SUGLI ENTI ANALITICI.

Nota di E. Study (Bonn).

Adunanza del 25 marzo 1906.

In un lavoro recente il sig. T. LEVI-CIVITA ha indicato una estensione importante di un teorema fondamentale della teoria delle funzioni di una variabile complessa *).

Qui mi propongo di esporre altre generalizzazioni dello stesso teorema e di teoremi affini, tutti spesso usati, specialmente dal sig. H. A. SCHWARZ, nei cui scritti si trovano i casi più semplici ($n = 1$) dei nostri teoremi XVI-XX **).

Queste generalizzazioni sono basate su due idee, l'una, di massima importanza, sviluppata dal sig. C. SEGRE ***), l'altra contenuta nel nostro Teorema I. L'idea del SEGRE consiste nella ripetizione del passaggio abituale dal campo reale al campo complesso. Io debbo a lui — mi è grato dichiararlo — non solo questo procedimento, ma anche un numero considerevole di nozioni e di risultati speciali. Il SEGRE però si è ristretto alla considerazione degli enti algebrici, ed ha fatto un largo uso di ragionamenti geometrici ****). Nel caso degli enti analitici, di cui parlerò io, mi pare che manchi ancora una parte delle definizioni necessarie ad esprimere i risultati in forma rigorosa, semplice, ed abbastanza generale. Per esempio, la sola nozione del contenere si deve scindere in almeno tre nozioni differenti, di cui due vengono usate nel presente lavoro. Inoltre riuscirà forse gradito a qualche lettore di veder presentata una tale teoria in maniera puramente analitica. Tutto quello che segue si potrà intendere senza conoscenza della geometria moderna (ed anche, io credo, senz'alcuna difficoltà).

*) T. LEVI-CIVITA, *Sulle funzioni di due o più variabili complesse* [Rend. Acc. Lincei, vol. XIV (1905), 2° semestre, pp. 492-499].

**) Veggansi le citazioni nell'articolo del sig. OSGOOD nella *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, etc., II, B, 1, nota 120 in calce.

***) CORRADO SEGRE, *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* [Math. Annalen, XL (1892), pp. 413-467].

****) Pare che per queste ragioni la Memoria del SEGRE non sia conosciuta quanto meriterebbe. Anche nell'articolo citato dell'OSGOOD (scritto colla più gran diligenza) le idee del SEGRE vengono trascurate. Però il SEGRE stesso ha avvertito esplicitamente (alla fine del n° 19, pag. 442) che parecchie sue considerazioni si possono svolgere, in modo pienamente analogo, per gli enti analitici.

*
**

Cominciamo con qualche definizione *). Useremo le parole *VARIETÀ* e *SPAZIO* in sensi differenti.

Considerando i sistemi di m variabili (finite) complesse $\xi_1, \dots, \xi_m$, parleremo (come si suole) di « punti » di una *varietà* V_m , e delle *varietà* $V_0, \dots, V_{m-1}$ analitiche immerse nella V_m , denotando coll'indice in ciascun caso la « dimensione complessa » dell'ente considerato, cioè il numero delle variabili complesse rimaste indipendenti. Una V_0 sarà sempre un punto della V_m .

Restringendo invece le variabili $\xi_1, \dots, \xi_m$ a valori reali $x_1, \dots, x_m$, abbiamo similmente uno *spazio* S_m a m « dimensioni reali », in cui sono immersi degli altri *spazi* $S_0, \dots, S_{m-1}$ analitici, a $0, \dots, m-1$ dimensioni reali, in particolare i punti reali S_0 .

I punti di una V_r , che è data come continuazione analitica di uno S_r ($r > 0$), si chiameranno anche *punti complessi dello* S_r , e fra essi quelli che non sono reali, non sono situati nello S_m , si chiameranno *punti immaginari dello* S_r , come di solito.

Può essere che fra i punti della V_r (o fra i punti complessi dello S_r) vi siano punti reali, isolati o no, a cui non si possa pervenire col mezzo della detta continuazione analitica, se non pel tramite di punti immaginari. Questi punti (che del resto possono, tutti o in parte, essere sovrapposti a punti dello S_r) li chiameremo *punti associati allo* S_r .

Una V_r si dirà *reale*, se coincide colla $\bar{V}_r$ coniugata, vale a dire, col luogo dei punti complessi-coniugati ai punti della V_r . Così la V_r determinata da uno S_r è sempre reale; e in particolare la V_m è *reale*. In tal caso lo S_r si chiamerà anche un *tratto reale* della V_r reale. Vi possono essere parecchi tratti reali della stessa V_r ($0 < r < m$) associati l'uno all'altro. Ma vi sono anche delle varietà reali non godenti di tratti, nemmeno di punti reali. Un ente analitico non reale si dirà *immaginario*.

I punti di un qualunque ente S_r , V_r ($r > 0$) o saranno *algebrici* **), formanti il *campo di esistenza* dell'ente, oppure *punti limiti (trascendenti)*, formanti, se ve ne sono, il *limite naturale* dell'ente. Gli uni e gli altri « appartengono all'ente » o « giacciono » o « stanno » sull'ente; ma *solamente dei punti algebrici diremo che essi sono compresi o contenuti nell'ente, o che l'ente passa per essi* ***).

In generale ci basterà considerare i punti generici fra gli algebrici: essi saranno

*) Alcune delle nozioni seguenti sono in sostanza identiche a quelle adoperate dall'OSGOOD (loc. cit.).

**) Nell'intorno d'un punto « algebrico » $n - r$ delle coordinate complesse si comportano come funzioni algebriche delle altre r coordinate. Basta per il nostro scopo il saper tanto. Le molte e difficili questioni intorno ai punti algebrici (e trascendenti) non le toccheremo.

