6. *Über die Interferenzerscheinungen an planparallelen Platten; von M. Laue.*

(Auszug aus der Berliner Dissertation, I. Teil.)

Einleitung.

Wenn man die auf Interferenz beruhenden Methoden, durch welche man sich einen Einblick in den Bau der Spektrallinien zu verschaffen gesucht hat, durchmustert, so sieht man, daß man zwei prinzipiell verschiedene Arten zu unterscheiden hat. Bei der einen Klasse läßt man nur zwei Wellen interferieren, muß dann aber, da an dem einzelnen Interferenzstreifen zunächst nichts Charakteristisches zu sehen ist, eine große Zahl von ihnen oder sogar das ganze Interferenzphänomen von verschwindend kleinen, bis zu jenen großen Gangunterschieden berücksichtigen, bei welchen die Streifen endgültig verschwinden. Bei der anderen Klasse von Versuchsanordnungen beobachtet man nur einen Streifen, muß aber eine Mehrzahl von Wellen zur Interferenz bringen, von denen je zwei denselben Gangunterschied haben.

Das Ziel aller spektroskopischen Untersuchungen muß sein, die Funktion zu ermitteln, welche die Intensitätsverteilung in der Spektrallinie in ihrer Abhängigkeit von der Schwingungszahl (oder einer äquivalenten Variablen) darstellt. Den Versuch, dies Ziel auf die erstgenannte Art zu erreichen, hat bekanntlich Michelson¹⁾ gemacht; dadurch, daß er die „Sichtbarkeitskurve“ einerseits experimentell, andererseits, von willkürlich angenommenen Intensitätsverteilungen ausgehend, rechnerisch bestimmte, wollte er durch Vergleich beider Resultate Schlüsse auf den Bau der Spektrallinien ziehen. Nun ist ein solcher Rückschluß aber nicht eindeutig, wie Rayleigh²⁾ zeigte, vielmehr gibt es im allgemeinen eine unendliche Mannigfaltigkeit von Intensitätsverteilungen, welche dieselbe

1) A. A. Michelson, Phil. Mag. (5) 31. p. 338—346. 1891; 34. p. 280—299. 1892; Journ. de phys. (3) 3. p. 5—22. 1894.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 34. p. 407—411. 1892.

Sichtbarkeitskurve ergeben. Tatsächlich hat sich Michelson auch in manchen Resultaten geirrt, wie später Perot und Fabry nachwiesen.

Um unzweideutigen Aufschluß über den Bau der Linien zu erhalten, ist man also auf das zweite Verfahren angewiesen. Als Apparate kommen hierfür in Betracht das Gitter, das Michelsonsche Stufenspektroskop und auch die planparallele Platte, seitdem es Perot und Fabry¹⁾ durch Versilbern der Grenzflächen, Lummer²⁾ durch Vergrößerung des Einfallswinkels gelungen ist, das Reflexionsvermögen der Grenzflächen so zu steigern, daß die vielfach reflektierten Strahlen mit den ersten an Intensität noch vergleichbar sind.

Es entsteht nun die Frage, ob man mit diesem Verfahren imstande ist, das Ziel der Spektroskopie, die quantitative Erforschung der Intensitätsverteilung, zu erreichen. Zwar ist, ohne weiteres klar, daß es nicht, wie beim Michelsonschen Verfahren, vorkommen kann, daß zwei Intensitätsverteilungen ununterscheidbar bleiben, obwohl sie nicht die geringste Ähnlichkeit miteinander haben; aber ob es möglich ist, in alle Einzelheiten dieser Funktionen, die nach den neuesten Untersuchungen von Lummer und Gehrcke doch manchmal recht kompliziert sind, einzudringen, kann doch nicht von vornherein entschieden werden. Man könnte einwenden, daß nach der bekannten Formel, nach welcher das Auflösungsvermögen des Gitters durch das Produkt $p \cdot h$ aus der Zahl p der interferierenden Wellen und der Ordnungszahl h des beobachteten Interferenzstreifens bestimmt ist, sich durch Vergrößerung von p und h beliebig nahe benachbarte Teile der Linie trennen lassen müssen. Aber der Vergrößerung von p setzen jedenfalls einmal technische Schwierigkeiten eine Grenze, und daß eine Vergrößerung von h mit der von p gleichwertig erscheint, liegt nur an der Definition des Auflösungsvermögens, die von unendlich

1) A. Perot und C. Fabry, *Ann. de chim. et phys.* (7) **12**, p. 459—501. 1897; *Compt. rend.* 1897, 1898, 1899 und 1900; *Ann. de chim. et phys.* (7) **16**, p. 115—144. 1899.

2) O. Lummer, *Verhandl. der Deutschen Physik. Gesellsch.* **3**, p. 85—98. 1901; O. Lummer und E. Gehrcke, *Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin* p. 11—17. 1902; *Ann. d. Phys.* **10**, p. 457—477. 1903; E. Gehrcke, *Arch. d. Mathem. und Phys.* **3**, p. 216—228. 1903.

schmalen Linien spricht. In Wirklichkeit gibt es für jede Spektrallinie eine Grenze, welche h nicht überschreiten kann, ohne daß benachbarte Spektrallinien ineinander überfließen und so zur Untersuchung unbrauchbar werden. Endlich ist es auch nicht ganz unbedenklich, jene Formel vom Gitter auf die planparallele Platte zu übertragen, bei der doch die Intensitäten den interferierenden Wellen nicht gleich sind, sondern die Glieder einer geometrischen Reihe bilden.

