1. Feste Körper lösen sich besser als flüssige.
2. Bei ein und derselben Temperatur geben erstere nur eine gesättigte Lösung, letztere aber zwei.
3. Gesättigte Lösungen fester Körper bilden sich bei den Sättigungstemperaturen, Lösungen aber, welche die gelöste Substanz beim Abkühlen flüssig ausscheiden, entstehen immer bei Temperaturen, welche höher liegen, als die Temperatur der Sättigung.
4. Isomere Lösungen unterscheiden sich durch ihre Entstehungsweise, ihre Zersetzungstemperatur und ihre Zersetzungsproducte.
5. Uebersättigte Lösungen haben zwei Zersetzungstemperaturen: eine, bei welcher die Zersetzung möglich ist, und eine andere, bei welcher die Zersetzung unumgänglich stattfinden muss.
6. Die Temperatur, bei welcher ein fester Körper in Gegenwart von Wasser schmilzt, ist der Uebergangspunkt (point de transition), welcher dem Uebergang der Lösung des festen Körpers in die Lösung des Wassers in ebendenselben, aber im geschmolzenen Zustande befindlichen Körper entspricht.

**XI. *Erwiderung auf die Bemerkungen des Lord Rayleigh über meine Ohmbestimmung;
von F. Hinstedt.***

In dem Januarhefte des Phil. Mag. für 1886 hat Lord Rayleigh einen Aufsatz publicirt, in welchem er einige Punkte meiner oben genannten Arbeit bespricht, in der Absicht, über diese eine „Discussion“ zu veranlassen. Ich gehe um so lieber auf eine solche Discussion ein, resp. beantworte die mir gestellten Fragen, als auch ich der Ansicht bin, dass die Differenzen von fast ausnahmslos nur wenigen Tausendsteln, welche die Resultate der neueren Versuche noch aufweisen, nur auf diesem Wege werden in etwas noch vielleicht

verkleinert werden können. Lord Rayleigh hat den erwähnten Aufsatz geschrieben auf Grund der Mittheilung, welche in den Ber. d. Berl. Akad. vom 23. Juli 1885 über meine Ohmbestimmung veröffentlicht ist, ohne die ausführlichere Publication¹⁾ zu kennen, vielmehr in der freundlichen Absicht, es mir zu ermöglichen, bei einer solchen gleich auf die in Frage kommenden Punkte näher eingehen zu können. Ich glaube dies erwähnen zu sollen, weil sich in der ausführlicheren Mittheilung in der That schon einige genauere Angaben über die angeregten Fragen finden.

Der erste Punkt, welchen Lord Rayleigh bespricht, betrifft den Disjunctur. Rayleigh hat selbst daran gedacht, die Summation der inducirten Ströme in ihrer Wirkung auf das Galvanometer für eine Ohmbestimmung zu verwenden, den Gedanken aber fallen lassen, weil er schon in früheren Jahren mit einem Stimmgabelunterbrecher ungünstige Erfahrungen gemacht hat. Es handelte sich damals um die Aufgabe, einen Condensator abwechselnd zu laden und zu entladen, und wurde hierzu genau die Vorrichtung benutzt, welche Hr. Klemenčič²⁾ zu demselben Zwecke benutzte und beschrieben hat. Eine electricisch getriebene Stimmgabel trägt an jedem ihrer Zinken einen von ihr isolirten Platindraht; gehen bei den Schwingungen die Zinken der Gabel auseinander, so taucht der Draht an der unteren Zinke in ein Quecksilbergefäß und verbindet dadurch den Condensator mit den Polen einer Batterie, schwingen die Zinken gegeneinander, so taucht der obere Draht in ein zweites Quecksilbergefäß und ermöglicht die Entladung des Condensators durch ein Galvanometer. Wie schon erwähnt, hat Lord Rayleigh mit dem Apparate keine brauchbaren Resultate erhalten, „die Galvanometerablenkung blieb oft Minuten lang vollkommen constant, änderte sich dann aber plötzlich.“

Hierzu muss ich mir die folgenden Bemerkungen erlauben. Inwieweit ein Stimmgabelunterbrecher zu den eben ge-

1) F. Himstedt, Ber. d. Naturf. Ges. Freiburg i. Br. 1. Heft 1. u. Wied. Ann. 26, p. 547. 1885. Das letztere wird im Folgenden mit „l. c.“ citirt werden.