***) Una tale distinzione non è punto superflua. Ammettendo il limite naturale come « contenuto » nell'ente, si sarebbe costretti a dire che un ente analitico può « contenere » un altro di dimensione eguale, anzi superiore ($\eta = \operatorname{sen} \frac{1}{\xi}$, ecc.).

chiamati punti regolari. Nell'intorno d'un suo *punto regolare* l'ente si può sempre rappresentare, in una infinità di modi, per mezzo di serie di potenze di r parametri essenziali (parametri complessi nel caso delle varietà V_r , parametri reali nel caso degli spazi S_r) per modo che la matrice funzionale delle coordinate (ξ o x) non s'annulla nel punto considerato (centro dello sviluppo). Questi parametri possono sempre scegliersi fra le m coordinate ξ_k o x_k , ma non sempre nello stesso modo per tutti i punti regolari.

Una particolare rappresentazione parametrica, proseguita analiticamente quanto possibile, può avere un limite naturale sull'ente stesso; essa non darà in generale tutti i punti dell'ente considerato *). Scambiando però e riscambiando in modo opportuno i parametri, si può pervenire a qualsiasi punto.

L'insieme dei punti regolari d'una V_r ($r > 0$) è sempre un solo continuo **) compreso nel campo di esistenza: *Il campo di regolarità* della V_r . L'insieme dei punti regolari di uno S_r invece sarà formato di uno o più continui, tutti compresi nel campo di esistenza dello S_r , e separati fra loro da punti algebrici non regolari. Un tale insieme continuo di punti *reali* lo chiameremo un *campo elementare* (dello S_r). L'ipocicloide di STEINER, per esempio, uno S_1 nello S_2 , consta di tre campi elementari e di tre cuspidi, non contenute nei campi.

Un insieme di punti regolari d'un ente analitico (varietà o spazio) può godere delle proprietà seguenti: *a)* L'insieme comprende tutti i punti d'un certo intorno d'un qualsivoglia suo punto. *b)* L'insieme è continuo, per modo che si può passare da un qualsiasi suo punto ad un qualsiasi altro mediante continuazione analitica (ed eventualmente scambio dei parametri) pel tramite di punti dell'insieme. *c)* L'insieme non può ingrandirsi, cioè non è compreso in un altro godente delle proprietà *a)*, *b)*, ma esteso fuori del primo. Un tale insieme sarà il campo di regolarità nel caso di una V_r , ed un campo elementare nel caso d'uno S_r . Un insieme però, i cui punti (tutti regolari) riempiano le condizioni *a)*, *b)* (ma eventualmente non la terza), lo chiameremo una *regione regolare* della V_r o dello S_r . Così ogni campo regolare d'una V_r , ed ogni campo elementare d'uno S_r , sarà una regione regolare; ma non inversamente.

Un campo elementare lo denoteremo colla lettera C_r , designando, qui ancora, coll'indice r la dimensione.

Si vede che una qualsivoglia regione regolare d'uno S_r , per es. l'intorno d'un

*) Fatto non di rado rimasto inosservato. Naturalmente, in tali casi è facile, *ma nondimeno necessario*, di presentare i teoremi in forma esatta.

Sarà anche opportuno di osservare che a mezzo d'una rappresentazione parametrica l'ente può essere coperto parecchie volte, in tutto o in parte, nello stesso modo come una V_1 , per es. una retta, può essere coperta dai differenti rami di una superficie di RIEMANN. In tal caso le singolarità del distendimento, per es. i punti di diramazione, non saranno sempre singolarità dell'ente stesso.

**) Secondo il CANTOR un «continuo» è sempre chiuso. Noi non possiamo accettare una tale restrizione. Si veggia la «*Geometrie der Dynamen*» dell'autore (Lipsia, 1903), a piè della pagina 248.

suo punto regolare, determina completamente: 1° Un campo elementare C_r ; 2° lo spazio S_r , su cui il campo C_r è situato; 3° tutti gli altri campi elementari C'_r , C''_r , ... dello stesso spazio (se ve ne sono); 4° la varietà V_r , su cui lo S_r è situato; 5° tutti i punti, campi, spazi reali, associati allo S_r ($r > 0$).

Se diciamo che un ente analitico s'appoggia su di un altro o che questo porta il primo, vogliamo esprimere che almeno UNA REGIONE REGOLARE del secondo è compresa nel CAMPO DI ESISTENZA del primo.

Così, ogni ente analitico « s'appoggia » su sè stesso, e su tutti i suoi punti algebrici. Uno S_r definente una V_r reale porta questa. La V_m si appoggia su tutte le V_r e su tutti gli S_r . — Si potrebbe credere che la nostra definizione fosse superflua nel caso in cui i due enti siano *varietà* (cioè, enti complessi): si potrebbe pensare che tutta la varietà portante dovesse giacere sulla varietà portata. Ma una tale conclusione sarebbe sbagliata. Ecco un esempio *).

Sia $f(\xi)$ una funzione analitica regolare nell'interno del cerchio $|\xi| < 1$, ma avente questo cerchio come limite naturale. Nella V_3 (ξ, η, ζ) la V_2 : $\zeta - \eta f(\xi) = 0$ s'appoggia sulla V_1 : $\eta = 0$, $\zeta = 0$, comprendendone tutti i punti situati nell'interno del cerchio assunto, i cui punti stessi giacciono ancora sulla V_2 . Ma non si potrebbe dire che anche i punti esterni al cerchio soddisfino alla stessa equazione, perchè per essi l'espressione $f(\xi)$ è priva di senso. Dunque questi punti non appartengono alla V_2 .

Si vede di qui che la varietà portante può essere tagliata in parti dal limite naturale della varietà portata, anche nel mezzo d'un suo campo regolare.

Se la varietà portata è algebrica, una tale circostanza è impossibile. Ma nel caso degli *spazi* già gli enti algebrici offrono, come è ben noto, delle proprietà simili.

Se tutti i punti dell'ente portante appartengono all'ente portato, abbiamo fra loro una connessione più intima: Diremo che l'ente portante è *contenuto* o *compreso* nell'ente portato, o che questo *passa per* l'ente portante. Così ogni ente è contenuto in sè stesso e passa per sè stesso. Nel nostro esempio il cerchio è contenuto nella V_1 , ma *non* nella V_2 , giacchè tutti i suoi punti sono punti limiti della V_2 .