Wir wollen also folgende Frage behandeln: Es interferieren p Wellen, das Verhältnis der Amplitude der Schwingung in der n^{ten} zur Amplitude in der $n + 1^{\text{ten}}$ sei s . s ist natürlich positiv, und wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$s \leq 1$$

voraussetzen. Der Gangunterschied zwischen der $(n + 1)^{\text{ten}}$ und der n^{ten} Welle sei charakterisiert durch die Größe u , und zwar der Einfachheit der Gleichungen halber so, daß $cu/2\pi$ gleich dem Gangunterschied ist, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum sein soll. Außerdem nehmen wir der Allgemeinheit wegen an, jede Welle erleide einen Phasensprung ϑ , bevor sie mit der anderen interferiert. Bezeichnen wir ferner mit ν die Schwingungszahl (dann ist $u\nu = 2\pi \cdot \frac{\text{Gangunterschied}}{\text{Wellenlänge}}$), und drückt $f(\nu)$ die Intensitätsverteilung aus, so ist die Helligkeit nach der Airy-Lummerschen Formel (in einer passend gewählten Einheit)

$$(1) \quad J = \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu) \frac{1 + s^2 p - 2 s \cos p (u \nu + \vartheta)}{1 + s^2 - 2 s \cos (u \nu + \vartheta)} d\nu.$$

Was kann man, wenn man J als Funktion von u und ϑ kennt, über $f(\nu)$ aussagen? Dabei soll s konstant sein, unabhängig sowohl von ν als auch von den Größen, welche u bestimmen. Dagegen schließen wir den Fall nicht aus, daß u (z. B. infolge von Dispersion) noch von ν abhängt.

Bei dieser Fragestellung haben wir schon von dem Vorzug Gebrauch gemacht, der die planparallele Platte vor den anderen Spektroskopen auszeichnet, nämlich, daß bei ihr das Interferenzbild von der Ausdehnung der Lichtquelle (Spalt-

breite) unabhängig ist.¹⁾ Die Interferenzbilder zweier Punkte verstärken sich durch Übereinanderlagerung, während sie beim Gitter durch Nebeneinanderlagerung sich stören. Dies gilt, soweit die Bereiche des Gesichtsfeldes, welche von beiden Punkten Licht empfangen, sich überdecken; der Bereich eines Punktes hängt aber ab von der Gesamtheit der Richtungen, in denen der Punkt der Platte Licht zustrahlt; denn jeder Richtung entspricht ein Punkt des Gesichtsfeldes. Verlegt man nun die Lichtquelle ins Unendliche, indem man sie in die Brennebene einer Kollimatorlinse bringt, so sendet jeder Punkt der Lichtquelle nur in einer Richtung der Platte Licht zu, erleuchtet also auch nur einen Punkt, d. h. die Lichtquelle wird in diesem Falle im Gesichtsfeld abgebildet. Trotzdem gilt auch dann noch der Satz von der Unabhängigkeit des Interferenzbildes von der leuchtenden Fläche, falls diese nur überall gleichmäßig leuchtet.

Ferner haben wir, wenn wir die Airy-Lummersche Formel so, wie es geschehen ist, anwenden, schon ausgesprochen, daß wir das Licht als aus zeitlich unbegrenzten, ungedämpften und ungestörten Sinusschwingungen bestehend annehmen; denn nur unter dieser Voraussetzung ist jene Formel abgeleitet. Diese Annahme steht nicht in Widerspruch mit der oft angewandten Betrachtungsweise, die in Rücksicht auf die Entstehung des Lichtes im leuchtenden Körper von gedämpften, aber immer wieder neu erregten Schwingungen spricht. Denn wie auch der Vorgang der Lichterregung sein mag, immer können wir durch das Fouriersche Doppelintegral den Lichtvektor als Summe reiner Sinusschwingungen darstellen.²⁾ Wir halten uns so nicht nur von jeder Hypothese frei, sondern sind auch noch vor der Möglichkeit geschützt, durch Übertragung von Formeln, die sich auf reine Sinusschwingungen beziehen, auf solche gestörte Schwingungen Irrtümer zu begehen.

1) Vgl. O. Lummers Darstellung in Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik 2. 1. p. 916 ff.

2) Über die Frage, welche Größe bei dieser Darstellung als Intensität der Strahlung von der Schwingungszahl ν zu bezeichnen, vgl. M. Planck Ann. d. Phys. 1. p. 81—122. 1900 u. 7. p. 390—400. 1902.

§ 1. Die Fouriersche Reihe für die Funktion $\frac{1 + s^{2p} - 2s^p \cos pz}{1 + s^2 - 2s \cos z}$

Wir gehen aus von der aus der Theorie des Poisson-
schen Integrals bekannten Gleichung:

$$\frac{1}{1 + s^2 - 2s \cos z} = \frac{2}{1 - s^2} \left(\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} s^n \cos nz \right).^1)$$

Aus ihr folgt:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos nz \, dz}{1 + s^2 - 2s \cos z} = \frac{2s^n}{1 - s^2}.$$

Dabei ist zunächst n als positiv vorausgesetzt. Vertauscht man aber n mit $-n$, so ändert sich auf der linken Seite nichts; also gilt die allgemeinere Gleichung:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos nz}{1 + s^2 - 2s \cos z} \, dz = \frac{2s^{|n|}}{1 - s^2}.$$

