**SUL PRINCIPIO DELLE IMMAGINI DI LORD KELVIN
E LE EQUAZIONI DELL' ELASTICITÀ,
del Prof. C. SOMIGLIANA ¹⁾.**

L' applicazione del principio delle immagini all' equazione di Laplace nei problemi di elettrostatica è fondata sopra una trasformazione in se stessa di questa equazione, quando sulle variabili indipendenti si fa una trasformazione per raggi vettori reciproci e la funzione viene moltiplicata per l' inversa della distanza dal centro d' inversione. Come caso particolare di questa trasformazione si ha la riflessione sopra un piano. Ora se si considerano le equazioni dell' equilibrio elastico, toltone il caso generale, quando la sostanza di cui è composto il corpo non ammette alcun elemento di simmetria, in tutti gli altri si ha sempre un gruppo di trasformazioni, contenenti delle riflessioni sopra piani di simmetria, per le quali le equazioni rientrano, come si suol dire, in se stesse. Si presenta quindi naturale l' idea di tentare se, approfittando di queste proprietà, non sia possibile estendere alle equazioni dell' equilibrio elastico il metodo delle immagini che, come è noto, conduce, in questi casi, all' integrazione dell' equazione di Laplace in campi limitati dai piani di simmetria, ammessi dall' equazione.

La cosa è effettivamente possibile in certi casi coll' applicazione del teorema seguente :

Si abbia un corpo limitato dal piano $z = 0$, la cui struttura cristallina ammetta come piani di simmetria i piani a questo paralleli e siano

$$\begin{array}{ccc} u(x, y, z), & v(x, y, z), & w(x, y, z) \\ L, & M, & N. \end{array}$$

le componenti degli spostamenti e delle forze superficiali che determinano una deformazione qualsiasi del corpo,

quando su di esso non agiscono forze di massa. Il corpo stesso rimarrà ancora in equilibrio, se in esso avvengono gli spostamenti

$$u(x, y, -z), \quad v(x, y, -z), \quad -w(x, y, -z)$$

mentre alla superficie sono applicate forze le cui componenti sono

$$-L, \quad -M, \quad N.$$

La dimostrazione di questo teorema riesce assai facile osservando che nelle equazioni di equilibrio

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

si ha, nel caso contemplato nel teorema precedente

$$-X_x = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{16}x_y$$

$$-Y_y = c_{21}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z + c_{26}x_y$$

$$-Z_z = c_{31}x_x + c_{32}y_y + c_{33}z_z + c_{36}x_y$$

$$-Y_z = c_{44}y_z + c_{45}z_x$$

$$-Z_x = c_{54}y_z + c_{55}z_x$$

$$-X_y = c_{16}x_x + c_{26}y_y + c_{36}z_z + c_{66}x_y$$

dove $X_x, Y_y, \dots$ e $x_x, y_y, \dots$ rappresentano, come d'uso, le componenti di pressione e di deformazione; e osservando inoltre che le equazioni al contorno sono nel caso considerato nel teorema precedente:

$$L = X_z \quad M = Y_z \quad N = Z_z$$

e che fra una funzione qualsiasi $f = f(x, y, z)$ e la funzione $F = f(x, y, -z)$ per $z = 0$ sono soddisfatte le relazioni

$$f = F$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial z}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, \dots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

2. Per venire alle applicazioni che abbiamo di mira introduciamo la notazione $\bar{\alpha} = -\alpha$.

Due sistemi di spostamenti che si trovino nelle condizioni del teorema precedente si potranno rappresentare così

$$(1) \quad \begin{aligned} u_1 &= u(x, y, z) & u_2 &= u(x, y, \bar{z}) \\ v_1 &= v(x, y, z) & v_2 &= v(x, y, \bar{z}) \\ w_1 &= w(x, y, z) & w_2 &= \bar{w}(x, y, \bar{z}). \end{aligned}$$

Noi diremo che queste due terne d'integrali si ottengono l'una dall'altra *per riflessione* sul piano $z = 0$.