2) Klemenčič, Wiener Ber. 83. p. 606. 1881.

nannten Versuchen geeignet ist, vermag ich nicht zu beurtheilen, ich habe zwar selbst kürzlich einige wenige derartige Versuche damit angestellt und vollkommen constante Ablenkungen erhalten, aber selbstverständlich genügen diese nicht, ein allgemeineres Urtheil zu stützen. Für genaue Messungen von Inductionsströmen halte ich einen Stimmgabelunterbrecher nicht für geeignet und habe deshalb einen solchen bei meinen Beobachtungen auch nicht benutzt. Ich habe sehr viel Zeit und Mühe darauf verwendet, den Stimmgabelunterbrecher für eine Ohmbestimmung brauchbar zu machen, jedoch ohne Erfolg. Ich habe es allerdings wohl an einigen Tagen erreicht, mehrere Stunden durchaus constante Werthe zu erhalten, aber wieder an anderen war die Erscheinung genau so, wie Lord Rayleigh sie beschreibt, Minuten lang constant, plötzliches Schwanken, wieder constant und so fort. Ich habe geglaubt, dies hauptsächlich auf die Erschütterungen der Quecksilberoberfläche zurückführen zu müssen, weil die Unregelmässigkeiten seltener wurden, nachdem ich der Stimmgabel und dem Quecksilbergefässe voneinander getrennte, feste Aufstellungen gegeben hatte, und weil jede nachweisbare Erschütterung stets jene Unregelmässigkeiten zur Folge hatte. In letzter Instanz wird die Unbrauchbarkeit des Stimmgabelunterbrechers für Inductionsströme aber wohl durch einen anderen Umstand hervorgerufen, nämlich durch die ausserordentlich kleine Contactfläche. Der Contact wird dadurch bewirkt, dass eine feine Spitze in das Quecksilber eintaucht. Bei mittelstarken Schwingungen, und solche geben die besten Resultate, macht die Spitze Excursionen von etwa 4 mm, taucht also auf dem Punkte der grössten Elongation nur etwa 2 mm tief ein. Dass hierbei alle möglichen kleinen Zufälligkeiten sehr leicht den Widerstand des Contactes ändern oder die Dauer desselben zu kurz werden lassen können für die volle Ausbildung der Inductionsströme, liegt auf der Hand, und ich hebe dies besonders hervor, weil hierin ein wesentlicher Unterschied besteht zwischen dem Stimmgabel-disjunctor und dem von mir benutzten. Bei dem letzteren gehen Schneiden aus amalgamirtem Platinblech ohne irgend welchen Stoss oder eine Erschütterung durch Quecksilber-

kuppen. Die hierbei vom Quecksilber berührte Oberfläche der Schneide beträgt bei meinem Apparate ca. 20 Quadratmillimeter, und diese ist bei jedem Stromschluss während eines Weges von über 2 cm mit dem Quecksilber in Berührung. Ich habe nie mehr als 13 Unterbrechungen in der Secunde benutzt, unter diesen Verhältnissen aber auch ausnahmslos sicheren Contact gehabt. Ich habe nie ein Verhalten der Galvanometernadel beobachtet, wie es oben bei dem Stimmgabelunterbrecher beschrieben ist. Ich hatte Theile des Apparates in der letzten Zeit zu anderen Versuchen benutzt, ich habe denselben jetzt wieder zusammengestellt und wieder die vollständig constanten Ablenkungen erhalten.¹⁾