Dieses Resultat soll uns dienen, die Koeffizienten der Reihe für die Funktion $\frac{1 + s^{2p} - 2s^p \cos pz}{1 + s^2 - 2s \cos z}$ zu berechnen. Der Koeffizient von $\sin nz$ ist natürlich gleich Null. Der von $\cos nz$ aber hat den Wert:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 + s^{2p} - 2s^p \cos pz}{1 + s^2 - 2s \cos z} \cos nz \, dz \\ &= \frac{1 + s^{2p}}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos nz \, dz}{1 + s^2 - 2s \cos z} - \frac{s^p}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(p+n)z + \cos(p-n)z}{1 + s^2 - 2s \cos z} \, dz \\ &= 2 \frac{s^n - s^{|p-n|+p}}{1 - s^2}. \end{aligned}$$

Ist $n \geq p$, also $|p-n| = n-p$, so verschwindet dies Integral, ist dagegen $n < p$, so ist es gleich

$$2 \frac{s^n - s^{2p-n}}{1 - s^2}.$$

1) H. Burkhardt u. W. F. Meyer, *Encyklopädie der Mathem. Wissenschaft.* 2. A. 7. b. § 19 u. 20.

Mithin ist:

$$(2) \quad \frac{1 + s^{2p} - 2s^p \cos pz}{1 + s^2 - 2s \cos x} = 2 \frac{1 - s^{2p}}{1 - s^2} \left(\frac{1}{2} + \sum_1^{p-1} A_{n,p} \cos nz \right),$$

wobei

$$(3) \quad A_{n,p} = \frac{s^n - s^{2p-n}}{1 - s^{2p}}$$

gesetzt ist. Gleichung (1) nimmt also, wenn man gleichzeitig zu einer anderen Einheit für J übergeht, die Form an:

$$(4) \quad J = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv + \sum_1^{p-1} A_{n,p} \int_{v_1}^{v_2} f(v) \cos n(uv + \vartheta) dv.$$

Uns interessiert zunächst das Verhalten von $A_{n,p}$ als Funktion von s , n und p . Aus (3) folgt:

$$(5) \quad \frac{d A_{n,p}}{ds} = \frac{s^{2n-1}}{(1 - s^{2p})^2} [n(1 - s^{2(p-n)}) - (2p - n)s^{2(p-n)}(1 - s^{2n})];$$

also ist für

$$\begin{array}{lll} s = 0 & A_{n,p} = 0 & \frac{d A_{n,p}}{ds} = 0. \\ s = 1 & A_{n,p} = 1 - \frac{n}{p} & \frac{d A_{n,p}}{ds} = 0. \end{array}$$

Aus der letzten Gleichung folgt, da der Einfluß von s nach (4) sich nur in den Werten der $A_{n,p}$ äußert, der für die Theorie der planparallelen Platte wichtige Satz:

Ist die Differenz $(1 - s)$ klein, so ist ihr Einfluß auf das Interferenzphänomen von der Größenordnung $(1 - s)^2$.

Für alle zwischen 0 und 1 liegenden Werte s ist $d A_{n,p}/ds > 0$, wie wir nun zeigen wollen. Aus den Ungleichungen

$$\frac{1}{p-n} (s^{2n} + s^{2(n+1)} + \dots + s^{2(p-1)}) < s^{2n} < \frac{1}{n} (1 + s^2 + \dots + s^{2(n-1)})$$

folgt, indem man mit $1 - s^2$ erweitert,

$$p s^{2n} < n s^{2p} + p - n.$$

Letzteres ist identisch mit

$$\frac{d}{ds} [n(1 - s^{2(p-n)})] < \frac{d}{ds} [(2p - n)s^{2(p-n)}(1 - s^{2p})].$$

Die Funktionen, deren Differentialquotienten hier miteinander verglichen werden, sind aber für $s = 1$ einander gleich. Daraus folgt, daß für $s < 1$

$$n(1 - s^{2(2p-n)}) > (2p-n)s^{2(p-n)}(1 - s^{2p})$$

ist, und nach (5), daß (für $s < 1$) $dA_{n,p}/ds > 0$ ist. Hieraus schließen wir, daß der Wert $1 - n/p$, den $A_{n,p}$ für $s = 1$ annimmt, sein Maximalwert ist. Fügen wir nun noch hinzu, daß

$$A_{n,p+1} > A_{n,p} > A_{n+1,p}$$

ist, so haben wir die uns interessierenden Eigenschaften von $A_{n,p}$ vollständig aufgezählt.

§ 2. Berücksichtigung der Dispersion.

