dal LINDEMANN a pag. 112 della Memoria sulla *Meccanica*, e posteriormente a pag. 498 e seguenti delle *Vorlesungen*, 2.^a parte, a proposito della *Geometria iperbolica*. Le formole di questo Autore non sono per altro le canoniche adoperate da me; ma le si possono ridurre facilmente con sostituzioni lineari. Certo è, ad ogni modo, che specialmente il fatto che nell'omografia le rette r e ρ sono raggi ed assi uniti e sono, oltre a ciò, tangenti coniugate e spigoli del tetraedro di riferimento, permette di seguir con l'intuizione i movimenti del gruppo come meglio non si potrebbe.

N. 10: $[(1\ 1)\ (1\ 1)] \equiv [1\ 1]$.

Caso corrispondente al simbolo $\{(\overline{1\ 1\ 1\ 1})\ 1\ 1\}$.

Equazioni differenziali:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \sigma_1 x_1, & x_2 &= \sigma_1 x_2, & x'_3 &= \sigma_3 x_3, & x_4 &= \sigma_3 x_4 \\ \xi'_1 &= -\sigma_1 \xi_1, & \xi'_2 &= -\sigma_1 \xi_2, & \xi'_3 &= -\sigma_3 \xi_3, & \xi'_4 &= -\sigma_3 \xi_4 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

integrali:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 e^{\sigma_1 t}, & x_2 &= x_2^0 e^{\sigma_1 t}, & x_3 &= x_3^0 e^{\sigma_3 t}, & x_4 &= x_4^0 e^{\sigma_3 t} \\ \xi_1 &= \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 &= \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_3 &= \xi_3^0 e^{-\sigma_3 t}, & \xi_4 &= \xi_4^0 e^{-\sigma_3 t} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Gli elementi uniti sono tutti i punti e tutti i piani delle due rette unite

$$r \equiv \xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4, \quad \rho \equiv \xi_3 \cdot \xi_4 \equiv x_1 \cdot x_2.$$

Le traiettorie sono rette comuni ai piani dei fasci

$$x_2^0 x_1 - x_1^0 x_2 = 0, \quad x_4^0 x_3 - x_3^0 x_4 = 0,$$

di assi ρ ed r , o congiungenti i punti delle punteggiate

$$\xi_2^0 \xi_1 - \xi_1^0 \xi_2 = 0, \quad \xi_4^0 \xi_3 - \xi_3^0 \xi_4 = 0,$$

sui sostegni r e ρ . Si ha così una congruenza di 1.° ordine e di 1.^a classe (*geschaarte Collineation*, *prospettiva di 2.^a specie* di BATTAGLINI, *omografia rigata* di SEGREGÈ).

Questo gruppo trasforma in sè ognuno dei due fasci-schiera di quadriche

$$x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3 = 0, \quad x_1 x_3 + \lambda' x_2 x_4 = 0.$$

Anche il sistema lineare ∞^3 di quadriche

$$F(x) \equiv a_{13} x_1 x_3 + a_{14} x_1 x_4 + a_{23} x_2 x_3 + a_{24} x_2 x_4 = 0,$$

si muta in sè stesso. Le quadriche passano per r e ρ . Il sistema tangenziale ha la stessa forma.

Essendo poi le equazioni differenziali in coordinate di rette

$$\begin{aligned} p'_{12} &= 2\sigma_1 p_{12}, & p_{34} &= 2\sigma_3 p_{34}, & p'_{23} &= (\sigma_1 + \sigma_3) p_{23}, & p'_{14} &= (\sigma_1 + \sigma_3) p_{14} \\ p'_{31} &= (\sigma_1 + \sigma_3) p_{31}, & p'_{24} &= (\sigma_1 + \sigma_3) p_{24}, \end{aligned}$$

si vede che la serie ∞^3 di complessi lineari

$$\alpha_{24} p_{13} + \alpha_{23} p_{14} + \alpha_{14} p_{23} + \alpha_{13} p_{24} = 0,$$

è unita. A questi complessi appartengono le due rette r e ρ . Ognuno di questi complessi o contiene due generatrici della quadrica o le contiene tutte. Questo secondo caso avviene solo quando sia $\alpha_{ij} \equiv a_{hk}$, essendo ij ed hk combinazioni diverse.

All'altro simbolo $\{\overline{1111}\} (11)$ non corrispondono, nè anche qui, trasformazioni del gruppo. Dovrebbero essere uniti: il fascio-schiera di quadriche

$$x_1 x_2 + \mu x_3 x_4 = 0,$$

ed il fascio di complessi

$$p_{12} + k p_{34} = 0.$$

Dovrebbe dunque essere

$$e^{2\sigma_1 t} = e^{2\sigma_3 t};$$

ciò che è assurdo perchè σ_1 è diverso da σ_3 .