È chiaro che la differenza tra una varietà V_r ed uno spazio S_{2r} di dimensione pari non è essenziale. Le due parole designano piuttosto due modi di riguardare la stessa cosa. La varietà si potrà trattare come uno spazio. Possiamo scindere le variabili complesse nelle loro componenti reali: avremo uno spazio S_{2r} . Possiamo estendere queste componenti al campo complesso: avremo definito una V_{2r} ; e così via, senza fine. È appunto questo, che vogliamo fare ora, fermandoci però dopo il primo passo.

Tratteremo un campo di n variabili complesse

$$z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n$$

come uno SPAZIO S_{2n} di $2n$ dimensioni reali, e come immerso in una VARIETÀ V_{2n} di

*) Un altro esempio si trova nell'articolo citato dell'Osgood (n° 47 del testo).

2n dimensioni complesse, le cui variabili (complesse) saranno

$$\xi_1, \eta_1; \dots \xi_n, \eta_n.$$

Introdurremo poi un ulteriore termine tecnico, per distinguere dagli altri quegli spazi $S_{2\rho}$ dello S_{2n} ($x_1, y_1; \dots x_n, y_n$) che sono varietà V'_ρ nella $V'_n(\xi_1, \dots \xi_n)$, e le loro continuazioni analitiche $V_{2\rho}$ nella $V_{2n}(\xi_1, \eta_1; \dots \xi_n, \eta_n)$ dal resto delle varietà analitiche a 2ρ dimensioni complesse. *Li chiameremo spazi e varietà sinettici* (includendo in tale espressione gli enti S_{2n} e V_{2n} stessi, e tutti i punti S_0 reali). Così uno spazio sinettico nello S_{2n} non sarà altro che una varietà analitica in una V'_n . Le varietà sinettiche però saranno varietà analitiche molto speciali; cioè quelle che possono riguardarsi come continuazioni analitiche (nella V_{2n}) degli spazi sinettici, che già sono spazi specializzati. Una V_0 sinettica sarà un punto reale dello S_{2n} .

Interpretando, per esempio, le variabili x_1, y_1, x_2, y_2 come coordinate ortogonali cartesiane in uno spazio euclideo S_4 (reale) a quattro dimensioni, avremo da considerare: Degli spazi S_0 , o punti reali; degli spazi S_1 , o « TRATTI REALI di curve analitiche »; degli spazi S_2 , o « TRATTI REALI di superficie analitiche »; e così degli spazi S_3 e lo spazio S_4 stesso. Fra questi saranno sinettici: 1° Gli S_0 . 2° Quegli spazi S_2 , che si possono rappresentare (in una regione regolare) a mezzo d'un parametro complesso t nella forma « sinettica »

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t).$$

3° Lo spazio S_4 .

Nella varietà euclidea V_4 invece consideriamo delle varietà V_0, V_1, V_2, V_3 (e V_4), luoghi analitici di $\infty^0, \infty^2, \infty^4, \infty^6$ (e ∞^8) punti complessi, e specialmente le V_1 e V_2 , che sono state chiamate « curve » e « superficie » analitiche *). Fra le reali ci sono le varietà sinettiche: Le V_0 reali, identiche agli S_0 , cioè ai punti reali; poi quelle V_2 che derivano dagli S_2 sinettici; ed in fine la V_4 .

Posto $t = \varphi + i\psi$, scriviamo così le due equazioni precedenti:

$$x_1 + iy_1 = f_1(\varphi + i\psi),$$

$$x_2 + iy_2 = f_2(\varphi + i\psi).$$

*) L'uso delle parole curva e superficie oscilla in guisa da non farsene un'idea. In tanti casi non si sa che cosa voglia dire un autore. Il nostro uso coincide con quello più abituale nella geometria proiettiva. Ma riguardo allo stato attuale della letteratura sarà opportuno osservare che una curva algebrica non è analitica (secondo le solite definizioni di queste parole), se non è irriducibile, e che non si devono confondere i sei concetti: Curva (analitica oppure algebrica) reale; curva dotata di tratti reali; l'insieme dei punti reali di una curva reale (se ve ne sono); l'insieme dei tratti reali di una curva reale (se ve ne sono); singolo tratto reale di una tale curva; regione regolare d'un tratto reale. Denotare tutti questi concetti, e non so quanti altri, colla stessa parola, senza le debite definizioni e senza coerenza è un adattarsi all'equivoco. È questo un fatto, che caratterizza la condizione presente d'una gran parte della letteratura geometrica. Il voler chiudere gli occhi di fronte ad una tale confusione, il preferire una semplicità apparente alla vera semplicità, che consiste nel definire esattamente e nel limitare propriamente tutti i concetti usati, ecco uno dei più grandi ostacoli per il progresso della geometria. Si veda la prefazione del libro citato « *Geometrie der Dynamen* ».

Da queste derivano quattro equazioni reali:

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi_1(\varphi, \psi), & y_1 &= \psi_1(\varphi, \psi), \\x_2 &= \varphi_2(\varphi, \psi), & y_2 &= \psi_2(\varphi, \psi).\end{aligned}$$

Continuando ora i parametri φ, ψ nel campo complesso, cioè sostituendoli con valori u, v complessi abbastanza vicini, avremo nelle formule

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \varphi_1(u, v), & \eta_1 &= \psi_1(u, v), \\ \xi_2 &= \varphi_2(u, v), & \eta_2 &= \psi_2(u, v)\end{aligned}$$

la rappresentazione analitica della varietà V_2 sinettica più generale, in una sua regione regolare. E così in casi superiori.

