Über die säkularen Veränderungen der großen Achsen der Bahnen der Planeten der Jupitergruppe. Von *A. Wilkens*.

Der Satz von *Laplace* über die säkulare Unveränderlichkeit der großen Achsen der Planetenbahnen verliert im allgemeinen seine Gültigkeit, wenn eine Kommensurabilität der mittleren Bewegungen des störenden und gestörten Körpers vorliegt. Diese Bedingung ist notwendig, wenn auch nicht hinreichend, da nach den Theoremen *Poincarés* im Falle kommensurabler oder genähert kommensurabler Bahnen strengperiodische Lösungen mit rein kurzperiodischer Änderung der großen Achsen möglich sind. Erweisen sich aber die den periodischen Lösungen benachbarten Bahnen als instabil, so können bei den großen Achsen dieser Bahnen säkulare Veränderungen und hiermit parallel eine Säkulareschleunigung der mittleren Länge eintreten. Dieser Fall tritt bemerkenswerterweise vielleicht bei den Planeten der Jupitergruppe in der Nähe der *Lagrangeschen* Dreieckspunkte ein, wenn auch in 1. Näherung unter Berücksichtigung der Glieder niedrigsten Grades der Entwicklung der Störungsfunktion eine periodische Lösung von 150-jähriger Librationsperiode um die *Lagrangeschen* Dreieckspunkte beschrieben wird. Durch die nächstfolgenden Glieder der Entwicklung wird die Libration aber wieder zerstört; das Problem ist ganz analog dem *Laplaceschen* Problem der Frage der Unveränderlichkeit der großen Achsen bei den allgemeinen Planetenfällen, wo bei der Entwicklung nach den Massen die säkulare Unveränderlichkeit der Achsen nach *Laplace* für die 1. Potenz der Massen und nach *Poisson* für die 2. Potenz garantiert ist, während in bezug auf die 3. und höhere Potenzen bisher kein sicheres Resultat erzielt werden konnte. Bei den Planeten der Jupitergruppe tritt anstelle der Masse als Entwicklungsgröße ein anderer Parameter, die Abweichung von der strengen *Lagrangeschen* Lösung.

Die Grundlage für die vorliegende Untersuchung bildet meine Abhandlung: Untersuchungen zu einer Störungstheorie der Planeten der Jupitergruppe, Sitzungsber. d. Heidelberger

Akad. der Wiss., Jahrg. 1918, 16. Abh. Ich habe daselbst die Integration der Differentialgleichungen, unter besonderer Bevorzugung der mittleren Länge als dem stärkstgestörten Element, unter Zugrundelegung der periodischen Lösung 150-jähriger Periode als 1. Näherung behandelt; auch die Säkulärstörungen, außer für die große Achse, wurden unter Berücksichtigung der Glieder bis zum einschließlich 2. Grade der Entwicklungsparameter der Störungsfunktion abgeleitet, wobei aber die große Achse bis zu den Gliedern 1. Grades säkular unveränderlich bleibt, während bei Mitnahme der Glieder vom 2. Grade an ein Auftreten von Säkulärstörungen der Achse hervorgerufen wird, wie nun gezeigt werden soll.

§ 1. Die Ableitung der Säkularteile. In meiner oben zitierten Arbeit ist die Störungsfunktion Ω bis zu den Termen 4. Grades einer Reihe kleiner Parameter, die durch die Lage der Trojaner zu den *Lagrangeschen* Dreieckspunkten und durch die Exzentrizitäten und Neigungen bedingt sind, entwickelt worden. Fixiert a die halbe große Achse, l die mittlere Länge, t die Zeit und k die *Gaußsche* Konstante, so ist die Differentialgleichung für a :

$$d(k\sqrt{a})/dt = \partial\Omega/\partial l \quad (1)$$

wo a' Ω (a' = Halbachse der Jupiterbahn) durch die oben zitierte Arbeit als Potenzreihe nach $a_1 = a/a' - 1$, $\chi = 1/2 e$, $\chi' = 1/2 e'$, $\eta = \sin 1/2 \mathcal{J}$ gegeben ist, wobei e und e' die Exzentrizitäten des Trojaners resp. des Jupiter und $\mathcal{J}$ die gegenseitige Neigung ihrer Bahnen bezeichnet; unser Ziel ist dann, aus $\partial\Omega/\partial l$ die säkularen, d. h. rein konstanten Terme mit Rücksicht auf die in 1. Näherung bestehende periodische Lösung herauszuschälen, was erst durch eine Reihe umfangreicher Transformationen möglich ist.

Bis zu den Gliedern 4. Grades einschließlich lautet die Störungsfunktion:

$$\begin{aligned} a' \Omega = & k^2 m' \left[-\frac{1}{2} a' r^2 r'^3 + \frac{3}{8} a' q^2 + \frac{3}{2} a' R^2 - \frac{3}{2} a' q R + \frac{3}{4} \sqrt{3} a' q \sin K \right. \\ & - \frac{3}{2} \sqrt{3} a' R \sin K + \frac{9}{8} a' \sin^2 K + \frac{7}{16} a' q^3 - \frac{9}{8} a' q^2 R - \frac{3}{4} a' q R^2 + \frac{5}{2} a' R^3 \\ & + \frac{9}{16} \sqrt{3} a' q^2 \sin K + \frac{3}{4} \sqrt{3} a' q R \sin K - \frac{15}{4} \sqrt{3} a' R^2 \sin K - \frac{9}{16} a' q \sin^2 K + \frac{3}{2} a' q \sin^2 \frac{1}{2} K \\ & + \frac{45}{8} a' R \sin^2 K - 3 a' R \sin^2 \frac{1}{2} K + \frac{3}{2} \sqrt{3} a' \sin K \sin^2 \frac{1}{2} K - \frac{15}{16} \sqrt{3} a' \sin^3 K - \frac{31}{128} a' q^4 \\ & + \frac{31}{16} a' q^3 R - \frac{51}{16} a' q^2 R^2 - \frac{3}{4} a' q R^3 + \frac{35}{8} a' R^4 - \frac{31}{32} \sqrt{3} a' q^3 \sin K + \frac{51}{16} \sqrt{3} a' q^2 R \sin K \\ & + \frac{15}{8} \sqrt{3} a' q R^2 \sin K - \frac{35}{4} \sqrt{3} a' R^3 \sin K - \frac{153}{64} a' q^2 \sin^2 K + \frac{9}{8} a' q^2 \sin^2 \frac{1}{2} K - \frac{45}{16} a' q R \sin^2 K \\ & + \frac{3}{2} a' q R \sin^2 \frac{1}{2} K + \frac{315}{16} a' R^2 \sin^2 K - \frac{15}{2} a' R^2 \sin^2 \frac{1}{2} K + \frac{15}{32} \sqrt{3} a' q \sin^3 K - \frac{3}{4} \sqrt{3} a' q \sin K \sin^2 \frac{1}{2} K \\ & - \frac{105}{16} \sqrt{3} a' R \sin^3 K + \frac{15}{2} \sqrt{3} a' R \sin K \sin^2 \frac{1}{2} K + \frac{3}{2} a' \sin^4 \frac{1}{2} K - \frac{45}{8} a' \sin^2 K \sin^2 \frac{1}{2} K \\ & \left. + \frac{315}{128} a' \sin^4 K \right] \quad (2) \end{aligned}$$

wo r und r' die heliozentrischen Entfernungen des Trojaners und des Jupiter, $a' = a/r'$, $q = r/r' - 1$ und $R = \cos V - \cos(l - l' + r' - r)$ wenn V den heliozentrischen Winkel zwischen Jupiter und dem Trojaner, ferner l und l' die mittleren Längen des Trojaners und des Jupiter und endlich r und r' die Längen in der Bahn des gemeinsamen Schnittpunktes der Bahnebenen

der beiden Planeten bedeuten. Für $a' r^2 r'^{-3}$ habe ich, ebenso wie für $a' q^2$, $a' R^2$ etc. die entsprechenden Potenzreihen nach den genannten Parametern in extenso bis zu den Termen 4. Grades einschließlich gegeben, sodaß die Differentialquotienten nach l unmittelbar gebildet werden können. Zwecks Herausziehung derjenigen Glieder, die nach der Differentiation nach l zur Erzeugung säkularer Glieder führen, sind aber nur

diejenigen Glieder der Reihen zu berücksichtigen, die als Argument der trigonometrischen Funktionen die Längendifferenz $\lambda - l'$ der beiden Planeten resp. deren Vielfaches enthalten, da diese kritische Differenz $\lambda - l' = K = K_1 \sin P$ langperiodisch mit der Periode von 150 Jahren ist und deshalb bei der dann erfolgenden Potenzentwicklung nach K_1 , sobald nach der Differentiation nach l die Substitution der