Al solito, questo caso si presenta in una omografia generale per la quale fosse

$$\sigma_3 = -\sigma_1,$$

cioè per l'omografia involutoria. Dunque nel gruppo non vi sono omografie involutorie.

N. 11: $[(2\ 2)] \equiv [(1\ 1)]$.

Equazioni differenziali:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_3, & x'_2 &= \sigma_1 x_2 + \lambda_2 x_4, & x'_3 &= \sigma_1 x_3, \\ & & x'_4 &= \sigma_1 x_4, \\ \xi'_1 &= -\sigma_1 \xi_1, & \xi'_2 &= -\sigma_1 \xi_2, & \xi'_3 &= -\sigma_1 \xi_3 - \lambda_1 \xi_1, \\ & & \xi'_4 &= -\sigma_1 \xi_4 - \lambda_2 \xi_2, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

integrali:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (x_1^0 + \lambda_1 x_3^0 t) e^{\sigma_1 t}, & x_2 &= (x_2^0 + \lambda_2 x_4^0 t) e^{\sigma_1 t}, & x_3 &= x_3^0 e^{\sigma_1 t}, \\ & & x_4 &= x_4^0 e^{\sigma_1 t}, \\ \xi_1 &= \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 &= \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_3 &= (\xi_3^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t) e^{-\sigma_1 t}, \\ & & \xi_4 &= (\xi_4^0 - \lambda_2 \xi_2^0 t) e^{-\sigma_1 t}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

mentre gli elementi uniti sono tutti i punti ed i piani dell'unica retta

$$\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4,$$

nella quale coincidono r e ρ .

Dalle (2) si possono sopprimere i fattori $e^{\sigma_1 t}$, $e^{-\sigma_1 t}$, ed esse fanno vedere che le traiettorie sono rette appoggiantisi ad r , formanti una congruenza a direttrici coincidenti.

Questa è l'*omografia rigata speciale* di SEGRE.

Si trova poi che si trasforma in sè stesso il sistema lineare ∞^3 di quadriche

$$F(x) \equiv a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2 a_{34} x_3 x_4 + m(\lambda_2 x_1 x_4 - \lambda_1 x_2 x_3) = 0,$$

ed il sistema tangenziale:

$$\Phi(\xi) \equiv \alpha_{11} \xi_1^2 + \alpha_{22} \xi_2^2 + 2 \alpha_{12} \xi_1 \xi_2 + \mu(\lambda_2 \xi_2 \xi_3 - \lambda_1 \xi_1 \xi_4) = 0.$$

Queste quadriche (*) si toccano lungo la retta $r \equiv \rho$ e si tagliano secondo due rette, mobili, dell'altro sistema. Le traiettorie sono rette di queste quadriche di sistema opposto alla $r \equiv \rho$: basta far passare F per x^0 o far toccare Φ da ξ_0 , perchè la traiettoria-raggio di x^0 (l'involuppo-asse di ξ^0) sia posta su F' (su Φ).

(*) CLEBSCH-LINDEMANN, Vorles., 2.^a parte, pag. 230-31, n.° 11.

Si trova pure che la serie lineare ∞^3 di complessi:

$$\beta(\lambda_1 p_{23} + \lambda_2 p_{14}) + \beta_{24} p_{13} + \beta_{13} p_{24} + \beta_{12} p_{34} = 0,$$

si trasforma in sè.

Il complesso è speciale se

$$\lambda_1 \lambda_2 \beta^2 - \beta_{13} \beta_{24} = 0:$$

in ogni caso la retta $\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv r \equiv \rho$ appartiene al complesso.

$$N. 12: [(111) 1] \equiv [20], \{(111) (111)\}.$$

Equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \sigma_1 x_1, & x'_2 &= \sigma_1 x_2, & x'_3 &= \sigma_1 x_3, & x'_4 &= \sigma_1 x_4 \\ \xi'_1 &= -\sigma_1 \xi_1, & \xi'_2 &= -\sigma_1 \xi_2, & \xi'_3 &= -\sigma_1 \xi_3, & \xi'_4 &= -\sigma_1 \xi_4, \end{aligned}$$

integrali:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 e^{\sigma_1 t}, & x_2 &= x_2^0 e^{\sigma_1 t}, & x_3 &= x_3^0 e^{\sigma_1 t}, & x_4 &= x_4^0 e^{\sigma_1 t} \\ \xi_1 &= \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 &= \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_3 &= \xi_3^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_4 &= \xi_4^0 e^{-\sigma_1 t}. \end{aligned}$$

Gli elementi uniti sono:

il punto $\xi_4 = 0$ come centro di una stella unita,
il piano $x_4 = 0$ come sostegno di un sistema piano unito.