*
**

Supponiamo ora che uno $S_{2\rho}$ sia dato per mezzo di 2ρ parametri reali essenziali, in una sua regione regolare. *Come potremo riconoscere se questo $S_{2\rho}$ sia sinettico? E trovarlo sinettico: Come potremo rappresentarlo per mezzo di ρ parametri complessi?* La risposta è pressochè immediata. Se una rappresentazione sinettica già fosse stata trovata, le componenti reali dei ρ parametri complessi potrebbero sostituirsi invece dei 2ρ parametri dati, ed inversamente. Ma sostituendo le dette componenti con parametri nuovi *complessi*, nel modo più generale, non avremo fatto altro che introdurre dei parametri sovrabbondanti. Quindi, proseguendo i parametri dati nel campo complesso, non usciremo fuori dello spazio dato $S_{2\rho}$.

I. (TEOREMA FONDAMENTALE). *Un dato $S_{2\rho}$ è sinettico, se, sostituendo i suoi 2ρ parametri reali con valori vicini complessi, nelle espressioni trovate*

$$z_k = f_k(t_1, \dots, t_{2\rho}),$$

appunto ρ parametri sono sovrabbondanti.

Rimovendo quei parametri, si ha una rappresentazione sinettica dello $S_{2\rho}$, od almeno d'una sua regione regolare, per mezzo di ρ parametri complessi.

Teoricamente, il rimuovere quei parametri, che fossero sovrabbondanti, non offre alcuna difficoltà; basta sostituirli con funzioni (scelte in modo proprio) degli altri parametri, per es. con valori costanti.

Ma lo stesso ragionamento ci conduce subito ad un teorema più generale:

II. *Per ogni spazio S_r passa uno spazio $S_{2\rho}$ sinettico ben determinato *). Su di questo s'appoggiano tutti gli spazi portati dallo S_r .*

Per trovar lo $S_{2\rho}$, basta proseguire gli r parametri reali dello S_r nel vicino campo complesso, e rimuovere quegli $r - \rho$ parametri complessi, che risultassero eventualmente sovrabbondanti. Si vede che si ha sempre

$$r \leq 2\rho \leq 2r, \quad \rho \leq n;$$

*) Cfr. SEGRE, loc. cit., pag. 440.

e si trovano anche subito i criteri per tutti i casi, a mezzo di determinanti funzionali (Teorema I). Si vede che, dovunque lo S_r ha un punto regolare (o algebrico), lo S_{2p} ha anche un punto regolare (o algebrico).

Potremmo già trarre parecchie conseguenze dal Teorema II. Ma prima di far ciò, ci pare opportuno istituire alcune considerazioni d'un carattere differente, le quali ci condurranno a qualche generalizzazione del Teorema II. (Veggansi i Teoremi VII, XIII).

Si prova subito:

III. *Vi sono due classi distinte di trasformazioni puntuali reali (e di necessità analitiche) godenti della proprietà di permutar fra loro spazi sinettici:*

Le « trasformazioni sinettiche »

$$Z_k = F_k(z_1, \dots, z_n)$$

e le « trasformazioni antisinettiche »

$$\bar{Z}_k = F_k(z_1, \dots, z_n).$$

Nelle trasformazioni della prima classe le variabili trasformate Z_k sono funzioni analitiche aventi un campo comune di esistenza, del resto arbitrarie, colla sola restrizione di essere indipendenti. Nel secondo caso i valori coniugati

$$\bar{Z}_k = X_k - i Y_k$$

delle variabili complesse

$$Z_k = X_k + i Y_k$$

sono espressi nello stesso modo.

È naturalmente sottinteso che si parla solo di quegli spazi che entrano, ed in quanto entrano, nel *campo di regolarità* di una tale trasformazione (campo continuo ed unico, in cui il determinante funzionale della trasformazione non s'annulla).

In quanto sia possibile di eseguire l'una dopo l'altra due tali trasformazioni della prima specie (per es.), il prodotto loro sarà una trasformazione dello stesso tipo. Abbiamo così un « gruppo continuo infinito », e nell'insieme delle due classi un altro gruppo infinito detto « misto ». Sarà opportuno di chiamare questi due gruppi riproduttivi dell'insieme degli spazi sinettici « *il gruppo sinettico* » ed « *il gruppo sinettico ampliato* » *). Interpretando le variabili x_k , y_k e X_k , Y_k come coordinate cartesiane ortogonali nello spazio euclideo S_{2n} , vediamo che *entrambe le classi di trasformazioni sono conformi per le regioni regolari a due dimensioni* (in quanto entrano nel campo di regolarità della trasformazione considerata).

Continuiamo ora le trasformazioni definite nel campo complesso, o nella V_{2n} , il che può farsi senz'altro. Omettendo gl'indici, troviamo nel primo caso:

*) Una parte essenziale delle proprietà qui rilevate di questo gruppo importante è già stata sviluppata nella Memoria citata del SEGRE. Veggansi specialmente i numeri 18, 26, 27.

$$\Xi = \frac{1}{2} [F(\xi + i\eta) + \bar{F}(\xi - i\eta)],$$

$$H = \frac{1}{2i} [F(\xi + i\eta) - \bar{F}(\xi - i\eta)],$$

e nel secondo:

$$\Xi = \frac{1}{2} [F(\xi + i\eta) + \bar{F}(\xi - i\eta)],$$

$$H = -\frac{1}{2i} [F(\xi + i\eta) - \bar{F}(\xi - i\eta)].$$

Da queste formule deriva subito il teorema:

IV. *Rispetto al gruppo sinettico ampliato i punti (ξ, η) della varietà V_{2n} , cioè i punti detti « complessi dello spazio S_{2n} », stanno in relazione invariabile ed univoca colle coppie ben ordinate $(\zeta'; \zeta'')$ di punti reali dello stesso spazio:*

$$\xi - i\eta = x' - iy' = \bar{\zeta}',$$

$$\xi + i\eta = x'' + iy'' = \zeta''.$$

Così ogni punto complesso (ξ, η) ha due immagini reali

$$\zeta' = x' + iy', \quad \zeta'' = x'' + iy'',$$

che sono scambiate tra di loro, se si passa dal punto (ξ, η) al punto gemello $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$.