Bekanntlich zeigt die Formel für das Auflösungsvermögen des Stufenspektroskopes einen nicht ganz unbeträchtlichen Einfluß der Dispersion und ein Blick auf die Gleichung, die den Gangunterschied bei der planparallelen Platte gibt, lehrt, daß dieser außer von der Plattendicke und dem Einfallswinkel auch von dem Brechungsindex des Plattenmaterials, also von der Schwingungszahl ν des Lichtes abhängt. Dementsprechend wollen wir u als Funktion von ν , oder was dasselbe sagt, als Funktion der Wellenlänge in Luft

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

betrachten. Mit λ_0 wollen wir eine in der Spektrallinie auftretende, mittlere Wellenlänge bezeichnen, mit u_0 den Wert von u , welchen man erhält, wenn man der Berechnung von u den λ_0 zugehörigen Wert des Brechungsindex zugrunde legt. Bei der Schmalheit der Spektrallinien ist es jedenfalls ausreichend,

$$(6) \quad u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_0 (\lambda - \lambda_0)$$

zu setzen. Es mag inkonsequent erscheinen, daß wir hier die Wellenlänge als Variable benutzen, es empfiehlt sich aber dies Verfahren durch die Einfachheit, die es unseren Gleichungen

chungen gibt; denn durch die Substitution (6) erhält man, wenn man die Größen

$$(7) \quad U = u_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_0 \lambda_0, \quad V = \vartheta + c \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_0$$

eingführt,

$$(8) \quad u v + \vartheta = U v + V.$$

Die Berücksichtigung der Dispersion hat also keine wesentlichen Änderungen zur Folge. Gleichung (4) geht jetzt über in:

$$(9) \quad J(U, V) = \frac{1}{2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu) d\nu + \sum_1^{p-1} A_{n,p} \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu) \cos n(U\nu + V) d\nu.$$

$J(U, V)$ haben wir geschrieben, weil wir von nun an U und V als die unabhängigen Variablen betrachten wollen; daß sie in Praxi z. B. bei der planparallelen Platte von gegebener Dicke nicht voneinander unabhängig sind, braucht uns dabei nicht zu stören. Durch Spezialisierung können wir immer zu diesem Fall übergehen.

Der Gleichung (9) wollen wir sogleich noch eine für gewisse Zwecke bequemere Form geben. Wir führen die der Wellenlänge λ_0 entsprechende Schwingungszahl ν_0 ein und setzen

$$\xi = \nu - \nu_0.$$

Ferner sei $f(\nu) = \varphi(\xi)$. Führen wir endlich in Verallgemeinerung der von Michelson in den zitierten Arbeiten gebrauchten Bezeichnungen

$$(10) \quad \begin{cases} P = \int \varphi(\xi) d\xi, \\ C_n = \int \varphi(\xi) \cos n U \xi d\xi, \quad S_n = \int \varphi(\xi) \sin n U \xi d\xi \end{cases}$$

ein, so erhalten wir

$$(9a) \quad \begin{cases} J(U, V) = \frac{1}{2} P + \sum_1^{p-1} A_{n,p} (C_n \cos n(U\nu_0 + V) \\ \quad - S_n \sin n(U\nu_0 + V)). \end{cases}$$

§ 3. Eine Fouriersche Reihe für $f(\nu)$.

Zur Untersuchung eignen sich nur solche Interferenzstreifen, welche von den benachbarten deutlich getrennt sind. Notwendige, aber noch nicht hinreichende Bedingung dieser

Trennung ist, daß nicht das h^{te} Helligkeitsmaximum einer in der Spektrallinie auftretenden Schwingungszahl auf das $(h+1)^{\text{te}}$ einer anderen fällt. Die Helligkeitsmaxima, welche streng monochromatisches Licht von der Schwingungszahl ν erzeugen würden, liegen nun nach (1) und (8) dort, wo

$$u \nu + \vartheta = U \nu + V = 2 h \pi$$

ist. Für die Trennung der Streifen ist also erforderlich, daß für keine der vorkommenden Schwingungszahlen ν

$$U \nu + V = 2 (h + 1) \pi$$

dort ist, wo

$$U \nu_1 + V = 2 h \pi$$

ist. Dies ist nur dann der Fall, wenn

$$(11) \quad U(\nu_2 - \nu_1) < 2 \pi.$$

Diese Ungleichung sehen wir nun als erfüllt an. Führen wir vorübergehend

$$y = U \nu$$

als Variable in $f(\nu)$ ein, so ist die Funktion $f(y/U)$ nach (11) nur in einem Bereich der Variablen von Null verschieden, der kleiner als 2π ist. Für diesen Bereich gilt also die Entwicklung

$$\pi f\left(\frac{y}{U}\right) = \frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} f\left(\frac{y}{U}\right) dy + \sum_1^{\infty} \left(\cos n y \int_{y_1}^{y_2} f\left(\frac{y}{U}\right) \cos n y dy \right. \\ \left. + \sin n y \int_{y_1}^{y_2} f\left(\frac{y}{U}\right) \sin n y dy \right).$$

Kehrt man zur Benutzung der Variablen ν zurück, und ersetzt dann ν durch den Ausdruck $(2 h \pi - V)/U$, so findet man

$$(12) \quad \frac{\pi}{U} f\left(\frac{2 h \pi - V}{U}\right) = \frac{1}{2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu) d \nu + \sum_1^{\infty} \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu) \cos n (U \nu + V) d \nu.$$

Durch Einführung der Substitutionen (10) kann man dieser Gleichung auch die Form geben:

$$(12a) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\pi}{U} f\left(\frac{2 h \pi - V}{U}\right) &= \frac{1}{2} P + \sum_1^{\infty} (C_n \cos n (U \nu_0 + V) \\ &\quad - S_n \sin n (U \nu_0 + V)). \end{aligned} \right.$$

§ 4. Vergleich der Gleichungen (9) und (12).