Questa è l'omologia solida ordinaria (*prospettiva di 3.^a specie* di BARTAGLINI). Le rette per $\xi_4 = 0$ (centro d'omologia) o le rette in $x_4 = 0$ (piano d'omologia) sono le traiettorie o gl'involuppi (caratteristiche di punti o di piani).

Sono quadriche unite tutti i coni in $\xi_4 = 0$ e tutte le coniche in $x_4 = 0$. Abbiamo poi le altre equazioni differenziali in coordinate-raggi di rette

$$\begin{aligned} p'_{23} &= 2\sigma_1 p_{23}, & p'_{31} &= 2\sigma_1 p_{31}, & p'_{12} &= 2\sigma_1 p_{12} \\ p'_{14} &= (\sigma_1 + \sigma_4) p_{14}, & p'_{24} &= (\sigma_1 + \sigma_4) p_{24}, & p'_{34} &= (\sigma_1 + \sigma_4) p_{34}. \end{aligned}$$

(e dualmente $\pi'_{14} = 2\sigma_1 \pi_{14}$, $\pi'_{23} = (\sigma_1 + \sigma_4) \pi_{23}$ ecc.).

Onde si vede che i due complessi speciali

$$\begin{aligned} A &\equiv a_{14} p_{23} + a_{24} p_{31} + a_{34} p_{12} = 0 \\ B &\equiv b_{23} p_{14} + b_{31} p_{24} + b_{12} p_{34} = 0, \end{aligned}$$

sono uniti. Il primo complesso individua una retta a le cui coordinate-raggi sono $(0, 0, 0, a_{14}, a_{24}, a_{34})$ e che, dunque, passa pel centro ξ_4 di omologia; la retta b individuata dal secondo complesso ha per coordinate-raggi $(b_{23}, b_{31}, b_{12}, 0, 0, 0)$ e giace nel piano $x_4 = 0$ di omologia (*). Le rette a, b sono in generale sghembe, perchè in generale non è nullo l'invariante:

$$a_{14}b_{23} + a_{24}b_{31} + a_{34}b_{12},$$

e sono direttrici di una congruenza comune ai due complessi speciali. Questa congruenza degenera in un fascio di raggi se a e b si tagliano.

Inoltre due complessi corrispondenti si possono scrivere:

$$A + B = 0, \quad e^{2\tau_1 t} A + e^{(\tau_1 + \tau_4)t} B = 0;$$

e si vede da ciò ch'essi si tagliano nella congruenza precedente.

$$\text{N. 13: } [(2 \ 1 \ 1)] \equiv [(2 \ 0)], \quad \{(\overline{2 \ 2 \ 1 \ 1})\}.$$

Equazioni differenziali:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_4, & x'_2 &= \sigma_1 x_2, & x'_3 &= \sigma_1 x_3, & x'_4 &= \sigma_1 x_4 \\ \xi'_1 &= -\sigma_1 \xi_1, & \xi'_2 &= -\sigma_1 \xi_2, & \xi'_3 &= -\sigma_1 \xi_3, & \xi'_4 &= -\sigma_1 \xi_4 - \lambda_1 \xi_1, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

integrali:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (x_1^0 + \lambda_1 x_4^0 t) e^{\sigma_1 t}, & x_2 &= x_2^0 e^{\sigma_1 t}, & x_3 &= x_3^0 e^{\sigma_1 t}, & x_4 &= x_4^0 e^{\sigma_1 t} \\ \xi_1 &= \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 &= \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_3 &= \xi_3^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_4 &= (\xi_4^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t) e^{-\sigma_1 t} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Questa è pure un'omologia, ma quella detta *speciale*, nella quale il centro è $\xi_1 = 0$ ed il piano è $x_4 = 0$ che contiene il centro.

Quadriche unite (coni e coniche) come precedentemente.

Abbiamo poi:

$$\left. \begin{aligned} p'_{12} &= 2\sigma_1 p_{12} - \lambda_1 p_{24}, & p'_{13} &= 2\sigma_1 p_{13} - \lambda_1 p_{34}, & p'_{14} &= 2\sigma_1 p_{14} \\ p'_{23} &= 2\sigma_1 p_{23}, & p'_{24} &= 2\sigma_1 p_{24}, & p'_{34} &= 2\sigma_1 p_{34}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

onde il complesso unito, appartenente ad una serie lineare ∞^3 ,

$$B \equiv b_{23}p_{14} + b_{14}p_{23} + b_{31}p_{24} + b_{12}p_{34} = 0.$$

Se poi:

$$C \equiv b_{23}p_{14} + b_{31}p_{24} + b_{12}p_{34} + b_{14}p_{23} + b_{24}p_{31} + b_{34}p_{12} = 0,$$

(*) SEGRE, *Ricerche*, ecc., pag. 17.