Naturalmente i punti ζ', ζ'' coincidono, se il punto (ξ, η) diventa reale, e viceversa.

Si domanda ora: quali sono le relazioni geometriche fra i quattro punti (ξ, η) , $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, (x', y') , (x'', y'') ? La risposta è evidente:

V. *Vi sono nella varietà V_{2n} [euclidea] due schiere (gemelle) di varietà [piane parallele], entrambe dipendenti da n parametri complessi $\bar{\zeta}'_k, \zeta''_k$: le PROTOVARIETÀ *)*

$$V'_n: \quad \bar{\zeta}_k - i\eta_k = \bar{\zeta}'_k = \text{cost.} \quad (k = 1, \dots, n)$$

$$V''_n: \quad \bar{\zeta}_k + i\eta_k = \zeta''_k = \text{cost.} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Le trasformazioni sinettiche permutano fra loro le varietà di ciascuna schiera, le une nel modo analitico più generale, le altre nel modo gemello (cioè nel modo complesso-conjugato):

$$\bar{Z}' = \bar{F}(\bar{\zeta}'),$$

$$Z'' = F(\zeta'').$$

Le trasformazioni antisinettiche invece mutano l'una schiera nell'altra:

$$Z'' = \bar{F}(\bar{\zeta}'),$$

$$\bar{Z}' = F(\zeta'').$$

*) Nozione introdotta dal SEGRE, come anche il termine « figure gemelle ».

Le due immagini $\bar{z}', z''$ d'un punto complesso sono, secondo l'ordine, i (soli) punti reali delle due protovarietà passanti per il punto complesso, oppure, nell'ordine inverso, i punti reali delle protovarietà passanti per il punto gemello.

S'intende che il gruppo sinettico ampliato è caratterizzato anche da una di queste proprietà IV, V.

Dal punto di vista a cui ora siamo arrivati, si possono studiare, fra altri luoghi, tutte le varietà analitiche comprese nella V_{2n} . Introduciamo per un momento una varietà ausiliare V_{2n}^* (la quale non differisce del resto dalla V_{2n} se non per la scelta delle coordinate) interpretando i sistemi delle $2n$ variabili complesse

$$\bar{z}'_1, \dots, \bar{z}'_n; \quad z''_1, \dots, z''_n$$

come punti della V_{2n}^* . Ad ogni V_r corrisponderà una V_r^* e viceversa. Quindi nello spazio S_{2n} avremo due spazi sinettici $\bar{S}'_{2\rho}, S''_{2\rho'}$, luoghi dei punti reali $\bar{z}', z''$, i quali, se $\rho' + \rho'' > r$, saranno legati da

$$\rho' + \rho'' - r$$

vincoli analitici, o meglio *sinettici* $\Phi(\bar{z}', z'') = 0$ indipendenti. Mutando i punti $\bar{z}'$ nei punti z' , che loro corrispondono nella trasformazione reale

$$X_k - i Y_k = x_k + i y_k$$

detta *conjugio* dal SEGRE, otterremo ancora due spazi sinettici, $S'_{2\rho}$ e $S''_{2\rho'}$:

VI. Le immagini reali dei punti complessi (ξ, η) d'una qualsiasi V_r sono i punti z' e z'' di due spazi $S'_{2\rho}$ e $S''_{2\rho'}$ SINETTICI. Vi sono fra loro $\rho' + \rho'' - r$ legami ANTI-SINETTICI indipendenti *).

Viceversa, ogni ente analitico costituito da tali coppie di punti rappresenterà una V_r analitica.

Così, esprimendo le $2n$ variabili $\bar{z}', z''$ nel modo analitico più generale per mezzo di r parametri complessi essenziali, otteniamo tutte le V_r , o regioni di esse.

Vi sono due famiglie notevoli di V_r immaginarie, cioè quelle, in cui l'uno dei punti z', z'' rimane fisso, mentre l'altro percorre un qualsivoglia $S_{2\rho}$ sinettico. Le chiameremo *varietà caratteristiche*, includendo in questo nome tutti i punti complessi. Si vede subito che una varietà caratteristica o sarà una protovarietà ($\rho = n$), oppure sarà immersa in una protovarietà ($\rho < n$; in due, se $\rho = 0$). Sostituendo il punto fisso con un altro, si trova una nuova varietà caratteristica, derivata dalla prima per mezzo d'una traslazione. Da ciò si deduce che tutte le varietà, per cui $\rho' + \rho'' - r = 0$, $\rho' > 0$, $\rho'' > 0$, sono *varietà di traslazione o di scorrimento*, secondo il senso abituale di queste parole.

Se la V_r è reale, si può passare dalla coppia generica (z', z'') alla coppia inversa

*) Questo asserto sarebbe sbagliato, se non si fossero inclusi i punti reali nella definizione degli enti sinettici.

(z'', z') per mezzo di continuazione analitica reale. Quindi si ha $\rho' = \rho''$; e di più gli $S'_{2\rho'}$, $S''_{2\rho''}$ sinettici devono coincidere. Dunque:

VII. Una qualunque V_r REALE è contenuta in una $V_{2\rho}$ sinettica ben determinata.

Tutte le varietà sinettiche appoggiate sulla V_r s'appoggiano anche su questa $V_{2\rho}$.

Si vede che si ha sempre, anche qui:

$$r \leq 2\rho \leq 2r, \quad \rho \leq n.$$

Non sarebbe difficile lo studiare tutti i casi; ma noi vogliamo restringerci ai casi più semplici ed interessanti, vale a dire ai casi estremi $2\rho = r$ e $\rho = r$.

Se $r = 2\rho$, già la V_r stessa è sinettica. Ne deriva una conseguenza importante:

VIII. Gli spazi $S_{2\rho}$ sinettici sono appunto quelli, le cui coppie di punti sono le immagini reali dei loro punti complessi.