Der zweite von Lord Rayleigh berührte Punkt betrifft die Quermagnetisirung der Galvanometernadeln. Wenn man durch ein Galvanometer einen Strom schickt, so wird dadurch die Nadel desselben abgelenkt, ausserdem aber auch der Magnetismus derselben geändert werden, denn in der ab-

1) Da ich an dem Apparat seit seiner Beschreibung (Wied. Ann. 26. p. 562. 1885) noch einige kleine Veränderungen vorgenommen habe, lasse ich hier eine genaue Beschreibung des für die Ohmbestimmung benutzten Exemplars folgen. In eine Holzscheibe von 25 cm Durchmesser, deren Mitte für die Rotationsaxe durchbohrt ist, sind sechs concentrische Rinnen eingedreht, von den mittleren Durchmessern von 6,5 cm, 9,5 cm, 12,5 cm, 16 cm, 19,5 cm, 22,5 cm. Jede Rinne ist 0,6 cm breit, 0,8 cm tief. Die ganze Scheibe ist darauf mit Paraffin übergossen, und sind die Rinnen Nr. 1, 2, 3 und 6 wieder ausgedreht, doch nur so tief, dass das einzufüllende Quecksilber nirgends mit dem Holze in Berührung treten kann. Die Rinnen 4 und 5 sind durch stehen gelassene Paraffinwände jede in 24 Abtheilungen getheilt; von diesen haben die ungeraden Nummern jede eine Länge von $\frac{1}{24}$ des betreffenden Umfanges und communiciren durch Quercanäle in der Richtung der Radien mit den Rinnen Nr. 3, resp. 6. Dadurch ist für alle Kuppen des einzufüllenden Quecksilbers die gleiche Höhe gesichert und eine einfache Stromzuleitung gegeben. Die Abtheilungen mit geraden Nummern sind natürlich um die Dicke der Paraffinzwischenwände kleiner und haben den Zweck, kleine etwa von den Schneiden mitgerissene und dann abfallende Quecksilbertröpfchen aufzunehmen. Die Paraffinzwischenwände sind flach förmig; dicht über dem tiefsten Punkte weg gehen die Schneiden. Die letzteren sind aus Platinblech und sorgfältig amalgamirt. Das Quecksilber in den Rinnen wurde vor jedem Versuche gereinigt, sodass die Kuppen gut spiegelnd blank waren.

gelenkten Lage fällt eine Componente der magnetisirenden Kraft zusammen mit der Längsaxe des Magnets, die andere weit beträchtlichere mit der dazu senkrechten Queraxe. Beide Componenten können eine Aenderung des magnetischen Momentes in der Richtung der Längsaxe bewirken.¹⁾ Hat das Galvanometer nur einen Magnet, so kann jener Umstand nicht von Einfluss sein auf die zu beobachtende Ablenkung, denn diese ist unabhängig von dem magnetischen Moment.²⁾ Haben wir es aber mit einem astatischen Systeme zu thun, so kann sich durch verschiedene Aenderung der einzelnen Magnete sehr wohl die Empfindlichkeit des Galvanometers ändern. Nun hatte ich zwei nahe gleiche Ablenkungen am Galvanometer zu messen, die eine hervorgebracht durch einen constanten Strom, die zweite durch eine Summe von Inductionsströmen. Wenn nun die letzteren eine andere magnetisirende Kraft ausübten, als der constante Strom, so würde hierdurch das Glied $\text{tg } \alpha_2 / \text{tg } \alpha_1$ der Formel V³⁾ mit einem Fehler behaftet werden. Allerdings lassen die Beobachtungen des Hrn. Oberbeck⁴⁾ dies von vornherein als sehr unwahrscheinlich erscheinen, immerhin wünschte ich noch besonders darthun zu können, dass dieser Punkt für meine Messungen nicht von Belang wäre, und habe deshalb eine Anzahl von Beobachtungen mit verhältnissmässig dicken Magneten (Durchmesser 0,6 cm), die übrigen mit sehr dünnen Magneten (Durchmesser kleiner als 0,1 cm) angestellt. Im ersten Falle müsste ein eventuell aus jenen Verhältnissen entspringender Fehler sehr viel beträchtlicher sein, als im letzteren. Die Resultate waren aber dieselben. In dem der Berl. Akad. vorgelegten Berichte hatte ich hierüber geschrieben: „Um zu untersuchen, ob die durch das Galvanometer geschickten Inductionsströme eine andere Quermagnetisirung