è l'equazione di un complesso qualunque, quella del suo corrispondente si ottiene, dopo aver eseguita l'integrazione delle (3), sotto la forma:

$$\Gamma \equiv e^{\sigma_1 t} \cdot C + e^{\sigma_1 t} \lambda_1 [b_{24} p_{34} - b_{34} p_{24}] t = 0.$$

Di qui intanto si conclude che il complesso C sarà unito, diverrà, cioè, B , se $b_{24} - b_{34} = 0$. In ogni altro caso Γ è una combinazione lineare dei due

$$C = 0 \quad \text{e} \quad b_{24} p_{34} - b_{34} p_{24} = 0,$$

che possiamo scrivere anche, posto $s = \frac{1}{\gamma_1 t}$, così:

$$\Gamma = s C + b_{24} p_{34} - b_{34} p_{24} = 0.$$

Per determinare i complessi speciali si ha l'equazione

$$(b_{14} b_{23} + b_{24} b_{31} + b_{34} b_{12}) s^2 = 0. \quad (4)$$

Pel valore doppio $s = 0$ si ha dunque il complesso speciale (direttrici infinitamente vicine della congruenza)

$$b_{24} p_{34} - b_{34} p_{24} = 0,$$

che rappresenta una retta le cui coordinate-raggi q_{ij} sono:

$$q_{12} = b_{24}, \quad q_{31} = -b_{34},$$

e le altre q_{ij} sono nulle.

Or queste sono le coordinate di una retta per ξ_1 nel piano $x_4 = 0$.

L'equazione (4) in s è identica se è nullo l'invariante

$$b_{14} b_{23} + b_{24} b_{31} + b_{34} b_{12} = 0,$$

cioè se il complesso C è speciale saranno allora speciali tutti i complessi Γ (*).

(*) Il dott. ENRIQUES m'inviò, durante la redazione della mia Memoria, un suo lavoro pubblicato negli Atti del R. Istituto Veneto: *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse*. Il titolo stesso dinota la differenza del soggetto mio da quello dell'elegio dott. ENRIQUES, malgrado analogie sostanziali. Le superficie esaminate dal dott. ENRIQUES sono degnissime di studio, anche, come mi scriveva l'Autore, dal punto di vista della geometria differenziale (per le assintotiche, per esempio).

§ 3. Gruppi in coordinate non omogenee. Osservazioni.

Volendo adoperar le coordinate cartesiane, alle quali sole restringerò oramai il mio dire, si ha gran vantaggio nel mandare all'∞ un piano unito corrispondente ad una radice della maggior molteplicità possibile.

Adottando in questo caso il simbolo

$$\begin{aligned} Uf &\equiv \xi(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z} \\ &\equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned}$$

si ha:

$$\frac{dx}{dt} = \xi, \quad \frac{dy}{dt} = \eta, \quad \frac{dz}{dt} = \zeta.$$

Le funzioni ξ, η, ζ si calcolano subito, caso per caso, partendo dalle coordinate non omogenee, nel modo seguente.

Pongasi per esempio:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Abbiamo, per le (1) del § 1,

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{dx}{dt} = \frac{x_4(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) - x_1(a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4)}{x_4^2} \\ &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} - x(a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}). \end{aligned}$$

Simili espressioni si avranno per le $\eta = \frac{dy}{dt}$, $\zeta = \frac{dz}{dt}$.

Onde:

$$\begin{aligned} Uf &= [a_{11}x + \dots - x(a_{41}x + \dots)] \frac{\partial f}{\partial x} + [a_{21}x + \dots - y(a_{41}x + \dots)] \frac{\partial f}{\partial y} \\ &\quad + [a_{31}x + \dots - z(a_{41}x + \dots)] \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}$$

Cosicchè dal simbolo

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial x_1} \sum_k a_{1k} x_k + \frac{\partial f}{\partial x_2} \sum_k a_{2k} x_k + \frac{\partial f}{\partial x_3} \sum_k a_{3k} x_k + \frac{\partial f}{\partial x_4} \sum_k a_{4k} x_k,$$

nascerà il simbolo $Uf(*)$ sottraendo dai coefficienti di $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ i prodotti di x_1 , x_2 , x_3 pel coefficiente di $\frac{\partial f}{\partial x_4}$, sopprimendo in Xf il termine in $\frac{\partial f}{\partial x_4}$ e ponendo in ultimo $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = 1$.