Così, prendendo una qualsivoglia coppia z', z'' di punti reali (regolari, algebrici o generali) d'un tale spazio, avremo le immagini d'un qualsivoglia punto (ξ, η) (regolare, algebrico o generale) della $V_{2\rho}$ sinettica, che viene determinata dallo spazio $S_{2\rho}$.

Alla stessa conclusione arriviamo per altre vie.

È chiaro che ogni $S_{2\rho}$ equivale nel gruppo sinettico allo spazio speciale

$$z_{\rho+1} = 0, \dots, z_n = 0.$$

Ma evidentemente questo spazio contiene le immagini di tutti i suoi punti immaginari. Di qui si deduce che il Teorema VIII è vero per quei punti immaginari dello $S_{2\rho}$, che sono regolari ed abbastanza vicini ai punti reali. Ma questo è sufficiente per dedurne il teorema in tutta la sua generalità. Basta applicare la continuazione analitica.

Finalmente si può stabilire il teorema mediante verifica diretta. Sia $z = f(t)$ una rappresentazione sinettica dello $S_{2\rho}$. Posto $t = \sigma + i\tau$, avremo nelle formule

$$\xi = \frac{1}{2} [f(\sigma + i\tau) + \bar{f}(\sigma - i\tau)],$$

$$\eta = \frac{1}{2i} [f(\sigma + i\tau) - \bar{f}(\sigma - i\tau)]$$

la continuazione analitica dello $S_{2\rho}$ nel campo complesso V_{2n} . Esse equivalgono a $\xi + i\eta = z = f(t)$, se i parametri σ, τ divengono reali. Lasciandoli complessi, i punti

$$z' = \bar{\xi} + i\bar{\eta} = f(\bar{\sigma} + i\bar{\tau}),$$

$$z'' = \xi + i\eta = f(\sigma + i\tau)$$

saranno entrambi situati sullo $S_{2\rho}$, se pure le funzioni f_k esistono per tali argomenti (condizione necessaria per l'esistenza delle funzioni ξ, η , i cui argomenti $\sigma + i\tau$ e $\sigma - i\tau$ sono variabili indipendenti). Quindi si può scrivere:

$$\xi - i\eta = \bar{z}' = x' - iy',$$

$$\xi + i\eta = z'' = x'' + iy''.$$

Ecco ora una conseguenza notevole:

IX. *Tutte le varietà $V_{2\rho}$ sinettiche sono unicursali, cioè, ciascuna contiene un solo tratto reale $S_{2\rho}$, privo di punti associati.* (Veggasi più sopra).

Un po' più generale ancora è il teorema seguente, che deriva dagli stessi principî:

X. *Una qualunque varietà portante una data varietà $V_{2\rho}$ sinettica non può uscire fuori di questa, se non è contenuta almeno in una $V_{2\rho-2}$ sinettica. Quindi: Tutti i punti reali associati ad un S_r appartengono allo spazio $S_{2\rho}$ sinettico individuato dallo S_r .*

Finalmente osserviamo (per $\rho > 0$):

Tutte le varietà $V_{2\rho}$ sinettiche sono varietà di scorrimento.

Ciascuna si può generare in due modi per mezzo d'una traslazione a ρ parametri complessi, il cui oggetto è l'una o l'altra di due varietà caratteristiche V'_ρ e V''_ρ .

Inversamente, ogni varietà REALE generata in tal modo sarà sinettica: Essa coincide (se $\rho > 0$) colla continuazione analitica d'uno spazio $S_{2\rho}$ sinettico. Vedremo ora come queste osservazioni si possano generalizzare.

Il Teorema VIII dice (fra l'altro) che i punti complessi (ξ, η) e $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ rappresentati dalle formule

$$\begin{aligned} 2\xi &= (x'' + x') + i(y'' - y'), & 2i\eta &= (x'' - x') + i(y'' + y'), \\ 2\bar{\xi} &= (x' + x'') + i(y' - y''), & 2i\bar{\eta} &= (x' - x'') + i(y' + y'') \end{aligned}$$

stannò sulla $V_{2\rho}$, se i punti (x', y') , (x'', y'') dello $S_{2\rho}$ sinettico son reali. Basta enunciare il nostro risultato in tale forma, per vedere che l'ultima restrizione è superflua. Solamente, sostituendo le variabili reali x', y', x'', y'' con valori complessi $\xi', \eta', \xi'', \eta''$, non otterremo più punti gemelli, ma invece una coppia (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) generica di punti della $V_{2\rho}$, data dalle equazioni involutorie:

$$\begin{aligned} \xi_1 - i\eta_1 &= \xi' - i\eta', & \xi_1 + i\eta_1 &= \xi'' + i\eta'', \\ \xi_2 - i\eta_2 &= \xi'' - i\eta'', & \xi_2 + i\eta_2 &= \xi' + i\eta'. \end{aligned}$$

L'interpretazione è immediata:

XI. *Assunti due qualsivogliano punti d'una varietà sinettica, anche i due altri punti di riscontro delle protovarietà passanti per essi stanno sulla varietà *).*

La stessa conseguenza si trae del resto dalla considerazione della varietà speciale $\xi_{\rho+1} = 0, \eta_{\rho+1} = 0, \dots, \xi_n = 0, \eta_n = 0$; ed anche qui si trovano subito i parametri rappresentativi dei quattro punti considerati. Basta sostituire nelle formule

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}[f(\sigma + i\tau) + \bar{f}(\sigma - i\tau)], \\ \eta &= \frac{1}{2i}[f(\sigma + i\tau) - \bar{f}(\sigma - i\tau)] \end{aligned}$$

valori complessi σ, τ connessi dalle stesse equazioni:

*) SEGRE, loc. cit., pag. 455.

$$\begin{aligned}\sigma_1 - i\tau_1 &= \sigma' - i\tau', & \sigma_1 + i\tau_1 &= \sigma'' + i\tau'' \\ \sigma_2 - i\tau_2 &= \sigma'' - i\tau'', & \sigma_2 + i\tau_2 &= \sigma' + i\tau';\end{aligned}$$

come si verifica direttamente.