genannten periodischen Lösung $\lambda - l' = K_1 \sin P$ erfolgt ist, zu säkularen Gliedern führen kann. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von M und M' als mittlere Anomalien des Trojaners und des Jupiter erhält man zunächst für die Ableitungen nach l bis zu den Termen 4. Grades der genannten Parameter die folgenden den sukzessiven Gliedern in $\alpha' \Omega$ entsprechenden Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} \partial(-\frac{1}{2}\alpha' r^2 r'^3)/\partial l &= -\frac{1}{2}(1+a_1)^2 \{12\chi\chi' \sin(M-M') - 6\chi^3\chi' \sin(M-M') + 54\chi\chi'^3 \sin(M-M') \\ &\quad + 36\chi^2\chi'^2 \sin(2M-2M')\} \\ \partial(\frac{3}{8}\alpha' q^2)/\partial l &= \frac{3}{8}[(4\chi\chi' + 16\chi\chi' a_1 + 42\chi\chi'^3 + 6\chi^3\chi' + 12\chi\chi' a_1^2) \sin(M-M') - 4\chi^2\chi'^2 \sin(2M-2M')] \\ \partial(\frac{3}{2}\alpha' R^2)/\partial l &= \frac{3}{2}[8\chi^2 \sin(2\lambda-2l') + 8\chi\chi' \sin(\lambda-l'-\omega+\omega') - 12\chi\chi' \sin(3\lambda-3l'-\omega+\omega') \\ &\quad + 4\chi\chi' \sin(-\lambda+l'-\omega+\omega') + 8\chi'^2 \sin(2\lambda-2l') - \frac{103}{2}\chi^4 \sin(2\lambda-2l') \\ &\quad - 30\chi^3\chi' \sin(\lambda-l'-\omega+\omega') + 31\chi^3\chi' \sin(\lambda-l'+\omega-\omega') + 285\chi^3\chi' \sin(3\lambda-3l'-\omega+\omega') \\ &\quad - 301\chi^2\chi'^2 \sin(4\lambda-4l'-2\omega+2\omega') - 224\chi^2\chi'^2 \sin(2\lambda-2l') + 77\chi^2\chi'^2 \sin(2\lambda-2l'-2\omega+2\omega') \\ &\quad + 279\chi\chi'^3 \sin(3\lambda-3l'-\omega+\omega') - 26\chi\chi'^3 \sin(\lambda-l'-\omega+\omega') + 29\chi\chi'^3 \sin(\lambda-l'+\omega-\omega') \\ &\quad - \frac{95}{2}\chi^4 \sin(2\lambda-2l') - \chi^2\eta^2 \sin(2\lambda-2l'-2\omega+2\tau') - 24\chi^2\eta^2 \sin(2\lambda-2l') \\ &\quad + 2\chi\chi'\eta^2 \sin(\lambda-l'-\omega-\omega'+2\tau') - 8\chi\chi'\eta^2 \sin(\lambda-l'-\omega+\omega') + 42\chi\chi'\eta^2 \sin(3\lambda-3l'-\omega+\omega') \\ &\quad + 6\chi\chi'\eta^2 \sin(\lambda-l'+\omega+\omega'-2\tau') + 10\chi\chi'\eta^2 \sin(\lambda-l'+\omega-\omega') - 24\chi'^2\eta^2 \sin(2\lambda-2l') \\ &\quad - 5\chi'^2\eta^2 \sin(2\lambda-2l'+2\omega'-2\tau') - \eta^4 \sin(2\lambda-2l')] \quad (3) \\ \partial(-\frac{3}{2}\alpha' q R)/\partial l &= -\frac{3}{2}[4\chi^2 a_1 \sin(\lambda-l') + 4\chi'^2 a_1 \sin(\lambda-l') + 12\chi\chi' a_1 \sin(-2\lambda+2l'+\omega-\omega') + \eta^2 a_1 \sin(\lambda-l') \\ &\quad + 12\chi^4 \sin(\lambda-l') + 40\chi^3\chi' \sin(-2\lambda+2l'+\omega-\omega') + 24\chi^2\chi'^3 \sin(3\lambda-3l'-2\omega+2\omega') \\ &\quad - 10\chi^2\chi'^2 \sin(\lambda-l'-2\omega+2\omega') - 28\chi\chi'^3 \sin(2\lambda-2l'-\omega+\omega') + 6\chi'^4 \sin(\lambda-l') \\ &\quad + \chi^2\eta^2 \sin(-\lambda+l'+2\omega-2\tau') + 2\chi'^2\eta^2 \sin(\lambda-l') - 4\chi\chi'\eta^2 \sin(2\lambda-2l'-\omega+\omega') \\ &\quad - \chi'^2\eta^2 \sin(\lambda-l'+2\omega'-2\tau')]. \end{aligned}$$

Bei der Bildung der Ableitungen des folgenden Termes: $\partial(\frac{3}{4}\sqrt{3} \cdot \alpha' q \sin K)/\partial l$ ist, wie auch bei den späteren ähnlich zusammengesetzten Ausdrücken, zu beachten, daß $\lambda - l' = \pm(60^\circ + K)$, wo das obere resp. untere Vorzeichen zu verwenden ist, je nachdem $\lambda \geq l'$, d. h. je nachdem der Trojaner sich in der Nähe des dem Jupiter in Länge folgenden oder vorangehenden Librationspunktes befindet; dann ist also $dK/dl = \pm 1$ zu substituieren, sodaß

$$\begin{aligned} \partial(\frac{3}{4}\sqrt{3} \cdot \alpha' q \sin K)/\partial l &= \frac{3}{4}\sqrt{3} [\pm \alpha' q \cos K + \sin K \partial(\alpha' q)/\partial l] = \frac{3}{4}\sqrt{3} \{ \pm \cos K [a_1 + 2\chi^2 + 2\chi'^2 + 2\chi^2 a_1 \\ &\quad + 2\chi'^2 a_1 + 4\chi^2\chi'^2 + 6\chi'^4 + \cos(M-M') \{ -4\chi\chi' - 4\chi\chi' a_1 + 6\chi^3\chi' - 6\chi\chi'^3 \} \\ &\quad - 10\chi^2\chi'^2 \cos(2M-2M')] + \sin K [\sin(M-M') \{ +4\chi\chi' + 4\chi\chi' a_1 \}] \} \end{aligned}$$

wobei in dem Faktor von $\sin K$ die Terme 4. Grades fortgelassen sind, weil $\sin K$ selbst vom 1. Grade klein ist; dieselbe Bemerkung gilt generell für die folgenden Ausdrücke der Ableitungen. Weiter findet man

$$\begin{aligned} \partial(-\frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \alpha' R \sin K)/\partial l &= -\frac{3}{2}\sqrt{3} [\pm \cos K \{ -4\chi^2 \cos(\lambda-l') + 2\chi\chi' \cos(\omega-\omega') + 5\chi^3\chi' \cos(\omega-\omega') - 3\chi\chi'^3 \cos(\omega-\omega') \\ &\quad + 2\chi\chi'\eta^2 \cos(\omega+\omega'-2\tau') - 2\chi\chi'\eta^2 \cos(\omega-\omega') + 6\chi\chi' \cos(2\lambda-2l'-\omega+\omega') - 4\chi'^2 \cos(\lambda-l') \\ &\quad - \eta^2 \cos(\lambda-l') + \frac{7}{4}\chi^4 \cos(\lambda-l') - 25\chi^3\chi' \cos(2\lambda-2l'-\omega+\omega') + \frac{1}{4}\chi^2\chi'^2 \cos(\lambda-l'-2\omega+2\omega') \\ &\quad + \frac{153}{4}\chi^2\chi'^2 \cos(3\lambda-3l'-2\omega+2\omega') + 16\chi^2\chi'^2 \cos(\lambda-l') - 33\chi\chi'^3 \cos(2\lambda-2l'-\omega+\omega') \\ &\quad - \frac{1}{4}\chi'^4 \cos(\lambda-l') - \frac{1}{2}\chi^2\eta^2 \cos(\lambda-l'-2\omega+2\tau') + 4\chi^2\eta^2 \cos(\lambda-l') \\ &\quad - 6\chi\chi'\eta^2 \cos(2\lambda-2l'-\omega+\omega') - \frac{1}{2}\chi'^2\eta^2 \cos(\lambda-l'+2\omega'-2\tau') + 4\chi'^2\eta^2 \cos(\lambda-l') \} \\ &\quad + \sin K \{ +4\chi^2 \sin(\lambda-l') - 12\chi\chi' \sin(2\lambda-2l'-\omega+\omega') + 4\chi'^2 \sin(\lambda-l') + \eta^2 \sin(\lambda-l') \\ &\quad - \frac{7}{4}\chi^4 \sin(\lambda-l') + 50\chi^3\chi' \sin(2\lambda-2l'-\omega+\omega') - \frac{1}{4}\chi^2\chi'^2 \sin(\lambda-l'-2\omega+2\omega') \\ &\quad - \frac{459}{4}\chi^2\chi'^2 \sin(3\lambda-3l'-2\omega+2\omega') - 16\chi^2\chi'^2 \sin(\lambda-l') + 66\chi\chi'^3 \sin(2\lambda-2l'-\omega+\omega') \\ &\quad + \frac{1}{4}\chi'^4 \sin(\lambda-l') + \frac{1}{2}\chi^2\eta^2 \sin(\lambda-l'-2\omega+2\tau') - 4\chi^2\eta^2 \sin(\lambda-l') \\ &\quad + 12\chi\chi'\eta^2 \sin(2\lambda-2l'-\omega+\omega') + \frac{1}{2}\chi'^2\eta^2 \sin(\lambda-l'+2\omega'-2\tau') - 4\chi'^2\eta^2 \sin(\lambda-l') \}]. \end{aligned}$$