Seguono i 13 tipi $U_i f$ ($i = 1, \dots, 13$). Avverto che Uf si può moltiplicare per un fattore costante.

$$[1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$\begin{aligned} U_1 f &= (\sigma_1 - \sigma_4)x \frac{\partial f}{\partial x} + (\sigma_2 - \sigma_4)y \frac{\partial f}{\partial y} + (\sigma_3 - \sigma_4)z \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= \alpha x \frac{\partial f}{\partial x} + \beta y \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma z \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}$$

Le trasformazioni per le quali

$$\alpha = \beta + \gamma,$$

cioè:

$$\sigma_1 + \sigma_4 = \sigma_2 + \sigma_3 \quad [\S \ 2, \text{ n.}^\circ \ 1 \text{ equazione (10)}],$$

mutano in sè stesse le quadriche

$$a_{11}x + 2a_{23}yz = 0;$$

quelle per le quali

$$\alpha + \beta = 0,$$

(*) L'equazione $Uf=0$ alle derivate parziali ad un numero qualunque di variabili fu integrata da HESSE, nel 25.º vol. del Giornale di Crelle, subito dopo che JACOB ebbe integrata, nel vol. 24, l'equazione differenziale ordinaria a due variabili x, y che porta il suo nome, ed il cui integrale fornisce appunto curve W piane. Vedansi, oltre i già citati, anche i seguenti lavori o libri:

LERESGUE, tom. 10 del Journal de Liouville, pag. 316-319.

DARBOUX, *Mémoire sur les équations différentielles*, etc. nel Bulletin des Sciences mathématiques, 12.ª série, tom. 2.º, année 1878.

BOOLE, *A treatise on differential equations*, 1859.

JORDAN, *Cours d'Analyse*, tom. 3, pag. 36 e pag. 164, dove riporta il metodo di

CAUCHY pel sistema d'equazioni differenziali ordinarie cui dà luogo la $Uf=0$.

SERRET, *Calcolo integrale*.

FOURET, Comptes Rendus, tom. 77, 1.º sem., pag. 693 e pag. 1837.

BATTAGLINI, *Sulla geometria proiettiva*, Memoria 3.ª, Accad. di Napoli, 1875. — *Sui connessi ternarii* (1, 1), Ibid., 1880.

mutano in sè stessi i cilindri

$$xy - k = 0;$$

e finalmente quelle per le quali

$$\alpha + \beta = 2\gamma, \quad (1)$$

mutano in sè i coni

$$xy - kz^2 = 0. \quad (2)$$

Giova in questo caso, volendo fare un esempio, supporre prima di tutto α e β immaginari coniugati, γ reale, poi i piani uniti x ed y coincidenti coi piani ciclici per l'asse z .

Scriveremo allora prima $U_1 f$ e (2) sotto la forma:

$$U_1 f = \alpha \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \beta \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} + \gamma z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3)$$

$$\xi \eta - kz^2 = 0, \quad (4)$$

indi porremo, d'accordo con la (1),

$$\alpha = \gamma + \mu i, \quad \beta = \gamma - \mu i \quad (5)$$

$$\xi = x + yi, \quad \eta = x - yi. \quad (6)$$

Le equazioni integrali

$$\xi = \xi_0 e^{\alpha t}, \quad \eta = \eta_0 e^{\beta t}, \quad z = z_0 e^{\gamma t},$$

diventano:

$$x + iy = (x_0 + iy_0) e^{(\gamma + \mu i)t}, \quad z = z_0 e^{\gamma t}, \quad (7)$$

(il valore di η essendo coniugato a quello di ξ è inutile scriverlo). Di qui si hanno le

$$\left. \begin{aligned} x &= (x_0 \cos \mu t - y_0 \sin \mu t) e^{\gamma t}, & y &= (x_0 \sin \mu t + y_0 \cos \mu t) e^{\gamma t} \\ z &= z_0 e^{\gamma t}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

La (4) con le sostituzioni (6) diviene:

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_0^2} = k, \quad (9)$$

determinando k in modo che il cono passi pel punto iniziale $x_0 y_0 z_0$: il cono è di rotazione intorno all'asse unito z .

La curva (8) giace sul cono (9) ed è la cosiddetta spirale conica, elica conica, lossodromia del cono di rotazione, perchè si dimostra facilmente che

questa curva forma angolo costante così con le generatrici come coi piani meridiani del cono.