Mentre il Teorema VIII caratterizza gli spazi sinettici, la proprietà enunciata nel Teorema XI definisce una famiglia più estesa di varietà, le quali vogliamo chiamare *varietà di SEGRE*, includendo anche in questo nome la V_{2n} e tutti i punti complessi.

È cosa facile trovare tutte le varietà di SEGRE. Sia (ξ_1, η_1) un punto regolare fisso, (ξ_2, η_2) un punto variabile di una tale V_r . Si vede che i punti (ξ', η') e (ξ'', η'') stanno su due varietà caratteristiche $V_{r'}, V_{r''}$, intersezioni della V_r colle due protovarietà V'_n, V''_n passanti per il punto (ξ_1, η_1) . Ma sulle $V_{r'}, V_{r''}$ i punti (ξ', η') e (ξ'', η'') possono scegliersi arbitrariamente, determinando così il punto (ξ_2, η_2) . Quindi si ha $r' + r'' = r$. Le due $V_{r'}, V_{r''}$, che anzi si possono prefissare, determinano la V_r , che sarà rappresentata da formule del tipo

$$\xi + i\eta = \varphi(s), \quad \xi - i\eta = \bar{\psi}(t).$$

Abbiamo così trovato di nuovo le varietà di scorrimento già considerate di passaggio. Naturalmente però i due sistemi di funzioni $\varphi(s)$ e $\bar{\psi}(t)$ possono ridursi a sistemi di valori costanti: sarà opportuno includere anche questi casi nel concetto delle « varietà di scorrimento », chiamandoli *varietà di scorrimento improprie*. Così tutte le varietà caratteristiche (e fra loro tutti i punti complessi) daranno tutte le varietà di scorrimento improprie.

XII. *Le varietà di SEGRE sono quelle, le cui immagini reali sono costituite da TUTTE le coppie ξ', ξ'' di punti reali di due spazi sinettici $S'_{2r'}$ e $S''_{2r''}$:*

$$\xi'_i = \psi_i(\bar{t}_1 \dots \bar{t}_{r'}), \quad \xi''_i = \varphi_i(s_1 \dots s_{r''}).$$

*Nella varietà euclidea V_{2n} esse coincidono colle varietà di scorrimento, che sono generate in due modi per mezzo di varietà caratteristiche *).*

Ora vediamo che il Teorema VII, che già era una generalizzazione del Teorema II, può generalizzarsi ancora come segue:

XIII. *Una qualunque V_r è contenuta in una varietà di SEGRE ben determinata.*

Su di questa s'appoggiano tutte le varietà di SEGRE appoggiate sulla V_r .

È chiaro che tutta la teoria delle varietà sinettiche può estendersi alle varietà di SEGRE, la cui dimensione complessa non è ristretta ai numeri pari. La dimensione complessa della varietà di SEGRE individuata da una V_r non può superare il numero $2r$; si possono definire trasformazioni complesse [più generali delle trasformazioni (reali) sinettiche ed antisinettiche] che permutano fra loro le varietà di SEGRE; e via discorrendo. Noi non vogliamo trattenerci su queste generalizzazioni; ci basterà rilevare un'osservazione evidente:

*) Negli accennati casi speciali, l'uno degli scorrimenti (a r'' e r' parametri complessi) o ambedue si riducono all'identità.

XIV. *Le varietà reali di SEGRE sono le varietà sinettiche.*

Ecco un complemento essenziale del Teorema IX: Si potrebbe pensare che la nostra definizione delle *varietà sinettiche* fosse troppo ristretta; che ci fossero delle altre varietà reali, godenti, nel campo complesso, delle stesse proprietà, tranne l'esser dotate di tratti reali. *Tali varietà non esistono.*

Ritornando ora sul Teorema VII, consideriamo il secondo caso estremo, supponendo $\rho = r$, $r \leq n$ (ed in primo luogo $r = n$). Una V_r reale od uno spazio S_r od un campo elementare C_r , ecc., per cui $\rho = r$, li chiameremo *ordinari* (e tutti gli altri straordinari). Così tutti gli S_1 e tutti gli S_2 *non sinettici* sono ordinari. Uno S_n è ordinario, se non v'è vincolo sinettico $F(z_1, \dots, z_n) = 0$ fra le coordinate complesse dei suoi punti, ecc. Lo spazio $y_1 = 0, \dots, y_n = 0$, per es., è ordinario.

Rileviamo da prima il teorema:

XV. *Se due regioni ordinarie, parti di campi C_n , C'_n ORDINARI nello spazio S_{2n} , sono riferite univocamente l'una all'altra per mezzo di una corrispondenza analitica arbitraria (il che può sempre farsi esprimendole tutt'e due mediante gli stessi parametri $\sigma_1, \dots, \sigma_n$), esiste sempre una sola trasformazione sinettica ed una sola trasformazione antisinettica, le quali valgono a stabilire la data corrispondenza fra le due regioni.*

Questo è una semplice applicazione del Teorema II. Nel primo caso basta sostituire le n variabili complesse z_k colle $2n$ variabili complesse z_k, z'_k ; nel secondo caso si procede in un modo quasi identico.

Confrontando le due asserzioni del Teorema XV, troviamo:

XVI. *Ogni campo C_n ORDINARIO determina in un suo intorno una « riflessione antisinettica », vale a dire, una trasformazione antisinettica (di necessità involutoria) riproduttiva di tutti i punti del C_n .*

Naturalmente questa riflessione è collegata al C_n in modo invariabile rispetto al gruppo sinettico ampliato. Per trovarla, basta qui ancora sostituire nelle formule

$$z_k = x_k(\sigma_1, \dots, \sigma_n) + i y_k(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

le variabili reali σ_μ con valori vicini complessi e coi loro coniugati

$$\bar{t}_\mu = \sigma_\mu - i \tau_\mu, \quad t_\mu = \sigma_\mu + i \tau_\mu.$$

I punti

$$z' = x(\bar{t}) + i y(\bar{t}), \quad z'' = x(t) + i y(t)$$

così trovati riempiono nello S_{2n} due regioni (identiche) a $2n$ dimensioni, includenti il C_n , e si corrispondono nella riflessione cercata.