1) Vgl. W. Siemens, Wied. Ann. 14. p. 635. 1882 u. W. H. Schultze, Wied. Ann. 24. p. 643. 1885.

2) Es ist im Folgenden immer die Voraussetzung gemacht, dass die Stromintensität nur klein, also nicht im Stande ist, die Pole des Magnets umzukehren.

3) l. c. p. 548.

4) Oberbeck, Wied. Ann. 21. p. 672. 1884.

der Magnete hervorriefen, als constante Ströme von sonst gleicher galvanometrischer Wirkung, wodurch das Verhältniss $\text{tg } \alpha_2 / \text{tg } \alpha_1$ fehlerhaft würde, wurde eine Reihe von Versuchen ausgeführt mit Magneten, deren Durchmesser 0,6 cm waren . . .“ Lord Rayleigh meint, dass es auf „Quermagnetisirung“ hier wohl nicht ankomme, sondern es handle sich um den Einfluss der axialen Componente. Nach den oben citirten Versuchen von Schultze ist dies wohl nicht ganz zutreffend, vielmehr dürfte hiernach gerade die senkrecht zur Axe wirkende Componente, die mindestens zehnmal grösser ist als die axiale, denn die Ablenkungen aus dem Meridian betrugen nur 3—4 Grad, die grössere Bedeutung haben, und mit Rücksicht hierauf habe ich in dem kurzen Bericht nur diese erwähnt.

Lord Rayleigh bemerkt weiter, dass die Frage sich einfach entscheiden lasse, indem man die Nadel des Galvanometers etwa durch einen genäherten Magnet ablenkt, und nun durch das Galvanometer die Oeffnungs- und Schliessungsinductionsströme zusammen hindurchschickt. Galvanometrisch sind diese dann einander genau entgegengesetzt gleich. Bleibt nun die Nadel unverändert in ihrer Lage, so folgt daraus, dass sie auch entgegengesetzt gleiche (eventuell verschwindend geringe) magnetisirende Wirkung ausüben, und da ihre Däter eine sehr verschiedene ist, so darf man dann vielleicht weiter annehmen, dass auch constante Ströme und Inductionsströme sich in der Beziehung nicht unterscheiden. Ich muss gestehen, dass mir diese ebenso einfache als sinnreiche Methode, die Frage auf directerem Wege zu entscheiden, leider entgangen ist, doch darf ich wohl darauf aufmerksam machen, dass indirect gerade dieser Beweis auch durch meine Versuche erbracht ist, denn ich habe jede Beobachtung sowohl mit Schliessungs- als mit Oeffnungsinductionsströmen ausgeführt, und beide Arten haben die gleichen Resultate ergeben. Nachträglich habe ich jetzt natürlich auch die directe Prüfung ausgeführt und mich überzeugt, dass die Nadel dabei vollkommen in Ruhe bleibt.

Als dritten Punkt bespricht Lord Rayleigh die Vortheile und Nachtheile, welche die Anwendung eines so ge-