Da questi si possono ottenere due nuovi sistemi integrali ponendo

$$(2) \quad \begin{aligned} u' &= u_1 - u_2 & u'' &= u_1 + u_2 \\ v' &= v_1 - v_2 & v'' &= v_1 + v_2 \\ w' &= w_1 - w_2 & w'' &= w_1 + w_2 \end{aligned}$$

Indichiamo con L, M, N, L'', M'', N'' le componenti delle forze superficiali corrispondenti a questi due sistemi. Avremo allora, pel teorema dimostrato, che sul piano $z = 0$ sono soddisfatte le seguenti condizioni

$$(3) \quad \begin{aligned} u' &= 0 & v' &= 0 & N' &= 0 \\ L'' &= 0 & M'' &= 0 & w'' &= 0 \end{aligned}$$

Data dunque una terna integrale qualsiasi possiamo subito dedurne due altre, le quali soddisfano alle condizioni che sul piano $z = 0$ sono nulle le due componenti tangenziali dello spostamento e la componente normale della pressione

superficiale, o viceversa sono nulle le due componenti tangenziali della pressione e la componente normale degli spostamenti.

Supponiamo ora dapprima che si tratti di un corpo isotropo nel quale α , β siano le velocità di propagazione delle onde piane e prendiamo per u , v , w gli spostamenti

$$\begin{aligned} u &= (\beta^2 - \alpha^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2\alpha^2}{r} \\ (4) \quad v &= (\beta^2 - \alpha^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ w &= (\beta^2 - \alpha^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

ove

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

i quali godono la proprietà di soddisfare alle equazioni d'equilibrio e di ammettere un punto d'infinito isolato in (a, b, c) , essendo funzioni omogenee di grado -1 , delle differenze $x-a$, $y-b$, $z-c$. Questi integrali hanno rispetto alle equazioni dell'isotropia proprietà analoghe a quelle dell'integrale $\frac{1}{r}$ rispetto all'equazione di Laplace.

Se ora formiamo mediante le (1) (2) i sistemi integrali (u', v', w') , (u'', v'', w'') è chiaro che queste funzioni nello spazio occupato dal corpo (che possiamo supporre sia lo spazio $z > 0$) hanno una sola singolarità identica a quella delle funzioni (4). Difatti i due punti d'infinito che essi possiedono sono simmetrici rispetto al piano $z = 0$.

Ciò posto, supponiamo che sulla superficie $z = 0$ del corpo dato (che indicheremo con s) siano applicate delle forze L , M , N e indichiamo con u , v , w le componenti degli spostamenti prodotti; e applichiamo il teorema di Betti alle due terne integrali

$$\begin{array}{ccc} u & v & w \\ L & M & N \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} u' & v' & w' \\ L' & M' & N' \end{array}$$

e alle altre due terne

$$\begin{array}{ccc} u & v & w \\ L & M & N \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} u'' & v'' & w'' \\ L' & M' & N'. \end{array}$$

Dovremo escludere dal campo $z \geq 0$ il punto di singolarità (a, b, c) , ad es. mediante una piccola sfera σ avente il centro in esso. Applicando poi un ben noto procedimento di passaggio al limite, e tenendo conto delle (3) si trova rispettivamente nei due casi

$$\begin{aligned} 8 \pi \alpha^2 \beta^2 U &= \int_s (u L' + v M') ds - \int_s w' N ds \\ (5) \qquad 8 \pi \alpha^2 \beta^2 U &= \int_s N'' w ds - \int_s (L u'' + M v'') ds \end{aligned}$$

dove U rappresenta il valore della funzione $u(x, y, z)$ nel punto (a, b, c) .

Queste due formole, insieme alle altre analoghe si possono stabilire partendo, anzichè dagli integrali (4), dagli altri due sistemi analoghi che se ne deducono per sostituzioni circolari, danno chiaramente la soluzione del *problema della deformazione di un mezzo isotropo limitato da un piano, quando alla superficie sono note: 1° le componenti tangenziali degli spostamenti e la componente normale delle pressioni esterne, oppure: 2° la componente normale degli spostamenti e le componenti tangenziali delle pressioni esterne.*

Questi problemi furono risolti per la prima volta da Boussinesq (*Comptes rendus*, T. CVI, 1888), con procedimento assai diverso dal precedente.