Setzt man in (9) $s = 1$, $p = \infty$, so nehmen nach (3) alle $A_{n,p}$ den Wert 1 an und es folgt aus (12):

$$J(U, V) = \frac{\pi}{U} f\left(\frac{2h\pi - V}{U}\right),$$

d. h. J ist proportional zur Intensität der Schwingungszahl, welche für sich allein an der betreffenden Stelle ihr h^{tes} Helligkeitsmaximum ergäbe. In diesem Fall könnte man die Funktion f direkt aus dem Anblick eines Interferenzstreifens entnehmen. Dieser Fall ist nun nicht realisierbar. Vielmehr treten, da p stets endlich ist, von den Integralen

$$\int f(v) \cos n(Uv + V) dv$$

in (9) nur die $(p-1)$ ersten auf und auch diese sind nicht mit dem ihnen nach (12) zukommenden Koeffizienten 1, sondern mit den mit wachsendem n abnehmenden Koeffizienten $A_{n,p}$ multipliziert. Trotzdem wird eine gewisse Ähnlichkeit zwischen den Funktionen

$$J(U, V) \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{U} f\left(\frac{2h\pi - V}{U}\right)$$

bestehen, wenn die in der Reihenentwicklung (12) ausschlaggebenden Glieder in (9) mit solchen Koeffizienten $A_{n,p}$ multipliziert sind, die von 1 noch nicht allzuviel verschieden sind. Nach dem in § 1 Gesagten nimmt diese Ähnlichkeit mit wachsendem s und p stets zu. Die Zahl der in (12) ausschlaggebenden Glieder hängt von U ab, denn der Wert von U , von dem an nach der Theorie der Fourierschen Reihen

$$\int f(v) \cos(Uv + V) dv$$

von Null nicht mehr merklich verschieden ist, wird von dem Produkt nU bei um so kleinerem n überschritten, je größer U ist.

Auf indirektem Wege kann man übrigens, ohne die Grenzen eines Interferenzstreifens zu überschreiten, noch mehr über die Funktion $f(v)$ ermitteln. Hat man z. B. ein Verfahren, bei dem man p von 1 an bis zu einem Maximalwert P sukzessiv

wachsen lassen kann¹⁾, so kann man, da jedesmal, wenn p um 1 wächst, in (9) ein neues Integral auftritt, und die Koeffizienten $A_{n,p}$ bekannt sind, die $(p-1)$ ersten Integrale der Gleichung (12) einzeln bestimmen. Dasselbe erreicht man, wenn man sich mit Beobachtungen bei konstantem p begnügen will, auf rechnerischem Wege folgendermaßen:

Die in den Gleichungen (10) auftretende Integrationsvariable ξ ist infolge der Schmalheit aller Spektrallinien im ganzen Integrationsbereich höchstens von der Größenordnung $10^{-4} \nu_0$. Ist also p nicht zu groß (sagen wir kleiner als 10^2), so ist selbst C_{p-1} und S_{p-1} mit U langsam veränderlich gegen alle $\cos n(U\nu_0 + V)$ und $\sin n(U\nu_0 + V)$, die in (9a) auftreten. Betrachtet man aber alle C_n und S_n als konstant, so wird $J(U, V)$ die Funktion einer einzigen Variablen

$$w = U\nu_0 + V.$$

Multipliziert man dann (9a) mit $\cos nw dw$ oder $\sin nw dw$ und integriert von einem beliebigen Wert w_1 bis $w_1 + 2\pi$ (die Werte durchläuft w , wenn man von einer Stelle des h^{ten} bis zur entsprechenden Stelle des $(h+1)^{\text{ten}}$ Interferenzstreifens fortschreitet), so findet man nach den bekannten Formeln zur Berechnung der Koeffizienten einer Fourierschen Reihe die Integrale C_n und S_n bis zu $n=p-1$ einzeln, die man dann nach (12a) zur angenäherten Berechnung von f verwenden kann. (Hätte man eine Versuchsanordnung, bei der sich V bei konstantem U variieren ließe, so könnte man von der Gleichung

$$J(U, V) = \frac{1}{2} \int f(v) dv + \sum_1^{p-1} A_{n,p} \left(\cos nV \int f(v) \cos Uv dv \right. \\ \left. - \sin nV \int f(v) \sin nUv dv \right)$$

ausgehend, in ähnlicher Weise die $(p-1)$ ersten Integrale von (12) in *aller Strenge* ermitteln. Da aber ein solches Verfahren bis jetzt nicht bekannt ist, haben wir der obigen angenäherten Methode den Vorzug gegeben.)

1) Vgl. O. Lummer u. E. Gehreke, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 4. p. 337—346. 1902, besonders von p. 344 an.

Es gilt also der Satz:

Interferieren p Strahlenbündel miteinander, so lassen sich durch Beobachtung des einzelnen Interferenzstreifens die p ersten Glieder der Reihenentwicklung (12) bestimmen. Die höheren Glieder sind ohne Einfluß auf das Interferenzbild.

Überblickt man noch einmal den Einfluß, den die Größen s , p , U und V auf die Leistungsfähigkeit der Methode haben, so sieht man:

1. V ist ohne jeden Einfluß darauf, dasselbe gilt daher auch von dem Phasensprung ϑ .

2. Der Einfluß von s ist äußerst gering, wenn s von 1 nicht sehr verschieden ist; er läßt sich ganz eliminieren.

3. p bestimmt die Zahl der Glieder von (12), die sich ermitteln lassen.

4. U bestimmt die Schnelligkeit der Konvergenz der Reihe (12).

§ 5. Exakte Bestimmung von $f(v)$.