nannten unendlich langen Solenoids mit sich bringt. Nachdem er die ersteren anerkannt hat, bemerkt er zunächst, dass ihm die Anwendung eines Holzcyinders keine sehr grosse Sicherheit zu gewähren scheine. Ich kann offen gestehen, dass auch ich von vornherein Holz lieber vermieden hätte, und ich habe deshalb zuerst Marmor versucht. Allein alle Proben, die ich mir hier verschaffen konnte, erwiesen sich als eisenhaltig,¹⁾ Dann versuchte ich verschiedene Messingsorten. doch auch diese waren eisenhaltig, und da mir nicht so bedeutende Mittel zur Verfügung standen, um das Metall aus reinen Bestandtheilen giessen lassen zu können, auch andere Versuche mit Porcellan, sowie mit einer gepressten Masse fehlschlügen, benutzte ich Holz und, ich darf behaupten, mit durchaus gutem Erfolge. Ich möchte aber auf zweierlei nochmals aufmerksam machen: 1. die Walze ist zusammengeleimt und abgedreht im Jahre 1868. Es ist also von vornherein sehr unwahrscheinlich, dass dieselbe nach mehr als 16 Jahren noch merkliche Veränderungen erleiden sollte. Dass die wechselnde Feuchtigkeit der Luft keinen messbaren Einfluss auf den Durchmesser ausübte, habe ich durch directe Versuche nachgewiesen. 2. die Walze ist nur mit einer Drahtlage umwickelt, ihr Durchmesser kann also jeder Zeit von neuem gemessen werden.²⁾ Zwei auf genau die gleiche Art ausgeführte Messungen kurz vor Beginn, resp. nach Schluss der Beobachtungen ergaben für den Durchmesser den 12. Februar 1885 23,3190 cm, resp. den 9. Juli 1885 23,3194 cm. Dieselbe Messung ausgeführt nahezu sechs Monate nach der letzten ergab am 5. April 1886 23,3202 cm.

Meine Versuchsanordnung ist also gerade nach dieser Richtung hin so günstig, wie kaum eine andere, denn keinem

1) Auf die Fehler, zu welchen der Eisengehalt der benutzten Materialien Veranlassung geben kann, ist von Hrn. Dorn, *Electrotechn. Ztschr.* 5. p. 493. 1894 besonders aufmerksam gemacht worden, und hat Lord Rayleigh selbst darauf hingewiesen, *Wied. Ann.* 24. p. 214. 1885, wie schwierig es unter Umständen ist, die durch den Eisengehalt bedingten Correctionen an dem Resultate anzubringen.

2) Auch Hr. Rowland hat die Ansicht ausgesprochen, dass unter diesen Verhältnissen die Anwendung von Holz durchaus einwurfsfrei sei. *Amer. Journ. of Science and Arts.* 1878. p. 430.

der Beobachter ausser Hrn. Roiti und Lorenz, welche ebenfalls unendlich lange Solenoide benutzten, dürfte es möglich sein, den Durchmesser der primären Rolle, d. i. eine der wichtigsten Grössen, in so einfacher und sicherer Weise zu controliren, und dabei haben die meisten von ihnen doch ebenfalls Holzrollen verwendet.

Der Berechnung meiner Beobachtungen sind die Formeln zu Grunde gelegt:

$$r = n \cdot V \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}, \quad V = 4\pi^2 R^2 k \cdot b (1 + 2a).$$

Hierin bezeichnet k die Anzahl der Drahtwindungen auf der Längeneinheit des benutzten Solenoids. Dieselbe wurde bestimmt, indem die Gesamtzahl der Windungen dividirt wurde durch die von ihnen bedeckte Länge des Solenoids:

$$k = \frac{2864}{135,125} = 21,195.^1)$$

Lord Rayleigh bemerkt hierzu: „Entweder ist hierbei die stillschweigende Voraussetzung gemacht, dass der Draht vollkommen gleichmässig aufgewickelt ist, oder dass wir es in der Formel nur mit dem Mittelwerthe k zu thun haben. Das letztere ist offenbar falsch, denn der mittlere Theil des Solenoids, der nahezu in der Ebene der secundären Spirale liegt, übt nothwendiger Weise eine grössere Wirkung aus, als die entfernteren Theile.“ Des weiteren spricht er seine Zweifel darüber aus, dass eine genügend gleichmässige Umwicklung sich herstellen lasse. Der Einwand ist an sich vollkommen berechtigt und von grosser Bedeutung, und es bedarf einer besonderen Untersuchung, um festzustellen, wie weit, resp. ob die Resultate speciell meiner Messungen von demselben getroffen werden.