Il procedimento nostro ha il vantaggio che può essere esteso immediatamente al caso in cui il corpo anzichè essere isotropo, è cristallizzato in modo che siano piani di simmetria elastica i piani paralleli al piano limitante. Difatti basta in questo caso sostituire agli integrali (4) gli integrali aventi proprietà analoghe rispetto al punto di singolarità per le equazioni d'equilibrio corrispondenti. L'esistenza di integrali di

tal fatta fu dimostrata recentemente dal Sig. I. Fredholm in un lavoro pubblicato nel t. 23, 1900, degli *Acta mathematica*.

Si ottengono così per la risoluzione di questo problema, assai più generale, formole analoghe alle (5), nelle quali però si hanno nei primi membri, invece di una sola delle componenti di spostamento, delle funzioni lineari di tutte e tre.

3. Gli integrali definiti dalle (1) costituiscono il *gruppo* più semplice possibile di integrali delle equazioni d'equilibrio quando si convenga di chiamare *gruppo di integrali* l'insieme delle terne integrali che si possono dedurre da una data mediante riflessioni sopra un certo sistema di piani. Esso è composto di due terne integrali.

Il caso che segue immediatamente a questo si ha considerando due piani di simmetria ortogonali. Supponendo che questi piani siano i piani $x=0$, $y=0$, il gruppo delle quattro terne integrali corrispondenti è dato dalle formole:

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \begin{aligned} u_1 &= u(x, y, z) & u_2 &= \overline{u}(x, y, z) \\ v_1 &= v(x, y, z) & v_2 &= v(\overline{x}, y, z) \\ w_1 &= w(x, y, z) & w_2 &= w(x, y, z) \end{aligned} \\
 & \begin{aligned} u_3 &= \overline{u}(\overline{x}, \overline{y}, z) & u_4 &= u(x, \overline{y}, z) \\ v_3 &= \overline{v}(\overline{x}, \overline{y}, z) & v_4 &= \overline{v}(x, \overline{y}, z) \\ w_3 &= w(x, y, z) & w_4 &= w(x, \overline{y}, z) . \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Mediante queste quattro terne di integrali noi possiamo risolvere problemi di deformazione di un solido elastico limitato da due piani ortogonali. Per vedere poi le condizioni alla superficie che converrà supporre note, stabiliamo dapprima mediante il teorema dimostrato al n. 1, le relazioni che sui piani $x=0$, $y=0$ sono soddisfatte dalle (6). Queste sono

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \begin{aligned} u_1 &= \overline{u_2} & u_3 &= \overline{u_4} & L_1 &= L_2 & L_3 &= L_4 \\ v_1 &= v_2 & v_3 &= v_4 & M_1 &= \overline{M_2} & M_3 &= \overline{M_4} \\ w_1 &= w_2 & w_3 &= w_4 & N_1 &= \overline{N_2} & N_3 &= \overline{N_4} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

per $y = 0$

$$(7') \quad \begin{array}{llll} u_2 = u_3 & u_1 = u_4 & L_2 = \overline{L}_3 & L_1 = \overline{L}_4 \\ v_2 = \overline{v}_3 & v_1 = \overline{v}_4 & M_2 = M_3 & M_1 = M_4 \\ w_2 = w_3 & w_1 = w_4 & N_2 = \overline{N}_3 & N_1 = \overline{N}_4. \end{array}$$

Di qui segue che se si costruiscono gli integrali

$$\begin{aligned} u' &= u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \\ v' &= v_1 - v_2 + v_3 - v_4 \\ w' &= w_1 - w_2 + w_3 - w_4 \end{aligned}$$

per questi si avrà

sul piano $x = 0$

$$L' = 0 \quad v' = 0 \quad w' = 0$$

sul piano $y = 0$

$$u' = 0 \quad M' = 0 \quad w' = 0.$$

L'applicazione del teorema di Betti, quando per u , v , w si prendano integrali aventi un punto d'infinito isolato di 1° ordine, porta alla risoluzione del problema della deformazione di un diedro solido isotropo o cristallizzato in modo che siano piani di simmetria quelli paralleli alle faccie, quando sopra di queste sono date le componenti analoghe a quelle che si annullano per le u' , v' , w' , cioè, come facilmente si vede, su tutta la superficie del diedro la *componente normale delle pressioni esterne*, e le *componenti tangenziali degli spostamenti*.