Der folgende Term der Störungsfunktion: $\frac{9}{8}\alpha' \sin^2 K$ gibt bei Differentiation nach l den Hauptterm für die Integration von K im Sinne der periodischen Lösung $K = K_1 \sin P$ (s. meine oben zitierte Schrift pag. 35); auch bei Mitnahme resp. Entwicklung der höheren Potenzen von K führt dieser Term nur zu periodischen Gliedern der 150-jährigen Periode der Grundlösung. Weiter ergibt sich:

$$\begin{aligned} \partial(\frac{7}{16}\alpha' q^3)/\partial l &= \frac{7}{16}[(36\chi\chi' a_1^2 + 36\chi^3\chi' + 60\chi\chi'^3) \sin(M-M') - 48\chi^2\chi'^2 \sin(2M-2M')] \\ \partial(-\frac{9}{8}\alpha' q^2 R)/\partial l &= -\frac{9}{8}[+4\chi^2 a_1^2 \sin(\lambda-l') - 12\chi\chi' a_1^2 \sin(2\lambda-2l'-\omega+\omega') + 4\chi'^2 a_1^2 \sin(\lambda-l') \\ &\quad + 1 \cdot \eta^2 a_1^2 \sin(\lambda-l') + 4\chi^4 \sin(\lambda-l') - 34\chi^3\chi' \sin(2\lambda-2l'-\omega+\omega') \\ &\quad + 39\chi^2\chi'^2 \sin(3\lambda-3l'-2\omega+2\omega') - 5\chi^2\chi'^2 \sin(\lambda-l'-2\omega+2\omega') + 16\chi^2\chi'^2 \sin(\lambda-l') \\ &\quad - 34\chi\chi'^3 \sin(2\lambda-2l'-\omega+\omega') + 4\chi'^4 \sin(\lambda-l') - \chi^2\eta^2 \sin(\lambda-l'-2\omega+2\tau') + 2\chi^2\eta^2 \sin(\lambda-l') \\ &\quad - 4\chi\chi'\eta^2 \sin(2\lambda-2l'-\omega+\omega') - \chi'^2\eta^2 \sin(\lambda-l'+2\omega'-2\tau') + 2\chi'^2\eta^2 \sin(\lambda-l')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(-\frac{3}{4}\alpha' \varrho R^2)/\partial l = & -\frac{3}{4}[8\chi^2 a_1 \sin(2\lambda-2l') - 12\chi\chi' a_1 \sin(3\lambda-3l'-\omega+\varpi') + 8\chi\chi' a_1 \sin(\lambda-l'-\omega+\varpi') \\ & - 4\chi\chi' a_1 \sin(\lambda-l'+\omega-\varpi') + 8\chi'^2 a_1 \sin(2\lambda-2l') + 12\chi'^4 \sin(2\lambda-2l') \\ & - 30\chi^3\chi' \sin(3\lambda-3l'-\omega+\varpi') - 10\chi^3\chi' \sin(\lambda-l'+\omega-\varpi') + 20\chi^3\chi' \sin(\lambda-l'-\omega+\varpi') \\ & - 24\chi^2\chi'^2 \sin(2\lambda-2l'-2\omega+2\varpi') + 32\chi^2\chi'^2 \sin(2\lambda-2l') + 24\chi^2\chi'^2 \sin(4\lambda-4l'-2\omega+2\varpi') \\ & - 10\chi\chi'^3 \sin(\lambda-l'+\omega-\varpi') + 20\chi\chi'^3 \sin(\lambda-l'-\omega+\varpi') - 30\chi\chi'^3 \sin(3\lambda-3l'-\omega+\varpi') \\ & + 12\chi'^4 \sin(2\lambda-2l') + 4\chi^3\eta^2 \sin(2\lambda-2l'-2\omega+2\varpi') - 4\chi\chi'\eta^2 \sin(\lambda-l'-\omega-\varpi'+2\varpi') \\ & + 4\chi\chi'\eta^2 \sin(\lambda-l'+\omega+\varpi'-2\varpi') - 4\chi'^2\eta^2 \sin(2\lambda-2l'+2\varpi'-2\varpi')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(\frac{5}{2}\alpha' R^3)/\partial l = & \frac{5}{2}[+36\chi^4 \sin(\lambda-l') - 108\chi^4 \sin(3\lambda-3l') + 372\chi^3\chi' \sin(4\lambda-4l'-\omega+\varpi') \\ & + 270\chi^3\chi' \sin(2\lambda-2l'-\omega+\varpi') + 102\chi^3\chi' \sin(2\lambda-2l'+\omega-\varpi') + 144\chi^2\chi'^2 \sin(\lambda-l') \\ & + 2097\chi^2\chi'^2 \sin(3\lambda-3l'-2\omega+2\varpi') - 285\chi^2\chi'^2 \sin(5\lambda-5l'-2\omega+2\varpi') \\ & - 432\chi^2\chi'^2 \sin(3\lambda-3l') - 27\chi^2\chi'^2 \sin(\lambda-l'-2\omega+2\varpi') - 15\chi^2\chi'^2 \sin(\lambda-l'+2\omega-2\varpi') \\ & - 270\chi\chi'^3 \sin(2\lambda-2l'-\omega+\varpi') + 372\chi\chi'^3 \sin(4\lambda-4l'-\omega+\varpi') + 102\chi\chi'^3 \sin(2\lambda-2l'+\omega-\varpi') \\ & + 36\chi'^4 \sin(\lambda-l') - 108\chi'^4 \sin(3\lambda-3l') - 9\chi^2\eta^2 \sin(3\lambda-3l'-2\omega+2\varpi') \\ & + 6\chi^2\eta^2 \sin(\lambda-l') + 6\chi^2\eta^2 \sin(\lambda-l'-2\omega+2\varpi') - 18\chi^2\eta^2 \sin(3\lambda-3l') \\ & - 3\chi^2\eta^2 \sin(\lambda-l'+2\omega-2\varpi') - 12\chi\chi'\eta^2 \sin(2\lambda-2l'-\omega+\varpi') + 12\chi\chi'\eta^2 \sin(2\lambda-2l'+\omega-\varpi') \\ & + 24\chi\chi'\eta^2 \sin(4\lambda-4l'-\omega+\varpi') + 12\chi\chi'\eta^2 \sin(2\lambda-2l'+\omega+\varpi'-2\varpi') \\ & + 12\chi\chi'\eta^2 \sin(2\lambda-2l'-\omega-\varpi'+2\varpi') - 9\chi'^2\eta^2 \sin(3\lambda-3l'+2\varpi'-2\varpi') + 6\chi'^2\eta^2 \sin(\lambda-l') \\ & + 6\chi'^2\eta^2 \sin(\lambda-l'+2\varpi'-2\varpi') - 18\chi'^2\eta^2 \sin(3\lambda-3l') - 3\chi'^2\eta^2 \sin(\lambda-l'-2\varpi'+2\varpi')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(\frac{9}{16}V_3 \cdot \alpha' \varrho^2 \sin K)/\partial l = & \frac{9}{16}V_3 [\pm \cos K \{a_1^2 + 2\chi^2 + 2\chi'^2 + 8\chi^2 a_1 + 8\chi'^2 a_1 + 28\chi^2\chi'^2 + 18\chi'^4 + 6\chi^2 a_1^2 + 6\chi'^2 a_1^2 \\ & + \cos(M-M')(-4\chi\chi' - 16\chi\chi' a_1 - 42\chi\chi'^3 - 6\chi^3\chi' - 12\chi\chi' a_1^2) + 2\chi^2\chi'^2 \cos(2M-2M')\} \\ & + \sin K \{\sin(M-M')(4\chi\chi' + 16\chi\chi' a_1)\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(\frac{3}{4}V_3 \cdot \alpha' \varrho R \sin K)/\partial l = & \frac{3}{4}V_3 [\pm \cos K \{+2\chi\chi' a_1 \cos(\omega-\varpi') + 2\chi^3\chi' \cos(\omega-\varpi') - 4\chi\chi'^3 \cos(\omega-\varpi') \\ & - 4\chi^2 a_1 \cos(\lambda-l') - 4\chi'^2 a_1 \cos(\lambda-l') + 6\chi\chi' a_1 \cos(-2\lambda+2l'+\omega-\varpi') - \eta^2 a_1 \cos(\lambda-l') \\ & - 12\chi^4 \cos(\lambda-l') + 20\chi^3\chi' \cos(-2\lambda+2l'+\omega-\varpi') - 8\chi^2\chi'^2 \cos(3\lambda-3l'-2\omega+2\varpi') \\ & + 10\chi^2\chi'^2 \cos(\lambda-l'-2\omega+2\varpi') + 14\chi\chi'^3 \cos(2\lambda-2l'-\omega+\varpi') - 6\chi'^4 \cos(\lambda-l') \\ & + \chi^2\eta^2 \cos(-\lambda+l'+2\omega-2\varpi') - 2\chi^2\eta^2 \cos(\lambda-l') + 2\chi\chi'\eta^2 \cos(2\lambda-2l'-\omega+\varpi') \\ & + \chi'^2\eta^2 \cos(\lambda-l'+2\varpi'-2\varpi')\} + \sin K \{+4\chi^2 a_1 \sin(\lambda-l') + 4\chi'^2 a_1 \sin(\lambda-l') \\ & + 12\chi\chi' a_1 \sin(-2\lambda+2l'+\omega-\varpi') + \eta^2 a_1 \sin(\lambda-l')\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(-\frac{15}{4}V_3 \cdot \alpha' R^2 \sin K)/\partial l = & -\frac{15}{4}V_3 [\pm \cos K \{-4\chi^2 \cos(2\lambda-2l') + 4\chi^2 - 8\chi\chi' \cos(\lambda-l'-\omega+\varpi') \\ & + 4\chi\chi' \cos(3\lambda-3l'-\omega+\varpi') + 4\chi\chi' \cos(-\lambda+l'-\omega+\varpi') - 4\chi'^2 \cos(2\lambda-2l') + 4\chi'^2 \\ & + 103\chi^4 \cos(2\lambda-2l') - 7\chi^4 + 30\chi^3\chi' \cos(\lambda-l'-\omega+\varpi') - 31\chi^3\chi' \cos(\lambda-l'+\omega-\varpi') \\ & - 95\chi^3\chi' \cos(3\lambda-3l'-\omega+\varpi') + 301\chi^2\chi'^2 \cos(4\lambda-4l'-2\omega+2\varpi') + 112\chi^2\chi'^2 \cos(2\lambda-2l') \\ & - 77\chi^2\chi'^2 \cos(2\lambda-2l'-2\omega+2\varpi') + 45\chi^2\chi'^2 \cos(2\omega-2\varpi') - 16\chi^2\chi'^2 \\ & - 93\chi\chi'^3 \cos(3\lambda-3l'-\omega+\varpi') + 26\chi\chi'^3 \cos(\lambda-l'-\omega+\varpi') - 29\chi\chi'^3 \cos(\lambda-l'+\omega-\varpi') \\ & + 95\chi^4 \cos(2\lambda-2l') + 1\chi^4 + 1\chi^2\eta^2 \cos(2\lambda-2l'-2\omega+2\varpi') + 7\chi^2\eta^2 \cos(2\omega-2\varpi') \\ & + 12\chi^2\eta^2 \cos(2\lambda-2l') - 4\chi^2\eta^2 - 2\chi\chi'\eta^2 \cos(\lambda-l'-\omega-\varpi'+2\varpi') \\ & + 8\chi\chi'\eta^2 \cos(\lambda-l'-\omega+\varpi') - 14\chi\chi'\eta^2 \cos(3\lambda-3l'-\omega+\varpi') \\ & - 6\chi\chi'\eta^2 \cos(\lambda-l'+\omega+\varpi'-2\varpi') - 10\chi\chi'\eta^2 \cos(\lambda-l'+\omega-\varpi') + 3\chi'^2\eta^2 \cos(2\varpi'-2\varpi') \\ & + 12\chi'^2\eta^2 \cos(2\lambda-2l') + 5\chi'^2\eta^2 \cos(2\lambda-2l'+2\varpi'-2\varpi') - 4\chi'^2\eta^2 + 1\chi'^4 \cos(2\lambda-2l') + \eta^4\} \\ & + \sin K \{+8\chi^2 \sin(2\lambda-2l') + 8\chi\chi' \sin(\lambda-l'-\omega+\varpi') - 12\chi\chi' \sin(3\lambda-3l'-\omega+\varpi') \\ & + 4\chi\chi' \sin(-\lambda+l'-\omega+\varpi') + 8\chi'^2 \sin(2\lambda-2l')\}] \end{aligned}$$