Aus den Erörterungen der vorigen Paragraphen sieht man, daß die Annäherung, mit welcher sich $f(v)$ aus der Betrachtung eines Interferenzstreifens ermitteln läßt, vor allem von der Zahl p der interferierenden Wellen abhängt, und tatsächlich ist auch von jeher das Streben der Experimentatoren auf Vergrößerung dieser Zahl gerichtet gewesen. Um so interessanter dürfte es sein, daß es ein Verfahren gibt, bei dem man in der Genauigkeit der Bestimmung $f(v)$ von p (und ebenso von s) gänzlich unabhängig ist, bei dem man sich dafür freilich nicht auf die Messung in einem Streifen beschränken darf, sondern deren mehrere (genau genommen unendlich viele) in Betracht ziehen muß. Aus diesem Grunde kann man dies Verfahren passend als eine Kombination der beiden Arten spektroskopischer Untersuchungsmethoden bezeichnen, von denen wir in der Einleitung sprachen.

Die Funktion

$$(13) \quad H(U, V) = J(U, V) - \frac{1}{2} \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$$

ist, ebenso wie $J(U, V)$, eine empirisch zu ermittelnde Funktion, denn die Gesamtintensität $\int f(v) dv$ der Spektrallinie ist leicht anderweitig zu bestimmen. Nach (9) ist

$$(14) \quad H(U, V) = \sum_1^{p-1} A_{n,p} \int_{v_1}^{v_2} f(n) \cos n(Uv + V) dv.$$

Wir bilden nun die Summe:

$$\frac{1}{2} H(O, O) + \sum_1^{\infty} H(mU, mV);$$

nach (14) erhält $A_{n,p}$ dabei als Faktor die Summe:

$$\frac{1}{2} \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv + \sum_1^{\infty} \int_{v_1}^{v_2} f(v) \cos mn(Uv_0 + V) dv,$$

welche nach (12) den Wert

$$\frac{\pi}{nU} f\left(\frac{2h'\pi - nV}{nU}\right)$$

hat. Dabei ist angenommen [vgl. (11)], daß

$$nU(v_2 - v_1) < 2\pi.$$

Damit dies für alle in (14) auftretenden Werte von n zutrifft, muß

$$(15) \quad (p-1)U(v_2 - v_1) < 2\pi$$

sein.

Diese Ungleichung sei erfüllt. Die ganze Zahl h' muß so gewählt sein, daß $(2h'\pi - nV)/nU$ zwischen v_1 und v_2 liegt, d. h. so, daß $n(Uv_1 + V) < 2h'\pi < n(Uv_2 + V)$ ist. Eine Zweideutigkeit durch (15) ist ausgeschlossen. Liegt nun $2h\pi$ zwischen $Uv_1 + V$ und $Uv_2 + V$, so muß man $h' = nh$ setzen und erhält als Faktor von $A_{n,p}$ in obiger Summe

$$\frac{\pi}{nU} f\left(\frac{2h\pi - V}{U}\right).$$

Daraus ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{1}{2} H(O, O) + \sum_1^{\infty} H(mU, mV) = \frac{\pi}{U} f\left(\frac{2h\pi - V}{U}\right) \cdot \sum_1^{p-1} \frac{A_{n,p}}{n}.$$

Stellt man hier die Glieder etwas um, so findet man das in aller Strenge gültige Resultat:

$$(16) \quad f\left(\frac{2h\pi - V}{U}\right) = \frac{U}{\pi \cdot \sum_1^{p-1} \frac{A_{n,p}}{n}} \left(\frac{1}{2} H(O, O) + \sum_1^{\infty} H(mU, mV) \right).$$

Dies bedeutet: *Man wähle sich einen Interferenzstreifen von nicht zu hoher Ordnungszahl h , damit (15) nicht verletzt wird. In diesem wird es eine Stelle, d. h. ein Wertepaar U und V geben, an welcher die Schwingungszahl*

$$\nu = \frac{2 h \pi - V}{U},$$

falls sie für sich allein vorhanden wäre, ein Helligkeitsmaximum geben würde. An dieser Stelle messe man $J(U, V)$ und berechne nach (13) daraus $H(U, V)$. Dasselbe wiederhole man im 2^{ten}, 3^{ten} etc. in inf. Interferenzstreifen, dann findet man $H(2U, 2V)$, $H(3U, 3V)$ etc. und daraus nach (16) $f(\nu)$. Denn

$$H(O, O) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} f(\nu) d\nu \cdot \sum_1^{p-1} A_{n,p}$$

ist nur von der Gesamtintensität abhängig und diese haben wir schon oben als bekannt vorausgesetzt. In dem Fall, daß man die Dispersion vernachlässigen und $\vartheta = 0$ setzen kann, kann man der Gleichung (16) noch eine einfachere Form geben, indem man $2 h \pi / U = \nu$ setzt. V verschwindet dann nämlich nach (7) und man erhält:

$$(16a) \quad f(\nu) = \frac{h}{\nu} \frac{1}{\sum_1^{p-1} \frac{A_{n,p}}{n}} \left(H(O) + \sum_{m=1}^{m=\infty} H\left(\frac{2 m h \pi}{\nu}\right) \right).$$

Mit den erwähnten Messungen muß man so lange fortfahren, bis man in das Gebiet kommt, in welchem die Interferenzstreifen endgültig verschwinden. Nach (9) tritt dies dann ein, wenn U so groß geworden ist, daß auch das erste der dort auftretenden Integrale von Null nicht mehr merklich verschieden ist. Der Punkt, von dem an dies Gebiet beginnt, ist also unabhängig von p .