È chiaro che già nel gruppo sinettico tutte queste riflessioni equivalgono al *conjugio*

$$X_k = x_k, \quad Y_k = -y_k,$$

che è la riflessione determinata dallo spazio ordinario

$$y_1 = 0, \dots, y_n = 0.$$

Ma i teoremi precedenti ci conducono ad un punto di vista più elevato:

XVII. Una qualunque varietà V_n REALE ED ORDINARIA determina univocamente una trasformazione antisinettica simmetrica. I punti reali ζ' , ζ'' corrispondenti in questa trasformazione sono le immagini dei punti complessi della V_n . Se la V_n ha tratti reali S_n , S'_n , ..., contenenti i campi elementari C_n^1 , C_n^2 , ..., tutte le riflessioni determinate da questi sono contenute nell'unica trasformazione simmetrica individuata dalla V_n .

La riflessione determinata da un qualunque campo elementare dello spazio S_n potrà proseguirsi analiticamente, pel tramite di coppie di punti *reali*. Questa continuazione analitica reale comprende non solo tutte le riflessioni, individuate (nei loro intorni) dagli altri campi elementari dello stesso S_n , ma anche quelle che vengano determinate dai campi elementari d'un qualsivoglia altro spazio S'_n , non ostante il fatto che questi spazi sono connessi colla S_n solamente pel tramite di punti *immaginari*.

Tutte queste proprietà sono invariabili rispetto al gruppo sinettico ampliato. Quindi esse devono ritrovarsi nella teoria delle $V_{2\rho}$ generiche. Arriviamo così, per esempio, ad una generalizzazione del Teorema XV:

XVIII. Per stabilire una qualsiasi trasformazione puntuale sinettica o antisinettica fra due $S_{2\rho}$, $S'_{2\rho}$ sinettici, basta ricavarne due regioni regolari di campi C_ρ , C'_ρ ORDINARI, e farle corrispondere analiticamente.

Segue il corollario che tutti i C_ρ ordinari equivalgono al campo

$$y_1 = 0, \dots y_n = 0, \quad x_{\rho+1} = 0, \dots x_n = 0.$$

Ma questo campo o spazio contiene solamente dei campi e spazi ordinari. Dunque:
Tutti gli spazi portanti un campo elementare ordinario, sono ordinari.

Nello stesso modo potremmo generalizzare i Teoremi XVI, XVII, ed anche pervenire ad ulteriori generalizzazioni. Applichiamo invece il nostro metodo a provare il teorema di LEVI-CIVITA.

Designiamo con φ e ψ due funzioni analitiche reali dei parametri $\sigma_1, \dots \sigma_n$ aventi un campo comune di esistenza $\{\sigma\}$. Continuiamo queste funzioni nel vicino campo complesso $\{t\}$, e designiamo con u e v le funzioni complesse risultanti. Se $\zeta = x(\sigma) + iy(\sigma)$ è una regione *ordinaria* riferita allo stesso campo $\{\sigma\}$, o ad una parte $\{\{\sigma\}\}$ di esso, $\zeta = x(t) + iy(t)$ sarà lo S_{2n} , o una regione di esso. La funzione complessa

$$w(t) = u(t) + iv(t)$$

si ridurrà per i punti della regione data [corrispondenti al campo $\{\{\sigma\}\}$] ai valori

$$w(\sigma) = \varphi(\sigma) + i\psi(\sigma).$$

Dunque:

XIX. Per determinare completamente una qualsivoglia funzione $w = u + iv$ delle variabili complesse $\zeta_1, \dots \zeta_n$, basta conoscere i valori della funzione nei punti di una qualunque regione ORDINARIA a n dimensioni, purchè questa entri nel campo di esistenza della funzione w .

I valori φ e ψ , a cui si riducono le funzioni reali u e v nell'intorno d'un punto

della regione data, possono essere prefissati come funzioni analitiche ARBITRARIE dei parametri rappresentativi della regione.

Ne viene il corollario che $w = 0$, se $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Arriviamo più brevemente alla stessa conclusione partendo dal Teorema II, sostituendovi n e ρ con $n + 1$, r con n , e z_{n+1} con w .

Naturalmente, l'arbitrarietà nella scelta delle funzioni φ e ψ deve prendersi colle debite precauzioni. Esse devono avere un campo comune di esistenza nella regione considerata. Se i valori della funzione $u + iv$ sono conosciuti in una regione regolare generica (a r dimensioni), la funzione rimane determinata completamente o in parte, cioè per una regione d'un $S_{2\rho}$ sinettico ben determinato, ma non fuori di questo spazio. Se la regione data non è ordinaria, cioè, se la sua dimensione r supera il numero ρ , i valori ridotti φ e ψ non possono scegliersi in modo arbitrario.

Ecco infine un complemento:

XX. Se i valori ridotti $\varphi + i\psi$ della funzione w (di cui parla il teorema precedente) sono reali ($\psi = 0$), la funzione deve assumere valori coniugati $u - iv$ e $u + iv$ nelle coppie di punti z' , z'' , che sono determinate dalla regione assunta.

(Veggansi i Teoremi XVI e XVII).

Ciò vale, naturalmente, in quanto coincidono i campi di esistenza della funzione e delle dette coppie, le quali devono proseguirsi insieme (pel tramite degli stessi punti) partendo dai punti della regione data e dai valori assegnati φ e ψ ($= 0$).

*
* *

Tali sono i teoremi generali che volevo sviluppare. In una Nota complementare — in parte storica — mi propongo di trattare di casi speciali e di applicazioni geometriche.

Firenze, 23 marzo 1906.

E. STUDY.