$$\partial(-\frac{9}{16}\alpha' \varrho \sin^2 K)/\partial l = -\frac{9}{16}[\pm \sin 2K \cos(M-M')(-4\chi\chi' - 4\chi\chi' a_1) + \sin^2 K \sin(M-M') \cdot 4\chi\chi']$$

$$\partial(\frac{3}{2}\alpha' \varrho \sin^2 \frac{1}{2}K)/\partial l = \frac{3}{2}[\pm \frac{1}{2}\sin K \cos(M-M')(-4\chi\chi' - 4\chi\chi' a_1) + \sin^2 \frac{1}{2}K \sin(M-M') \cdot 4\chi\chi']$$

$$\begin{aligned} \partial(\frac{45}{8}\alpha' R \sin^2 K)/\partial l = & \frac{45}{8}[\pm \sin 2K \{-4\chi^2 \cos(\lambda-l') + 6\chi\chi' \cos(2\lambda-2l'-\omega+\varpi') - 4\chi'^2 \cos(\lambda-l') \\ & - \eta^2 \cos(\lambda-l')\} + \sin^2 K \{4\chi^2 \sin(\lambda-l') - 12\chi\chi' \sin(2\lambda-2l'-\omega+\varpi') \\ & + 4\chi'^2 \sin(\lambda-l') + \eta^2 \sin(\lambda-l')\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(-3\alpha' R \sin^2 \frac{1}{2}K)/\partial l = & -3[\pm \frac{1}{2}\sin K \{-4\chi^2 \cos(\lambda-l') + 6\chi\chi' \cos(2\lambda-2l'-\omega+\varpi') - 4\chi'^2 \cos(\lambda-l') - \eta^2 \cos(\lambda-l')\} \\ & - \sin^2 \frac{1}{2}K \{+4\chi^2 \sin(\lambda-l') - 12\chi\chi' \sin(2\lambda-2l'-\omega+\varpi') + 4\chi'^2 \sin(\lambda-l') + \eta^2 \sin(\lambda-l')\}] \end{aligned}$$

$$\partial(\frac{3}{2}V_3 \cdot \alpha' \sin K \sin^2 \frac{1}{2}K)/\partial l = \pm \frac{3}{2}V_3 \cdot \alpha' [\cos K \sin^2 \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}\sin^2 K]$$

oder bei Entwicklung nach Potenzen von K_1 gemäß $K = K_1 \sin P$ und dann erfolgreicher Abtrennung der rein säkularen Glieder
 $= \pm \frac{3}{2}V_3 [\frac{3}{8}K_1^2 - \frac{15}{128}K_1^4]$. Analog ergibt sich:

$$\partial(-\frac{15}{16}V_3 \cdot \alpha' \sin^3 K)/\partial l = \mp \frac{45}{16}V_3 (\frac{1}{2}K_1^2 - \frac{5}{16}K_1^4)$$

wobei noch zu beachten bleibt, daß der Säkularteil von α' gleich 1 ist.

$$\partial(-\frac{37}{128}\alpha' \varrho^4)/\partial l = -\frac{37}{128}[-\sin(M-M')\{-24\chi^3\chi' - 24\chi\chi'^3 - 24\chi\chi' a_1^2\} - \sin(2M-2M') \cdot 24\chi^2\chi'^2]$$

$$\partial(\frac{81}{16}\alpha' \varrho^3 R)/\partial l = 0, \text{ weil Glieder des Argumentes } i(\lambda-l') \text{ nicht vorhanden.}$$

$$\begin{aligned} \partial(-^{51/16}\alpha' \rho^2 R^2)/\partial l = & -^{51/16} [+8\chi^2 a_1^2 \sin(2\lambda - 2l') + 8\chi\chi' a_1^2 \sin(\lambda - l' - \omega + \varpi') - 12\chi\chi' a_1^2 \sin(3\lambda - 3l' - \omega + \varpi') \\ & - 4\chi\chi' a_1^2 \sin(\lambda - l' + \omega - \varpi') + 8\chi'^2 a_1^2 \sin(2\lambda - 2l') + 8\chi^4 \sin(2\lambda - 2l') \\ & + 16\chi^3\chi' \sin(\lambda - l' - \omega + \varpi') - 24\chi^3\chi' \sin(3\lambda - 3l' - \omega + \varpi') - 8\chi^3\chi' \sin(\lambda - l' + \omega - \varpi') \\ & - 16\chi^2\chi'^2 \sin(2\lambda - 2l' - 2\omega + 2\varpi') + 16\chi^2\chi'^2 \sin(4\lambda - 4l' - 2\omega + 2\varpi') \\ & + 32\chi^2\chi'^2 \sin(2\lambda - 2l') + 16\chi\chi'^3 \sin(\lambda - l' - \omega + \varpi') - 24\chi\chi'^3 \sin(3\lambda - 3l' - \omega + \varpi') \\ & - 8\chi\chi'^3 \sin(\lambda - l' + \omega - \varpi') + 8\chi'^4 \sin(2\lambda - 2l')] \end{aligned}$$