Le x ed y delle equazioni (8) rappresentano la proiezione dell'elica conica sul piano perpendicolare all'asse del cono: essa è una spirale logaritmica. L'equazione di questa curva in coordinate polari ρ e φ , se τ è l'angolo costante del raggio vettore e della tangente è:

$$\rho = \rho_0 e^{(\varphi - \varphi_0) \cot \tau}, \quad (10)$$

dove ρ_0 è il raggio vettore corrispondente al valore φ_0 .

La prima delle (7) moltiplicata per la coniugata dà

$$\rho = \rho_0 e^{i t},$$

e questa paragonata con la (10) porge:

$$t = \varphi - \varphi_0, \quad \cot \tau = \gamma,$$

la quale ultima equazione dà il significato di γ .

Volendo trasformare il simbolo $U_1 f$ nelle nuove coordinate x, y, z , siccome nel termine $\gamma z \frac{\partial f}{\partial z}$ x ed y non entrano esplicitamente, basterà trasformare il binomio

$$A f \equiv \alpha \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \beta \eta \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Esprimendo dalle (6) le x ed y con ξ ed η si ha:

$$x = \frac{1}{2} (\xi + \eta), \quad y = \frac{1}{2i} (\xi - \eta),$$

onde poi

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Cosicchè successivamente:

$$\left. \begin{aligned} A f &= \frac{1}{2} (\alpha \xi + \beta \eta) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i} (\alpha \xi - \beta \eta) \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= (\gamma x - \mu y) \frac{\partial f}{\partial x} + (\gamma y + \mu x) \frac{\partial f}{\partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

perciò:

$$U_1 f = (\gamma x - \mu y) \frac{\partial f}{\partial x} + (\gamma y + \mu x) \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Questo è il simbolo della « Spiraltransformation » (KLEIN: *Einleitung in die*

höhere Geom. II, pag. 221-243; ed anche LIE-SCHEFFERS: *Vorles. über kontinuierliche Gruppen*, pag. 414), e si può scriverlo così:

$$U_1 f = \mu \left(-y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \gamma \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Il coefficiente di μ è il simbolo della rotazione intorno all'asse z (dell'asse x verso l'asse y) ed il coefficiente di γ è il simbolo di una omotetia rispetto all'origine (vedansi appresso i simboli $U'_0 f$, $U_{12} f$). Perciò la trasformazione si compone di una rotazione intorno ad un asse *sommata* con una omotetia solida il cui centro è su quell'asse.

$$[2 \ 1 \ 1].$$

Qui il piano unito doppio è $x_2 = 0$; onde in questo caso giova porre:

$$z = \frac{x_1}{x_2}, \quad \xi = \frac{x_3}{x_2}, \quad \eta = \frac{x_4}{x_2},$$

ed abbiamo:

$$U_2 f = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} + (\sigma_3 - \sigma_2) \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + (\sigma_4 - \sigma_2) \eta \frac{\partial f}{\partial \eta}. \quad (12)$$

Un caso molto importante si ha allorchè le radici σ_3 , σ_4 sono immaginarie coniugate e si cercano quelle trasformazioni per le quali

$$2\sigma_2 = \sigma_3 + \sigma_4, \quad (13)$$

nel qual caso (vedi n.º 2 del § 2) si mutano in sè i fasci-schiere di coni e di coniche

$$x_3 x_4 + \lambda x_2^2 = 0, \quad \xi_3 \xi_4 + l \xi_1^2 = 0; \quad (14)$$

e, di più, come precedentemente

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy.$$

Compatibilmente con (13) poniamo allora:

$$\sigma_3 = \sigma_2 + \mu i, \quad \sigma_4 = \sigma_2 - \mu i.$$

Le equazioni integrali sono in questo caso

$$\xi = \xi_0 e^{\mu i t}, \quad \eta = \eta_0 e^{-\mu i t}, \quad z = z_0 + \lambda_1 t,$$

onde in coordinate x , y , z

$$x = x_0 \cos \mu t - y_0 \sin \mu t, \quad y = x_0 \sin \mu t + y_0 \cos \mu t, \quad z = z_0 + \lambda_1 t. \quad (15)$$

Il simbolo $U_2 f$ si trasforma così:

$$U_2 f = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \mu i \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \mu i \eta \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

e, dalla (11) ponendovi $\gamma = 0$,

$$U_2 f = \mu \left(-y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (16)$$

Le curve (15) sono eliche tracciate sul cilindro retto circolare (14), cioè:

$$\xi \eta + \lambda \equiv x^2 + y^2 + \lambda,$$

dove $\lambda = -(x_0^2 + y_0^2)$; ed il simbolo $U_2 f$ è quello del movimento elicoidale intorno all'asse z , composto della rotazione intorno ad esso e della traslazione lungo esso.