Denken wir uns zu dem Zwecke die primäre Rolle durch Schnitte senkrecht zur Längsaxe in eine grössere Anzahl von Abtheilungen zerlegt und bezeichnen das Potential einer solchen unter der Voraussetzung, dass die Anzahl der Windungen auf der Längenheit gleich 1 sei, mit M_i , so wird bei

1) l. c. p. 558

der Windungszahl λ_i dasselbe sein $\lambda_i M_i$, und wir erhalten das Potential der ganzen primären Rolle auf die secundäre durch Addition der einzelnen Ausdrücke in der Form $\Sigma(\lambda_i M_i)$. Dieser Werth ist gegen den obigen Einwand vollkommen sicher, und es entsteht deshalb die Frage, wie weicht derselbe ab von demjenigen Werthe für das Potential, welchen die Formel für das Solenoid ergibt, d. h. bei der hier gewählten Bezeichnungsweise von $\lambda_m \Sigma(M_i)$, wo λ_m das Mittel aus allen einzelnen λ ist.

Um die Grosse M zu berechnen, gehen wir aus von dem Potentiale zweier paralleler Kreisströme mit den Radien R und r , deren Ebenen einen Abstand b voneinander besitzen. Dasselbe ist nach Maxwell:¹⁾

$$M = 4\pi \frac{\sqrt{R \cdot r}}{c} \{(2 - c^2) F - 2E\}^2, \quad c = \frac{2\sqrt{R \cdot r}}{\sqrt{(R+r)^2 + b^2}},$$

wo F und E die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung vom Modul c sind. Bezeichnen wir mit M_{xy} den Werth von M , wenn $b + x - y$ an die Stelle von b tritt, so ergibt sich das Potential zweier coaxialer Rollen von den Längen 2η und 2β , deren Mittelpunkte den Abstand b voneinander haben:

$$M = \mu \int_{-\eta}^{+\eta} \int_{-\beta}^{+\beta} M_{xy} dx dy,$$

wo die Anzahl der Windungen auf der Längeneinheit für die primäre gleich 1, für die secundäre gleich μ angenommen ist. Es ist hierbei die Voraussetzung gemacht, dass auch die secundäre Rolle aus nur einer Drahtlage besteht, was für die hier anzustellende Betrachtung ohne wesentliche Bedeutung ist. Durch Entwickeln nach der Taylor'schen Reihe erhalten wir:

$$M = 2\eta 2\beta \mu \left\{ M + \frac{\eta^2 + \beta^2}{3!} \frac{\partial^2 M}{\partial b^2} + \left(\frac{\eta^4 + \beta^4}{5!} + \left(\frac{\eta\beta}{3!} \right)^2 \right) \frac{\partial^4 M}{\partial b^4} \dots \right\},$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial b^2} = \pi \frac{c}{\sqrt{Rr}} \left\{ F \left(2 - \frac{d}{q} \right) - \frac{E}{1-c^2} \left(d - \frac{2e}{q} \right) \right\},$$

1) Maxwell, Electricity and Magnetism 2. p. 310.

2) Bei Maxwell ist das Vorzeichen nicht richtig gegeben.