$$\partial(-^{5/4}\alpha' \rho R^3)/\partial l = 0$$

$$\begin{aligned} \partial(^{35/8}\alpha' R^4)/\partial l = & ^{35/8} [-48\chi^4 \sin(4\lambda - 4l') + 96\chi^4 \sin(2\lambda - 2l') + 144\chi^3\chi' \sin(\lambda - l' - \omega + \varpi') \\ & - 96\chi^3\chi' \sin(\lambda - l' + \omega - \varpi') + 72\chi^3\chi' \sin(3\lambda - 3l' + \omega - \varpi') - 288\chi^3\chi' \sin(3\lambda - 3l' - \omega + \varpi') \\ & + 120\chi^3\chi' \sin(5\lambda - 5l' - \omega + \varpi') - 144\chi^2\chi'^2 \sin(2\lambda - 2l' - 2\omega + 2\varpi') \\ & - 72\chi^2\chi'^2 \sin(6\lambda - 6l' - 2\omega + 2\varpi') - 24\chi^2\chi'^2 \sin(2\lambda - 2l' + 2\omega - 2\varpi') \\ & + 192\chi^2\chi'^2 \sin(4\lambda - 4l' - 2\omega + 2\varpi') + 384\chi^2\chi'^2 \sin(2\lambda - 2l') - 192\chi^2\chi'^2 \sin(4\lambda - 4l') \\ & + 144\chi\chi'^3 \sin(\lambda - l' - \omega + \varpi') - 96\chi\chi'^3 \sin(\lambda - l' + \omega - \varpi') + 72\chi\chi'^3 \sin(3\lambda - 3l' + \omega - \varpi') \\ & - 288\chi\chi'^3 \sin(3\lambda - 3l' - \omega + \varpi') + 120\chi\chi'^3 \sin(5\lambda - 5l' - \omega + \varpi') - 48\chi'^4 \sin(4\lambda - 4l') \\ & + 96\chi'^4 \sin(2\lambda - 2l')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(-^{31/32}V_3 \cdot \alpha' \rho^3 \sin K)/\partial l = & \mp^{31/32} V_3 \cdot \cos K [a_1^3 + 6\chi^2 a_1 + 6\chi'^2 a_1 + 18\chi^2 a_1^2 + 18\chi'^2 a_1^2 + 6\chi^4 + 48\chi^2\chi'^2 + 18\chi'^4 \\ & + \cos(M - M') \{ -36\chi\chi' a_1^2 - 36\chi^3\chi' - 60\chi\chi'^3 + 24\chi^2\chi'^2 \cos(2M - 2M') \}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(^{51/16}V_3 \cdot \alpha' \rho^2 R \sin K)/\partial l = & \pm^{51/16} V_3 \cdot \cos K [-4\chi^2 a_1^2 \cos(\lambda - l') + 6\chi\chi' a_1^2 \cos(2\lambda - 2l' - \omega + \varpi') + 2\chi\chi' a_1^2 \cos(\omega - \varpi') \\ & - 4\chi'^2 a_1^2 \cos(\lambda - l') - \eta^2 a_1^2 \cos(\lambda - l') - 4\chi^4 \cos(\lambda - l') + 17\chi^3\chi' \cos(2\lambda - 2l' - \omega + \varpi') \\ & - \chi^3\chi' \cos(\omega - \varpi') - 13\chi^2\chi'^2 \cos(3\lambda - 3l' - 2\omega + 2\varpi') + 5\chi^2\chi'^2 \cos(\lambda - l' - 2\omega + 2\varpi') \\ & - 16\chi^2\chi'^2 \cos(\lambda - l') - \chi\chi'^3 \cos(\omega - \varpi') + 17\chi\chi'^3 \cos(2\lambda - 2l' - \omega + \varpi') \\ & - 4\chi'^4 \cos(\lambda - l') + \chi^2\eta^2 \cos(\lambda - l' - 2\omega + 2\varpi') - 2\chi^2\eta^2 \cos(\lambda - l') \\ & - 2\chi\chi'\eta^2 \cos(\omega + \varpi' - 2\tau') + 2\chi\chi'\eta^2 \cos(2\lambda - 2l' - \omega + \varpi') + 2\chi\chi'\eta^2 \cos(\omega - \varpi') \\ & + \chi'^2\eta^2 \cos(\lambda - l' + 2\varpi' - 2\tau') - 2\chi'^2\eta^2 \cos(\lambda - l')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(^{15/8}V_3 \cdot \alpha' \rho R^2 \sin K)/\partial l = & ^{15/8} V_3 [\sin K \{ +8\chi^2 a_1 \sin(2\lambda - 2l') - 12\chi\chi' a_1 \sin(3\lambda - 3l' - \omega + \varpi') \\ & + 8\chi\chi' a_1 \sin(\lambda - l' - \omega + \varpi') - 4\chi\chi' a_1 \sin(\lambda - l' + \omega - \varpi') + 8\chi'^2 a_1 \sin(2\lambda - 2l') \} \\ & \pm \cos K \{ -4\chi^2 a_1 \cos(2\lambda - 2l') + 4\chi^2 a_1 + 4\chi\chi' a_1 \cos(3\lambda - 3l' - \omega + \varpi') \\ & - 8\chi\chi' a_1 \cos(\lambda - l' - \omega + \varpi') + 4\chi\chi' a_1 \cos(\lambda - l' + \omega - \varpi') - 4\chi'^2 a_1 \cos(2\lambda - 2l') \\ & + 4\chi'^2 a_1 - 6\chi^4 \cos(2\lambda - 2l') + 6\chi^4 + 10\chi^3\chi' \cos(3\lambda - 3l' - \omega + \varpi') + 10\chi^3\chi' \cos(\lambda - l' + \omega - \varpi') \\ & - 20\chi^3\chi' \cos(\lambda - l' - \omega + \varpi') + 12\chi^2\chi'^2 \cos(2\lambda - 2l' - 2\omega + 2\varpi') - 16\chi^2\chi'^2 \cos(2\lambda - 2l') \\ & - 6\chi^2\chi'^2 \cos(4\lambda - 4l' - 2\omega + 2\varpi') - 6\chi^2\chi'^2 \cos(2\omega - 2\varpi') + 16\chi^2\chi'^2 \\ & + 10\chi\chi'^3 \cos(\lambda - l' + \omega - \varpi') - 20\chi\chi'^3 \cos(\lambda - l' - \omega + \varpi') + 10\chi\chi'^3 \cos(3\lambda - 3l' - \omega + \varpi') \\ & - 6\chi'^4 \cos(2\lambda - 2l') + 6\chi'^4 - 2\chi^2\eta^2 \cos(2\lambda - 2l' - 2\omega + 2\tau') + 2\chi^2\eta^2 \cos(2\omega - 2\tau') \\ & + 4\chi\chi'\eta^2 \cos(\lambda - l' - \omega - \varpi' + 2\tau') - 4\chi\chi'\eta^2 \cos(\lambda - l' + \omega + \varpi' - 2\tau') \\ & - 2\chi'^2\eta^2 \cos(2\omega - 2\tau') + 2\chi'^2\eta^2 \cos(2\lambda - 2l' + 2\varpi' - 2\tau') \}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(-^{35/4}V_3 \cdot \alpha' R^3 \sin K)/\partial l = & \mp^{35/4} V_3 \cdot \cos K [-36\chi^4 \cos(\lambda - l') + 36\chi^4 \cos(3\lambda - 3l') - 93\chi^3\chi' \cos(4\lambda - 4l' - \omega + \varpi') \\ & + 135\chi^3\chi' \cos(2\lambda - 2l' - \omega + \varpi') + 9\chi^3\chi' \cos(\omega - \varpi') - 51\chi^3\chi' \cos(2\lambda - 2l' + \omega - \varpi') \\ & - 144\chi^2\chi'^2 \cos(\lambda - l') - 99\chi^2\chi'^2 \cos(3\lambda - 3l' - 2\omega + 2\varpi') + 57\chi^2\chi'^2 \cos(5\lambda - 5l' - 2\omega + 2\varpi') \\ & + 144\chi^2\chi'^2 \cos(3\lambda - 3l') + 27\chi^2\chi'^2 \cos(\lambda - l' - 2\omega + 2\varpi') + 15\chi^2\chi'^2 \cos(\lambda - l' + 2\omega - 2\varpi') \\ & + 9\chi\chi'^3 \cos(\omega - \varpi') + 135\chi\chi'^3 \cos(2\lambda - 2l' - \omega + \varpi') - 93\chi\chi'^3 \cos(4\lambda - 4l' - \omega + \varpi') \\ & - 51\chi\chi'^3 \cos(2\lambda - 2l' + \omega - \varpi') - 36\chi'^4 \cos(\lambda - l') + 36\chi'^4 \cos(3\lambda - 3l') \\ & + 3\chi^2\eta^2 \cos(3\lambda - 3l' - 2\omega + 2\tau') - 6\chi^2\eta^2 \cos(\lambda - l') - 6\chi^2\eta^2 \cos(\lambda - l' - 2\omega + 2\tau') \\ & + 6\chi^2\eta^2 \cos(3\lambda - 3l') + 3\chi^2\eta^2 \cos(\lambda - l' + 2\omega - 2\tau') + 6\chi\chi'\eta^2 \cos(2\lambda - 2l' - \omega + \varpi') \\ & - 6\chi\chi'\eta^2 \cos(2\lambda - 2l' + \omega - \varpi') - 6\chi\chi'\eta^2 \cos(4\lambda - 4l' - \omega + \varpi') + 12\chi\chi'\eta^2 \cos(\omega + \varpi' - 2\tau') \\ & + 6\chi\chi'\eta^2 \cos(\omega - \varpi') - 6\chi\chi'\eta^2 \cos(2\lambda - 2l' + \omega + \varpi' - 2\tau') \\ & - 6\chi\chi'\eta^2 \cos(2\lambda - 2l' - \omega - \varpi' + 2\tau') + 3\chi'^2\eta^2 \cos(3\lambda - 3l' + 2\varpi' - 2\tau') - 6\chi'^2\eta^2 \cos(\lambda - l') \\ & - 6\chi'^2\eta^2 \cos(\lambda - l' + 2\varpi' - 2\tau') + 6\chi'^2\eta^2 \cos(3\lambda - 3l') + 3\chi'^2\eta^2 \cos(\lambda - l' - 2\varpi' + 2\tau')] \end{aligned}$$

$$\partial(-^{153/64}\alpha' \rho^2 \sin^2 K)/\partial l = -^{153/64} [+4\chi\chi' \sin(M - M') \sin^2 K \pm \sin 2K \{ -4\chi\chi' - 16\chi\chi' a_1 \} \cos(M - M')]$$