[3 1].

Qui il piano unito triplo è $x_3 = 0$; onde si porrà:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad z = \frac{x_4}{x_3},$$

cosicchè:

$$U_3 f = \lambda_1 y \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial y} + (\sigma_4 - \sigma_1) z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (17)$$

[2 2].

I piani uniti doppi son due $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, cosicchè possiamo porre:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

per ottenere poi

$$U_4 f = [(\sigma_1 - \sigma_3)x + \lambda_1 y] \frac{\partial f}{\partial x} + (\sigma_1 - \sigma_3)y \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial z}.$$

[4].

Qui manderemo all' ∞ il piano $x_4 = 0$ ed avremo:

$$U_5 f = \lambda_1 y \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 z \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (18)$$

per gruppo le cui traiettorie sono cubiche gobbe esclusivamente.

$$[(1 \ 1) \ 1 \ 1].$$

I piani corrispondenti alla radice doppia sono quelli del fascio $\rho \equiv x_1 \cdot x_2$: porremo perciò:

$$z = \frac{x_2}{x_1}, \quad x = \frac{x_3}{x_1}, \quad y = \frac{x_4}{x_1},$$

cosicchè l'asse ρ dei piani uniti cade all' ∞ sul piano $z=0$, mentre il luogo dei punti uniti è l'asse delle z ($\equiv x, y=0$).

Onde avremo qui

$$U_6 f = (\sigma_3 - \sigma_1)x \frac{\partial f}{\partial x} + (\sigma_4 - \sigma_1)y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (19)$$

per essere:

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Avremo dunque nei piani $z = \text{costante}$ delle curve, proiettate in vera forma sul piano xy , traiettorie del gruppo piano generale proiettivo del tipo:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial f}{\partial y},$$

avendo posto, il che è lecito, $\alpha = \frac{\sigma_4 - \sigma_1}{\sigma_3 - \sigma_1}$.

Le traiettorie del gruppo sono coniche se la $U_6 f$ si sceglie tra quelle per le quali [n.º 6 equazione (5)]

$$2\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_4. \quad (20)$$

Allora il gruppo avrà l'espressione semplicissima ($\alpha = -1$)

$$U'_6 f = x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (21)$$

Le proiezioni delle traiettorie sui piani $z = \text{cost.}$ saranno le coniche

$$xy = x_0 y_0, \quad (22)$$

mentre poi le quadriche F invarianti hanno per equazione:

$$F = a_{11} + a_{22}z^2 + 2a_{12}z + 2a_{34}xy = 0,$$

e conterranno le curve (22) se

$$F_2 = a_{11} + a_{22}z_0^2 + 2a_{12}z_0 + 2a_{34}x_0y_0 = 0.$$

In particolare a questo tipo appartiene il gruppo delle rotazioni intorno all'asse z . Soltanto bisogna supporre, d'accordo con (20)

$$\sigma_3 = \sigma_1 + \mu i, \quad \sigma_4 = \sigma_1 - \mu i,$$

e di più, al solito,

$$x = X + Yi, \quad y = X - Yi.$$

Allora il simbolo $U_6 f$ [vedi innanzi nell'equazione (11) pel simbolo Af ponendovi $\gamma = 0$] si muta nell'altro:

$$U_6 f = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (23)$$

avendo scritto qui x, y in luogo di X, Y .

La F poi diviene:

$$F = a_{11} + a_{22}z^2 + 2a_{12}z + 2a_{34}(x^2 + y^2) = 0,$$

equazione di una quadrica di rotazione intorno all'asse z .

$$[(1 \ 1) \ 2].$$

Qui si faccia:

$$x = \frac{x_4}{x_2}, \quad y = \frac{x_3}{x_2}, \quad z = \frac{x_1}{x_2},$$

e si otterrà:

$$U_7 f = (\sigma_3 - \sigma_1)x \frac{\partial f}{\partial x} + [(\sigma_3 - \sigma_1)y + \lambda_1 x] \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Questo gruppo è quello di quell'omografia nel piano $z = \text{cost.}$ [o nella proiezione su $z = 0$] che ha il simbolo $[2 \ 1]$, possiede, cioè, una retta unita semplice nell'asse ρ all' ∞ , poi l'unica altra retta unita doppia nell'asse y , infine un punto unito semplice nell'origine ed il doppio all' ∞ sull'asse y .

$$[(2 \ 1) \ 1].$$

Ponendo:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_4}{x_3}, \quad z = \frac{x_2}{x_3},$$

si ha:

$$U_8 f = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + (\sigma_4 - \sigma_1)y \frac{\partial f}{\partial y}$$