Die Ordnungszahl h des Interferenzstreifens, bei dem man zu messen anfangen muß, ist aber nach (15), da die den Gangunterschied messende Größe U und h einander annähernd proportional sind, etwa umgekehrt proportional zu $(p-1)$. *Um bei Anwendung der Gleichung (16) möglichst wenig Interferenzstreifen zu berücksichtigen zu haben, muß man also p möglichst klein, d. h. gleich 2 wählen.* Damit kämen wir wieder auf die früheren Untersuchungsmethoden zurück, mit dem Unterschied,

daß man sich nicht mit der Bestimmung der Sichtbarkeit begnügen dürfte, sondern in den Interferenzstreifen Messungen ausführen müßte.

§ 6. Über ein von Lummer und Gehrcke angewandtes Beweisverfahren für die Interferenzfähigkeit des Lichtes bei großen Gangunterschieden.¹⁾

Auf Grund der hier entwickelten Theorie können wir nun der Deutung nicht zustimmen, die Lummer und Gehrcke in ihrer Abhandlung „Über die Interferenz des Lichtes bei mehr als 2 Millionen Wellenlängen Gangunterschied“¹⁾ einem dort beschriebenen Versuch geben. Die Autoren beobachteten eine Veränderung des Interferenzbildes bei der Erhöhung der Zahl p der interferierenden Strahlen von 8 auf 9 in dem Sinn, daß dabei die Maxima schärfer werden. Auf Grund der Airy-Lummerschen Formel führen sie dies darauf zurück, daß der 9^{te}, neu hinzukommende Strahl mit dem ersten noch interferenzfähig ist, und schließen daraus, daß das benutzte grüne Quecksilberlicht selbst bei einem Gangunterschied, der das 8fache des Gangunterschiedes zwischen dem ersten und zweiten Strahl beträgt, seine Interferenzfähigkeit nicht verliert.

Wie oben erwähnt, drückt sich das Aufhören der Interferenzfähigkeit in Gleichung (9) dadurch aus, daß von einem gewissen Wert von U an alle dort auftretenden Integrale verschwindend klein werden. Der von Lummer und Gehrcke gezogene Schluß bedeutet also: Unter den vorliegenden Verhältnissen ist $\int f(\nu) \cos 8(U\nu + V) d\nu$ noch merklich von Null verschieden.

Wie wird dies nun bewiesen? Indem man zuerst nach (9)

$$J(U, V) = \frac{1}{2} \int f(\nu) d\nu + \sum_1^7 A_{n,8} \int f(\nu) \cos n(U\nu + V) d\nu$$

und dann

$$J(U, V) = \frac{1}{2} \int f(\nu) d\nu + \sum_1^9 A_{n,9} \int f(\nu) \cos n(U\nu + V) d\nu$$

beobachtet und besagten Unterschied konstatiert. Dieser Unterschied ist aber keineswegs allein durch das Hinzutreten

1) O. Lummer u. E. Gehrcke, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 3. p. 337–346. 1902; vgl. besonders p. 344 u. f.

eines Gliedes, das $\int f(v) \cos 8(Uv + F) dv$ enthält, bedingt, sondern es ist überall an Stelle von $A_{n,8}, A_{n,9}$ getreten. Also ist der Beweis hinfällig.

Um aber alle Zweifel zu heben, müssen wir noch in dem Gedankengang, der zu diesem falschen Resultat geführt hat, den ersten Irrtum nachweisen. Daß man das Licht als aus gedämpften und immer wieder erregten Schwingungen bestehend annimmt, steht mit unserer Behandlungsweise nicht in Widerspruch. Also liegt ein Trugschluß vor, der, wie man leicht sieht, auf Übertragung der Airy-Lummerschen Formel, die für reine Sinusschwingungen gilt, auf gestörte Schwingungen beruht. Um ihn richtigzustellen, wollen wir annehmen, die kohärenten Wellenzüge, welche die Lichtzentren aussenden, sind fähig, acht miteinander interferenzfähige Strahlenbündel zu liefern, nicht mehr und nicht weniger. Wir beweisen, daß trotzdem die beobachtete Änderung des Interferenzbildes eintritt, wenn man die Zahl der interferierenden Strahlen von 8 auf 9 erhöht. Die Zeit zwischen dem Ende einer Reihe regelmäßiger Schwingungen und dem Beginn der nächsten soll unendlich klein sein; auch wollen wir von der Dämpfung und der Schwächung bei der Reflexion absehen.

Das Leuchten eines Körpers gehört zu den ungeordneten Vorgängen. Daher gibt es bei acht interferierenden Strahlenbündeln in jedem Augenblick

1. solche Lichtzentren, die zu allen acht Strahlenbündeln interferenzfähige Wellen liefern. Diese rufen eine Helligkeitsverteilung hervor, die wir mit J_8 bezeichnen;

2. ebensoviel Lichtzentren, die nur für das zweite, dritte . . . achte Strahlenbündel interferenzfähige Wellen liefern. Ins erste entsenden sie eine Welle, die mit den anderen in keinem gesetzmäßigen Zusammenhang steht. Von ihnen rührt eine Helligkeitsverteilung her, die wir mit $J_1 + J_7$ bezeichnen.