$$\partial(^{9/8}\alpha' \rho^2 \sin^2 \frac{1}{2}K)/\partial l = ^{9/8} [+4\chi\chi' \sin(M - M') \sin^2 \frac{1}{2}K \pm \frac{1}{2} \sin K \{ -4\chi\chi' - 16\chi\chi' a_1 \} \cos(M - M')]$$

$$\begin{aligned} \partial(-^{45/16}\alpha' \rho R \sin^2 K)/\partial l = & \mp^{45/16} \sin 2K [-4\chi^2 a_1 \cos(\lambda - l') - 4\chi'^2 a_1 \cos(\lambda - l') + 6\chi\chi' a_1 \cos(-2\lambda + 2l' + \omega - \varpi') \\ & + 2\chi\chi' a_1 \cos(\omega - \varpi') - \eta^2 a_1 \cos(\lambda - l')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(^{3/2}\alpha' \rho R \sin^2 \frac{1}{2}K)/\partial l = & \pm^{3/4} \sin K [-4\chi^2 a_1 \cos(\lambda - l') - 4\chi'^2 a_1 \cos(\lambda - l') + 6\chi\chi' a_1 \cos(-2\lambda + 2l' + \omega - \varpi') \\ & + 2\chi\chi' a_1 \cos(\omega - \varpi') - \eta^2 a_1 \cos(\lambda - l')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(^{315/16}\alpha' R^2 \sin^2 K)/\partial l = & ^{315/16} [\sin^2 K \{ +8\chi^2 \sin(2\lambda - 2l') + 8\chi\chi' \sin(\lambda - l' - \omega + \varpi') - 12\chi\chi' \sin(3\lambda - 3l' - \omega + \varpi') \\ & - 4\chi\chi' \sin(-\lambda + l' - \omega + \varpi') + 8\chi'^2 \sin(2\lambda - 2l') \} \pm \sin 2K \{ -4\chi\chi' \cos(2\lambda - 2l') + 4\chi^2 \\ & - 8\chi\chi' \cos(\lambda - l' - \omega + \varpi') + 4\chi\chi' \cos(3\lambda - 3l' - \omega + \varpi') + 4\chi\chi' \cos(-\lambda + l' - \omega + \varpi') \\ & - 4\chi'^2 \cos(2\lambda - 2l') + 4\chi'^2 \}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(-^{15}/_2 \alpha' R^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} K) / \partial l = & -^{15}/_2 [\sin^2 \tfrac{1}{2} K \{ +8\chi^2 \sin(2\lambda - 2l') + 8\chi\chi' \sin(\lambda - l' - \omega + \varpi') \\ & - 12\chi\chi' \sin(3\lambda - 3l' - \omega + \varpi') + 4\chi\chi' \sin(-\lambda + l' - \omega + \varpi') + 8\chi'^2 \sin(2\lambda - 2l') \} \\ & \pm ^{15}/_2 \sin K \{ -4\chi^2 \cos(2\lambda - 2l') - 8\chi\chi' \cos(\lambda - l' - \omega + \varpi') + 4\chi\chi' \cos(3\lambda - 3l' - \omega + \varpi') \\ & + 4\chi\chi' \cos(-\lambda + l' - \omega + \varpi') - 4\chi'^2 \cos(2\lambda - 2l') \}] \end{aligned}$$

$$\partial(^{15}/_{32} \sqrt{3} \cdot \alpha' \varrho \sin^3 K) / \partial l = \pm ^{45}/_{32} \sqrt{3} \cdot \sin^2 K \cos K [a_1 + 2\chi^2 + 2\chi'^2 - 4\chi\chi' \cos(M - M')]$$

$$\partial(-^3/_4 \sqrt{3} \cdot \alpha' \varrho \sin K \sin^2 \tfrac{1}{2} K) / \partial l = \mp ^3/_4 \sqrt{3} (\cos K \sin^2 \tfrac{1}{2} K + ^{15}/_2 \sin^2 K) \{a_1 + 2\chi^2 + 2\chi'^2 - 4\chi\chi' \cos(M - M')\}$$

$$\begin{aligned} \partial(-^{105}/_{16} \sqrt{3} \cdot \alpha' R \sin^3 K) / \partial l = & \mp ^{315}/_{16} \sqrt{3} \cdot \sin^2 K \cos K [-4\chi^2 \cos(\lambda - l') + 6\chi\chi' \cos(2\lambda - 2l' - \omega + \varpi') \\ & + 2\chi\chi' \cos(\omega - \varpi') - 4\chi'^2 \cos(\lambda - l') - \eta^2 \cos(\lambda - l')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(^{15}/_2 \sqrt{3} \cdot \alpha' R \sin K \sin^2 \tfrac{1}{2} K) / \partial l = & \pm ^{15}/_2 \sqrt{3} (\cos K \sin^2 \tfrac{1}{2} K + ^{15}/_2 \sin^2 K) [-4\chi^2 \cos(\lambda - l') + 6\chi\chi' \cos(2\lambda - 2l' - \omega + \varpi') \\ & + 2\chi\chi' \cos(\omega - \varpi') - 4\chi'^2 \cos(\lambda - l') - \eta^2 \cos(\lambda - l')] \end{aligned}$$

$$\partial(^3/_2 \alpha' \sin^4 \tfrac{1}{2} K) / \partial l = \partial(-^{45}/_8 \alpha' \sin^2 K \sin^2 \tfrac{1}{2} K) / \partial l = \partial(^{315}/_{128} \alpha' \sin^4 K) / \partial l = 0 \text{ in bezug auf Säkulartheile.}$$

Die weitere Aufgabe besteht dann darin, eine solche Umarbeitung aller Glieder vorzunehmen, daß die rein säkularen Teile auf den rechten Seiten der Ausdrücke (3) evident werden und zugleich eine für die numerische Anwendung brauchbare Form erhalten. Da $M = \lambda - \omega$, indem $\lambda = l + \tau' - \tau$ und $\omega = \varpi + \tau' - \tau$, und ferner $M' = l' - \omega'$ und $\lambda - l' = \pm(60^\circ + K)$, wo $K = K_1 \sin P$, so ergeben sich, indem $|x|$ den Säkulartheil von x fixiert, die folgenden Ausdrücke bis zu den Gliedern 4. Grades in K_1 entwickelt:

$$\begin{aligned} |\sin i(M - M')| &= -\sin[i(\omega - \varpi') \mp i 60^\circ] [1 - ^{15}/_{96} i^2 K_1^2 + ^{15}/_{96} i^4 K_1^4 + \dots] \\ |\cos i(M - M')| &= +\cos[i(\omega - \varpi') \mp i 60^\circ] [1 - ^{15}/_{96} i^2 K_1^2 + ^{15}/_{96} i^4 K_1^4 + \dots] \end{aligned} \quad (4)$$

Analog ergeben sich die folgenden Ausdrücke für die weiteren, allgemein auftretenden Glieder:

$$\begin{aligned} |\sin hK \sin[i(\lambda - l') + C]| &= ^{15}/_2 \cos(C \pm i 60^\circ) [\pm h i K_1^2 \mp ^{15}/_{12} (h^2 + i^2) h i K_1^4] \\ |\cos hK \sin[i(\lambda - l') + C]| &= ^{15}/_2 \sin(C \pm i 60^\circ) [2 - ^{15}/_2 (h^2 + i^2) K_1^2 + ^{15}/_{48} (h^4 + 6h^2 i^2 + i^4) K_1^4] \\ |\sin hK \cos[i(\lambda - l') + C]| &= -^{15}/_2 \sin(C \pm i 60^\circ) [\pm h i K_1^2 \mp ^{15}/_{12} (h^2 + i^2) h i K_1^4] \\ |\cos hK \cos[i(\lambda - l') + C]| &= ^{15}/_2 \cos(C \pm i 60^\circ) [2 - ^{15}/_2 (h^2 + i^2) K_1^2 + ^{15}/_{48} (h^4 + 6h^2 i^2 + i^4) K_1^4] \end{aligned} \quad (5)$$

wo h und i : 0, 1, 2... und C eine beliebige Konstante; für $h = 1$; $i = 0$, $C = 0$ ergibt sich speziell $|\cos K| = 1 - ^{15}/_{96} K_1^2 + ^{15}/_{96} K_1^4$ und $|\sin K| = 0$. Setzt man abkürzend:

$$1 - ^{15}/_{96} K_1^2 + ^{15}/_{96} K_1^4 = F_i \quad 2 - ^{15}/_2 (h^2 + i^2) K_1^2 + ^{15}/_{48} (h^4 + 6h^2 i^2 + i^4) K_1^4 = G_{h,i} \quad h i K_1^2 - ^{15}/_{12} (h^2 + i^2) h i K_1^4 = H_{h,i} \quad (6)$$

und ferner, weil allgemein: $C = \alpha\omega + \beta\omega'$:

$$\sin(C \pm i 60^\circ) = S_i(\alpha, \beta) \quad \cos(C \pm i 60^\circ) = C_i(\alpha, \beta) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{so wird: } |\sin hK \sin[i(\lambda - l') + C]| &= \pm ^{15}/_2 C_i(\alpha, \beta) H_{h,i} & |\cos hK \sin[i(\lambda - l') + C]| &= + ^{15}/_2 S_i(\alpha, \beta) G_{h,i} \\ |\sin hK \cos[i(\lambda - l') + C]| &= \mp ^{15}/_2 S_i(\alpha, \beta) H_{h,i} & |\cos hK \cos[i(\lambda - l') + C]| &= - ^{15}/_2 C_i(\alpha, \beta) G_{h,i} \end{aligned} \quad (8)$$