Osservazione. I due gruppi $U_7 f$ ed $U_8 f$ sono rispettivamente riducibili alla forma:

$$U_7 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad U_8 f = \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y};$$

perchè basta porre:

$$\begin{aligned} \text{nel primo} \quad y &= Y, \quad \lambda_1 x = (\sigma_3 - \sigma_1) X \quad \text{e dividere poi per } \sigma_3 - \sigma_1 \\ \text{nel secondo} \quad y &= Y, \quad (\sigma_4 - \sigma_1) x = \lambda_1 X \quad \text{e dividere poi per } \sigma_4 - \sigma_1. \end{aligned} \quad (24)$$

e scrivere di nuovo lettere minuscole.

Or le trasformazioni del tipo $U_8 f$ hanno per elementi uniti i due punti all' ∞ sugli assi delle coordinate la retta all' ∞ (come doppia) e l'asse delle x (come semplice).

Adunque tra i due gruppi non v'è che scambio di nomi per gli elementi uniti; perciò i due gruppi, in quanto all'omografia che producono sui piani $z = \text{cost.}$ appartengono allo stesso tipo. E da $U_7 f$ si deduce $U_8 f$ (*) ponendo:

$$x' = -\frac{y}{x}, \quad y' = \frac{1}{x},$$

onde:

$$x = \frac{1}{y'}, \quad y = -\frac{x'}{y'},$$

e perciò:

$$U_7 f = -\frac{\partial f}{\partial x'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

La sostituzione, estesa a tutto lo spazio, non è però lineare. Tornando infatti alle coordinate omogenee e chiamando x'_i le variabili cui si riferisce il gruppo $U_8 f$ x_i quelle cui si riferisce U_7 , si deduce, ritenendo le stesse z :

$$x' = \frac{x'_1}{x'_3} = -\frac{x_3}{x_4}, \quad y' = \frac{x'_4}{x'_3} = \frac{x_2}{x_4}, \quad z' = \frac{x'_2}{x'_3} = z = \frac{x_1}{x_2},$$

onde la trasformazione dell'uno nell'altro spazio:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = -x_2 x_3 : x_1 x_4 : x_2 x_1 : x_2^2,$$

ch'è quadratica così come la sua inversa.

(*) Vedasi LIE-SCHEFFERS: *passim*.

[(3 1)].

Qui abbiamo a porre:

$$x = \frac{x_3}{x_4}, \quad y = \frac{x_1}{x_4}, \quad z = \frac{x_2}{x_4},$$

per ottenere subito:

$$U_9 f = \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Questo gruppo, nei piani $z = \text{costante}$, è del tipo

$$U_9' f = \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y},$$

corrispondente all'omografia piana [3], con una retta sola unita all' ∞ e con un sol punto all' ∞ quello dell'asse y .

[(1 1) (1 1)].

Fatto:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

abbiamo:

$$U_{10} f = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y},$$

omotetia nei piani $z = \text{cost.}$

[(2 2)].

Qui:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

donde:

$$U_{11} f = \lambda_1 z \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

[(1 1 1) 1].

Ponendo:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

si trova:

$$U_{12} f = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Se poi si fa:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad z = \frac{x_4}{x_3},$$

si trova:

$$U'_{12}f = z \frac{\partial f}{\partial z},$$

$U_{12}f$ è il gruppo delle omotetie solide intorno all'origine, $U'_{12}f$ è il gruppo delle affinità solide secondo l'asse z .

$$[(2 \ 1 \ 1)].$$

Ponendo:

$$z = \frac{x_1}{x_4}, \quad x = \frac{x_2}{x_4}, \quad y = \frac{x_3}{x_4},$$

si trova:

$$U_{13}f = \frac{\partial f}{\partial z},$$

che è il gruppo delle traslazioni parallelamente all'asse z .

I primi cinque gruppi sono quelli già discussi del sig. TANNENBERG, salvo la diversa scrittura e l'ordine, chè il nostro quarto gruppo è il terzo di quell'autore, e salvo altresì qualche fattore costante o qualche mutamento nelle unità di misura.

Per esempio nel tipo:

$$U_4f = [(\sigma_1 - \sigma_3)x + \lambda_1 y] \frac{\partial f}{\partial x} + (\sigma_1 - \sigma_3)y \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial z},$$

basta scrivere:

$$x = X, \quad y = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\lambda_1} Y, \quad z = \frac{\lambda_2}{\sigma_1 - \sigma_3} Z,$$

analogamente a (24), per ottenere il tipo:

$$(X + Y) \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z},$$

ch'è il terzo del TANNENBERG.

Roma, luglio 1894.