3. ebensoviel Lichtzentren, die einerseits zum dritten, vierten etc., achten kohärente Wellen liefern, andererseits zum ersten und zweiten. Diese ergeben $J_2 + J_6$, etc.

Man beobachtet demnach:

$$J_8 + (J_1 + J_7) + (J_2 + J_6) + \dots + (J_7 + J_1) = J_8 + 2 \sum_1^7 J_n.$$

Nimmt man nun noch ein neuntes Strahlenbündel hinzu, so liefern die Lichtzentren unter 1. $J_8 + J_1$, die unter 2. $J_1 + J_8$, die unter 3. $J_2 + J_7$ etc. Man beobachtet also in diesem Fall

$$(J_8 + J_1) + (J_1 + J_8) + (J_2 + J_7) + \dots + (J_7 + J_2) = 2 \sum_1^8 J_n.$$

Man sieht es ist J_8 hinzugekommen, und dies wird natürlich nicht nur die Helligkeit im allgemeinen, sondern auch die Schärfe der Maxima vergrößern, da die Maxima von J_8 allein nach der Airy-Lummerschen Formel schärfer sind als die aller anderen der hier auftretenden J_n .

Der andere Schluß, den Lummer und Gehrcke in der genannten Arbeit aus dem Auftreten und der Schärfe des vierfachen Ringsystems auf die Interferenzfähigkeit von mindestens sechs aufeinander folgenden Strahlenbündeln ziehen, bleibt durch diese Erörterungen unberührt. Denn beobachtet man eine Intensitätsverteilung, die durch das Auftreten von J_1, J_2, J_3, J_4, J_6 nicht zu erklären ist, so muß mindestens noch J_6 existieren. Dadurch ist dann die Interferenzfähigkeit des grünen Quecksilberlichtes bei $2,6 \cdot 10^6 \cdot \frac{5}{8} = 1,6 \cdot 10^6$ Wellenlängen Gangunterschied bewiesen und es ist wohl wahrscheinlich, daß auch noch höhere Gangunterschiede sie nicht aufheben würden.

§ 7. Berechnung von U und V für die planparallele Platte.

Über die Berechtigung einiger Vernachlässigungen.

Ist n der Brechungsindex des Plattenmaterials, so ist der Gangunterschied:

$$\frac{c}{2\pi} u = 2nd \cos \beta,$$

wenn wir mit β den Winkel bezeichnen, den die Strahlen in der Platte mit deren Normalen bilden. β hängt mit dem Einfallswinkel α zusammen durch die Gleichung

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}.$$

Berücksichtigt man dies bei der Bildung des Differentialquotienten

$$\frac{\partial n}{\partial \lambda} = \frac{4\pi d}{c} \frac{\partial (n \cos \beta)}{\partial \lambda},$$

so findet man aus (7)

$$U = \frac{4\pi d}{c} \left(n_0 \cos \beta_0 - \frac{\lambda_0}{\cos \beta_0} \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_0 \right),$$

$$V = \vartheta + \frac{4\pi d}{\cos \beta_0} \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_0.$$

Dabei ist β_0 der Wert von β , den man aus $\sin \beta = \sin \alpha / n$ erhält, wenn man dort für n den zu λ_0 gehörenden Wert n_0 einsetzt. Da $dn/d\lambda < 0$ ist, gilt der Satz:

Wie beim Stufenspektroskop hat die Dispersion bei der planparallelen Platte eine scheinbare Vergrößerung des Gangunterschiedes zur Folge.

Bei der Lummerschen Versuchsanordnung ist s nicht, wie wir annahmen, konstant, sondern da für die eine Polarisationsrichtung

$$s = \sigma^2 = \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha - \cos \alpha}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha + \cos \alpha}} \right)^2$$

ist und für die andere einen nahezu gleichen Wert hat, so ist s durch n abhängig von λ , und durch α abhängig von dem u mitbestimmenden Winkel β . Da nun α etwa 88° beträgt, so ist rund

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = -50,$$

und

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} < 2,$$

also kann man bei den geringen Wertdifferenzen von λ in einer Spektrallinie und bei den kleinen Änderungen von α im Bereich eines Interferenzstreifens σ ohne Bedenken als konstant betrachten.

Dagegen darf man die Dispersion bei dieser Versuchsanordnung keineswegs vernachlässigen. Nach (6) ist

$$uv = u_0 v + \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_0 (\lambda - \lambda_0) v$$

$$= 4\pi d \left(\frac{n_0 \cos \beta_0}{\lambda} + \frac{1}{\cos \beta_0} \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_0 \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} \right) v.$$

Bei Flintglas ist ungefähr

$$\frac{dn}{d\lambda} = -10^3 [\text{cm}^{-1}],$$

der Größenordnung nach ist $\lambda - \lambda_0 / \lambda_0$ gleich 10^{-4} und $4\pi d$ gleich 10 cm; also ist das Zusatzglied

$$\frac{1}{\cos \beta_0} \left(\frac{d n}{d \lambda} \right)_0 \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

der Größenordnung nach gleich -1 , unter dem Kosinuszeichen also durchaus nicht zu vernachlässigen, wie groß auch der andere Summand sein mag.

Zum Schluß möge es mir gestattet sein, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Planck, meinen ehrfurchtsvollen Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und die mir erwiesene Unterstützung auszusprechen.

(Eingegangen 7. Oktober 1908.)