Hieraus ergeben sich weiter die Säkulartheile der folgenden von vornweg zu beachtenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} |\sin^2 K \sin(M - M')| &= ^{15}/_2 S_1(-1, 1) F_1 - ^{15}/_4 S_1(-1, 1) G_{2,1} \\ |\sin^2 \tfrac{1}{2} K \sin(M - M')| &= ^{15}/_2 S_1(-1, 1) F_1 - ^{15}/_4 S_1(-1, 1) G_{1,1} \\ |\sin^2 K \sin[i(\lambda - l') + C]| &= ^{15}/_2 S_i(\alpha, \beta) F_i - ^{15}/_4 S_i(\alpha, \beta) G_{2,i} \\ |\sin^2 \tfrac{1}{2} K \sin[i(\lambda - l') + C]| &= ^{15}/_2 S_i(\alpha, \beta) F_i - ^{15}/_4 S_i(\alpha, \beta) G_{1,i} \\ |\sin^2 K \cos K \cos[i(\lambda - l') + C]| &= ^{15}/_8 C_i(\alpha, \beta) G_{1,i} - ^{15}/_8 C_i(\alpha, \beta) G_{3,i} \\ |(\sin^2 \tfrac{1}{2} K \cos K + ^{15}/_2 \sin^2 K) \cos[i(\lambda - l') + C]| &= ^{15}/_4 C_i(\alpha, \beta) G_{1,i} - ^{15}/_4 C_i(\alpha, \beta) G_{2,i} \end{aligned} \quad (9)$$

sodaß hieraus speziell:

$$\begin{aligned} |\sin^2 K \cos K| &= ^{15}/_8 (G_{1,0} - G_{3,0}) = ^{15}/_2 K_1^2 - ^{55}/_{24} K_1^4 \\ |\sin^2 \tfrac{1}{2} K \cos K + ^{15}/_2 \sin^2 K| &= -^{15}/_4 (G_{2,0} - G_{1,0}) = ^{35}/_8 K_1^2 - ^{55}/_{64} K_1^4. \end{aligned} \quad (9a)$$

Ferner ist zu beachten, daß der Entwicklungsparameter $a_1 = -^{15}/_8 m' - ^{25}/_8 \alpha/n' K_1 \cos P$, wo für alle Trojaner $\alpha/n' = 0.08005$, in Verbindung mit den Faktoren der Form $\frac{\sin}{\cos}[i(\lambda - l') + C]$ zu säkularen Teilen führen kann. Da K_1 im Maximum, beim 6. Trojaner, 20° beträgt, sodaß $^{25}/_8 \alpha/n' K_1 \equiv 1^\circ \equiv 0.02$, also von der Ordnung ϵ' des Jupiter wird, so ist die Rücksichtnahme in jedem Falle erforderlich. Gibt man a_1 die Form:

$$a_1 = c_0 + c_1 \cos P \quad (10)$$

so bleibt zu beachten, daß $c_1 = -0.02$ als von der 1., dagegen $c_0 = -^{15}/_8 m' = -(0.02)^2$ als von der 2. Ordnung klein zu betrachten ist. Folglich ergeben sich die folgenden sukzessiven Ausdrücke der aufzusuchenden Säkulartheile, bis zu den Termen 4. Grades einschließlich:

$$\begin{aligned}
 |a_1 \sin[i(\lambda - l') + C]| &= c_0 \sin(C \pm i 60^\circ) [1 - 1/4 K_1^2] \\
 |a_1^2 \sin(M - M')| &= (-c_0^2 - 1/2 c_1^2 + 1/16 c_1^2 K_1^2) \sin(\omega - \varpi' \mp 60^\circ) \\
 |a_1 \cos K| &= c_0 (1 - 1/4 K_1^2)
 \end{aligned}$$

die für diesen Term nicht in Frage kommen.

$$\begin{aligned}
 |a_1 \sin K \sin(M - M')| &= 0 \\
 |a_1^2 \sin[i(\lambda - l') + C]| &= +1/2 c_1^2 \sin(C \pm i 60^\circ) \text{ (höhere Glieder nicht nötig)} \\
 |a_1^2 \cos K| &= c_0^2 + 1/2 c_1^2 - 1/16 c_1^2 K_1^2 \\
 |a_1 \cos K \cos[i(\lambda - l') + C]| &= c_0 \cos(C \pm i 60^\circ) \text{ (höhere Glieder unnötig)} \\
 |a_1 \sin K \sin[i(\lambda - l') + C]| &= 0 \quad |a_1 \sin 2K| = |a_1 \sin K| = 0 \\
 |a_1^2 \sin[i(\lambda - l') + C]| &= 1/2 c_1^2 \sin(C \pm i 60^\circ) \text{ (höhere Glieder unnötig)} \\
 |a_1^3 \cos K| &= 3/2 c_0 c_1^2 \\
 |a_1^3 \cos(M - M')| &= 1/2 c_1^2 \cos(\omega - \varpi' \mp 60^\circ) \text{ (höhere Glieder unnötig)} \\
 |a_1^2 \cos K \cos[i(\lambda - l') + C]| &= 1/2 c_1^2 \cos(C \pm i 60^\circ) \text{ (höhere Glieder unnötig)} \\
 |a_1 \sin K| &= 0 \quad |a_1 \sin 2K \cos[i(\lambda - l') + C]| = 0 \\
 |a_1 \sin^2 K \cos K| &= 1/2 c_0 K_1^2 \quad |a_1 \cos K \sin^2 K| = 1/8 c_0 K_1^2 \quad |a_1 \sin^2 K| = 1/2 c_0 K_1^2.
 \end{aligned} \tag{11}$$

§ 2. Anwendung auf die bisher entdeckten 6 Trojaner. Zunächst sind die in unseren Formeln auftretenden Parameter numerisch zu beschaffen. Die auf das Äqu. 1910 bezogenen Elemente Ω und i , wobei für Jupiter $\Omega' = 91^\circ 32' 7''$ und $i' = 1^\circ 18' 5''$ angenommen wurden, sind nebst den aus ihnen auf Grund des Gaußschen Gleichungssystems berechneten Werten von τ , τ' und $\eta = \sin 1/2 \mathcal{F}$ in der unten folgenden Tabelle 1 zusammengestellt. Die maximale Amplitude K_1 der langperiodischen Schwingung ist für die ersten 5 Trojaner meiner oben zitierten Arbeit S. 50 entnommen. Die Berechnung von K_1 für den 6. Trojaner ist nachgetragen.

Tabelle 1.

	588 Achilles	617 Patroclus	624 Hektor	659 Nestor	884 Priamus	911 Agamemnon
Ω	$315^\circ 36' 1''.5$	$43^\circ 28' 35''.9$	$341^\circ 59' 15''.0$	$350^\circ 0' 0''.9$	$300^\circ 35' 17''.8$	$336^\circ 47' 35''.1$
i	10 18 24.7	22 3 15.1	18 8 45.3	4 31 31.1	8 51 27.7	21 56 53.8
$\log \eta$	8.99666	9.26771	9.21274	8.64940	8.94418	9.29368
τ	$311^\circ 41'.9$	$40^\circ 29'.6$	$338^\circ 23'.0$	$336^\circ 1'.8$	$297^\circ 54'.4$	$333^\circ 56'.3$
τ'	$311^\circ 46'.1$	$40^\circ 42'.3$	$338^\circ 34'.1$	$336^\circ 4'.7$	$297^\circ 56'.5$	$334^\circ 9'.2$
K_1	11 20	3 24	17 58	11 2	11 36	19 29
$\log c_0$	6.50279n	6.50279n	6.50279n	6.50279n	6.50279n	6.50279n
$\log c_1$	8.02350n	7.50062n	8.22362n	8.01186n	8.03361n	8.25881n
ω	$81^\circ 18'.0$	$346^\circ 7'.1$	$157^\circ 19'.8$	$318^\circ 7'.8$	$270^\circ 9'.7$	$55^\circ 46'.7$
ϖ'	12 52.5					

Auf Grund der von Berberich AN 208.332 berechneten Elemente für die Ep. 1919 März 19.5 Gr. wird die mittlere Länge $l = 144^\circ 29'.6$ und gleichzeitig $l' = 101^\circ 23'.5$. Da gleichzeitig $n - n' = +4^\circ 06.2$, so ergibt sich nach den gleichen Formeln, die ich bereits auf den 5. Trojaner angewandt habe (s. AN 4945, Über die Librationsverhältnisse des 5. Trojaners 1917 CQ), daß $K_1 = 19^\circ 29'$ und $|n - n'|$ im Maximum $8^\circ 16'$, sodaß also n in den Grenzen $290^\circ 9.7$ und $307^\circ 29$ gelegen ist. Der konstante Teil der Phase $P = \alpha t + \beta$ der langperiodischen Schwingung hat den Betrag $\beta = 299^\circ 50'.0$. Die Schwankung des 6. Trojaners ist also die größte unter den

6 Körpern. Die Tabelle 1 enthält weiter die Koeffizienten c_0 und c_1 in $a_1 = c_0 + c_1 \cos P$ und schließlich ω und ϖ' . Hiermit sind dann alle Daten zur Berechnung der Säkularglieder beschafft. In der numerischen Rechnung habe ich mich einstweilen auf die Berücksichtigung der Glieder bis zum 2. Grade einschließlich beschränkt; erst wenn die Librationsverhältnisse genauer und strenger erforscht sein werden, ist numerisch die Ausdehnung auf die Glieder höher als 2. Grades geboten. Die folgende Tabelle 2 enthält zunächst die Logarithmen der Säkularteile der nach 2) folgenden 6 ersten Glieder von $\partial(a' \Omega)/\partial l$, abgesehen aber von dem Faktor $k^2 m'$.