Il problema, che possiamo dire correlativo, quando cioè sulla superficie del diedro sono date le *componenti tangenziali delle forze esterne* e la *componente normale degli spostamenti* si risolve prendendo come spostamenti ausiliari i seguenti

$$\begin{aligned} u'' &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ v'' &= v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \\ w'' &= w_1 + w_2 + w_3 + w_4. \end{aligned}$$

Dalle (7) (7') si ha infatti in questo caso sul piano $x = 0$

$$u'' = 0 \quad M'' = 0 \quad N'' = 0$$

sul piano $y = 0$

$$L' = 0 \quad v' = 0 \quad N' = 0.$$

In questo caso del diedro abbiamo poi un altro problema della natura di quelli che consideriamo che non ha riscontro nel caso di un solido limitato da un piano solo. Quando cioè sopra una delle faccie si conoscono le componenti tangenziali degli spostamenti e la normale delle forze e sull'altra reciprocamente le componenti tangenziali delle forze e la componente normale degli spostamenti.

Anche questo problema può essere risolto col metodo d'integrazione proposto in questa Nota. Allorchè la faccia su cui sono note le componenti tangenziali degli spostamenti è il piano $x = 0$, basta prendere come integrali ausiliari

$$u''' = u_1 - u_2 - u_3 + u_4$$

$$v''' = v_1 - v_2 - v_3 + v_4$$

$$w''' = w_1 - w_2 - w_3 + w_4.$$

Quando invece questi elementi sono dati sulla faccia $y = 0$, convien prendere come integrali ausiliari

$$u^{IV} = u_1 + u_2 - u_3 - u_4$$

$$v^{IV} = v_1 + v_2 - v_3 - v_4$$

$$w^{IV} = w_1 + w_2 - w_3 - w_4.$$

4. Questi risultati sono sufficienti a dare un'idea della portata del metodo d'integrazione proposto. Accennerò quindi soltanto ai problemi analoghi relativi al triedro trirettangolo di cui parimenti può immediatamente assegnarsi la soluzione.

Essi sono quattro:

1° Quando su tutta la superficie del diedro sono date le componenti tangenziali degli spostamenti e la componente normale delle forze esterne.

2° Quando su tutta la superficie del triedro sono date le componenti tangenziali delle forze esterne e la normale degli spostamenti.

3° Quando su due faccie del triedro sono date le componenti tangenziali degli spostamenti e la normale delle forze e sulla terza faccia gli elementi reciproci.

4° Quando su due faccie del triedro sono date le componenti tangenziali delle forze esterne e la normale degli spostamenti, mentre sulla terza faccia sono dati gli elementi reciproci.

Questi problemi si risolvono costruendo dal gruppo degli integrali (6) il gruppo delle quattro terne che se ne deducono con una riflessione sul piano $z=0$. Si ottiene così un gruppo complessivamente composto di otto terne di integrali, i quali opportunamente combinati per somma e sottrazione, secondo i criteri che risultano dal teorema fondamentale dimostrato, danno gli integrali ausiliari richiesti.

ROTAZIONI ELETTROSTATICHE.

Studio sperimentale del Prof. G. VICENTINI ¹⁾.

Nel 1896 G. Quinke ²⁾ pubblicò una serie di interessantissime osservazioni sulle rotazioni in un campo elettrostatico costante. Esse si ottengono col far pendere piccole aste, lamine, sfere o cilindri di sostanze isolanti fra le armature di un condensatore carico, in seno ad un liquido coibente. Dai risultati ottenuti in condizioni svariatissime di esperienza il Quinke fu condotto ad ammettere che le forze producenti tali moti agiscono alla superficie del corpo mobile; e dopo avere studiato il comportamento delle bolle d'aria e notato il fatto della graduale scomparsa della attitudine dei corpi a ruotare, allorquando restano a lungo in seno al dielettrico liquido, gli parve dover concludere che condizione necessaria

1) Esteso sunto della Nota pubblicata dal R. Istituto Veneto, Vol. 61, pp. 221-245.

2) G. Quinke. Ueber Rotationen im constanten elektrischen Felde. Wiedemann's Annalen, vol. 59, pag. 417, 1896.