Tabelle 2.

	588 Achilles	617 Patroclus	624 Hektor	659 Nestor	884 Priamus	911 Agamemnon
1. Term	7.20690	7.75901	7.37847	7.86345n	7.76246n	7.25320n
2. »	6.60049n	7.15343n	6.77555n	7.26271	7.15757	6.64809
3. »	8.37068	8.66640n	6.72069n	8.84234	7.57972n	8.02424
4. »	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞	—∞
5. »	7.81976	7.84048n	7.08217	8.08776	7.67326n	6.87007
6. »	8.38758	8.82025n	8.53374	8.59084	8.23520n	8.74262
$[da/dt]$	+293.01	—605.46	+192.80	+606.51	—158.06	+343.24
δl	—4''.6149	+9''.5356	—3''.0366	—9''.5524	+2''.4893	—5''.4059

Die Zeile $[da/dt]$ enthält die nach der Formel

$$[da/dt] = 365.25 \cdot 2 \sqrt{a} \cdot k^{-1} (1+m)^{-1/2} a'^{-1} |\partial(a' \Omega)/\partial \lambda| \quad (12)$$

berechnete Säkularänderung der großen Halbachse pro Julianisches Jahr, ausgedrückt in Einheiten der 6. Dezimale. Man ersieht dabei, daß bei den Planeten 1), 3), 4) und 6) eine Zunahme, dagegen bei den Planeten 2) und 5), d. h. bei den Planeten, deren Länge um 60° kleiner als die des Jupiter ist, eine Abnahme der Halbachse stattfindet, eine Tatsache, die allgemein beweisbar ist. Der 1. Term der Tabelle 2 ist wegen des Faktors $|\sin(M-M')| = \sin(\pm 60^\circ - \omega - \varpi')$ im Hauptgliede, bei Beschränkung auf den 2. Grad, von $\omega - \varpi'$ abhängig und deshalb zwar nicht von gleichem Vorzeichen für alle Trojaner, da $\omega - \varpi'$

bei den Planeten 1) und 6)	im 1. Quadranten
» dem » 3)	» 2. »
» » » 5)	» 3. »
» den » 2) » 4)	» 4. »

gelegen ist; dieselbe Bemerkung gilt für den 2. Term. Dagegen ist beim 3. Term das Hauptglied: $12(\chi^2 + \chi'^2) |\sin(2\lambda - 2\lambda')|$ im Vorzeichen von $|\sin(2\lambda - 2\lambda')| = \sin(\pm 120^\circ) = \pm 1/2 \sqrt{3}$ abhängig, also für die Planeten 1), 3), 4) und 6) > 0 , dagegen für 2) und 5) < 0 , während die Glieder in $\chi\chi'$ absolut alle kleiner sind, weil $\chi^2 + \chi'^2$ bei allen Trojanern $> \chi\chi'$, indem χ bei allen Trojanern außer beim 3. mindestens fast doppelt so groß als χ' ist. Der 4. Term ist bis zum 2. Grade einschl. verschwindend. Beim 5. Term ist das Hauptglied

$$\pm 3/4 \sqrt{3} \cdot \cos K [a_1 + 2\chi^2 + 2\chi'^2]$$

also > 0 für die Planeten 1), 3), 4) und 6), aber < 0 für 2) und 5), während das nächste Glied

$$\pm 3/4 \sqrt{3} |\cos K [-4\chi\chi' \cos(M-M')]|$$

bei allen Trojanern absolut kleiner als das 1. Glied ist. Schließlich ist auch beim 6. Term das Hauptglied

$$\pm 3/2 \sqrt{3} \cos K [4\chi^2 + 4\chi'^2 + \chi^2] \cos(\lambda - \lambda') > 0$$

für die Planeten 1), 3), 4), 6), aber < 0 für 2) und 5), während die in $\chi\chi'$ multiplizierten Glieder gegenüber dem Hauptgliede nicht ausschlaggebend zu werden vermögen. Insgesamt geben also die 4 letzten Terme den Ausschlag für das Vorzeichen, sodaß die großen Achsen derjenigen Körper, die sich in der Nähe des Lagrangeschen Dreieckspunktes mit einer um 60° größeren Länge als Jupiter befinden, säkular vergrößert werden, während bei den Körpern in der Nähe des anderen Dreieckspunktes eine säkulare Verminderung der Achsen eintritt. Entsprechend erfahren die ersten Planeten eine negative, die letzteren eine positive Säkularbeschleunigung ihrer Längen. Da nun die Variation $\delta n = -3/2 n a^{-1} \delta a = \delta n_1 t$, wo also δn_1 die Säkularänderung von n , so wird

$$\int n dt = n_0 t + 1/2 t^2 \delta n_1 = n_0 t + n_1 t^2$$

und deshalb die Längenänderung pro Julianisches Jahr gleich dem in Tabelle 2 aufgeführten Werte δl . Pro Jahrhundert ergibt sich im Maximum, das für den 4. und sehr nahe auch für den 2. Trojaner stattfindet, $\delta l = +27^\circ$ Säkularbeschleunigung, also ein sehr großer Betrag, der die Trojaner in wenigen Jahrhunderten aus der Nähe der Librationszentren gänzlich entfernen müßte. Demgegenüber bleibt die Beobachtungstatsache bestehen, daß die bisher entdeckten 6 Trojaner doch alle in der Nähe der Librationszentren, wenn auch bis zu nahe 20° Entfernung aufgefunden wurden. Ist diese Tatsache kein Zufall, so bleibt nur noch die eine Möglichkeit, daß die Säkularstörungen in a und l in Wirklichkeit einer höheren Periode gehorchen, die sich vielleicht ermitteln läßt, wenn man von vorneweg von einer exakteren Anfangslösung ausgeht. Die *Charliersche* periodische Lösung scheint sich auf Grund der hier ermittelten starken Säkularstörungen als eine zu rohe Anfangslösung zu erweisen.

Sternwarte Breslau, 1921 Juli 28.

A. Wilkens.

Bemerkenswerte Eigenschaften der Bahnen der Planeten der Jupitergruppe. Von A. Wilkens.

Die auf das Äquinocinium 1910.0 bezogenen Längen der aufsteigenden Knoten der bisher entdeckten 6 Trojaner sind in der folgenden Tafel unter Ω zusammengestellt:

Trojaner	Ω	$\Omega - \Omega_0$	$\Omega - \Omega_1$
1) Achilles	315°6	-20°5	-25°8
2) Patroclus	43.5	—	+62.1
3) Hektor	342.0	+5.9	+0.6
4) Nestor	350.0	+13.9	+8.6
5) Priamus	300.6	—	-40.8
6) Agamemnon	336.8	+0.7	-4.6

sodaß also alle aufsteigenden Knoten außer für Patroclus nahe an der gleichen Stelle, im 4. Quadranten, gelegen sind und große Abweichungen im wesentlichen allein bei denjenigen Trojanern 2) und 5) auftreten, die um den 2. Librationspunkt, dessen Länge um 60° kleiner als die des Jupiter ist, gelagert sind. Die größte Abweichung der übrigen 4 um den 1. Librationspunkt schwingenden Trojaner beträgt für 1) und 4) $34^\circ 4'$ und das Mittel der Ω für 1), 3), 4) und 6) ist $\Omega_0 = 336^\circ 1'$, dessen Abweichung gegen die Einzelwerte in der obigen Tafel unter $\Omega - \Omega_0$ enthalten ist. Hiernach kommt Ω für 6) dem Mittelwerte Ω_0 am nächsten. Unter Einbeziehung von 2) und 5) beträgt die äußerste Abweichung der immer noch auffälligen

Koinzidenz der Werte für Ω rund 103° , und zwar zwischen 2) und 5); das Mittel ist dann $\Omega_1 = 341^\circ 4'$, und es ergeben sich alsdann die in obiger Tafel unter $\Omega - \Omega_1$ zusammengestellten Abweichungen.

Ferner hatte ich in meinem Artikel »Über die Librationsverhältnisse des 5. Trojaners 1917 CQ« (AN 4945) als Zeitpunkt des Maximums von n , wo unser Planet (Priamus) also auf der Verbindungslinie von Sonne und Librationspunkt, und zwar zwischen ihnen gelegen ist, gefunden: 1986.8, während andererseits aus meinen Daten und Formeln über Patroclus in meinen »Untersuchungen zu einer Störungstheorie der Planeten der Jupitergruppe« (Sitzber. der Heidelberger Akad. der Wiss., Jahrg. 1918, 16. Abhandl.) pag. 50 und 51 folgt, daß für Patroclus das Minimum von n , entsprechend also dem Punkte, den der Planet ebenfalls auf der Verbindungslinie Sonne-Librationspunkt, aber jenseits des Librationspunktes einnimmt, im Jahre 1985.8 eintritt, hiermit ist der Beweis für meine Behauptung im Schlußsatze meines Artikels in AN 4945, daß Priamus und Patroclus sich in bezug auf den Librationspunkt diametral gegenüber liegen, mit Rücksicht auf die für alle Trojaner gleichlange Umlaufszeit um den Librationspunkt, nachgetragen.