$$\frac{\partial^4 M}{\partial b^4} = -\frac{3}{2} \frac{\pi}{1-c^2} \left(\frac{c}{\sqrt{Rr}} \right)^3 \left\{ F \left(\frac{d}{2} - 2 \frac{3e-c^4}{\varrho} + \frac{1}{2} \frac{f}{\varrho^2} \right) - \frac{E}{1-c^2} \left(e - \frac{g}{\varrho} + \frac{h}{\varrho^2} \right) \right\},$$

$$d = 2 - c^2, \quad e = 1 - c^2 + c^4, \quad f = 10 - 15c^2 + 21c^4 - 8c^6, \\ g = 6 - 9c^2 + 19c^4 - 8c^6, \quad h = 5 - 10c^2 + 33c^4 - 28c^6 + 8c^8,$$

$$\varrho = \frac{4Rr(1-c^2)}{b^2 c^2}$$

Die vorstehend gegebenen Formeln genügen für die mittleren Abtheilungen des Solenoids nicht mehr, da die Convergenz der Reihen dann eine zu langsame ist. Ich habe nirgend in der einschlägigen Literatur eine Formel entwickelt gefunden, nach der man das Potential zweier coaxialer Rollen berechnen könnte, deren Radien sehr nahe einander gleich, und deren Mittelpunkte einen nur geringen Abstand von einander besitzen, resp. zusammenfallen. Die von mir benutzte Formel verdanke ich einer gütigen Mittheilung des Hrn. Prof. Stickelberger. Man erhält dieselbe in folgender Weise. Das Potential zweier Kreisströme:

$$M = \iint \frac{\cos s}{\varrho} ds ds_1$$

lässt sich für den Fall, dass die Ebenen derselben einander parallel und einen Abstand δ voneinander besitzen, durch Ausführen einer Integration in die Form bringen:

$$M = 4\pi \int_0^\pi \frac{Rr \cos \psi d\psi}{\sqrt{R^2 + r^2 + \delta^2 - 2Rr \cos \psi}}$$

Es gehöre nun der Kreis vom Radius R der primären, der vom Radius r der secundären Rolle an. Wir legen den Anfangspunkt eines Coordinatensystems in den Mittelpunkt der letzteren und lassen die X -Axe zusammenfallen mit der gemeinsamen Axe beider Rollen. Die Mittelpunkte derselben mögen einen Abstand b voneinander besitzen, die Länge der primären 2η , die der secundären 2β sein. Ist für den Mittelpunkt des Kreises R die Abscisse $x = x_1$, für r $x = x_{11}$, sodass $\delta = x_1 - x_{11}$, so erhalten wir für das Potential der beiden Rollen auf einander:

$$M = \mu \int_{b-\eta-\beta}^{b+\eta+\beta} M dx_1 dx_{11}$$

$$\text{oder: } M = 4\pi\mu \int_{b-\eta-\beta}^{b+\eta+\beta} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{Rr \cos \psi \, dx_1 \, dx_{11} \, d\psi}{\sqrt{R^2 + r^2 + (x_1 - x_{11})^2 - 2Rr \cos \psi}},$$

wo wieder 1 und μ die Anzahl der Windungen auf der Längeneinheit der primären und secundären Rolle bezeichnen. Eine partielle Integration nach ψ ergibt unter Berücksichtigung der Grenzen:

$$M = 4\pi\mu \int_{b-\eta-\beta}^{b+\eta+\beta} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{(Rr)^2 \sin^2 \psi \, dx_1 \, dx_{11} \, d\psi}{(R^2 + r^2 + (x_1 - x_{11})^2 - 2Rr \cos \psi)^{3/2}}.$$

Führt man jetzt die Integrationen nach x_1 und x_{11} aus, so lässt M sich in die Form bringen:

$$M = 4\pi\mu \{A_1 - A_1' + A_2 - A_2'\},$$

$$\text{wo: } A_1 = \int_0^\pi (Rr)^2 \sin^2 \psi \frac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi + (b + \eta + \beta)^2}}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi} d\psi.$$

A_2 entsteht aus A_1 , indem $-b$ gesetzt wird statt $+b$;
 A_1' aus A_1 ,
 A_2' aus A_2 }, indem $\eta - \beta$ gesetzt wird statt $\eta + \beta$.

Es ist deshalb nur noch nöthig, A_1 nach bekannten Methoden auf die Normalformen zurückzuführen, und man findet:

$$A_1 = \frac{1}{8}w \left[F(c) \left\{ (R-r)^2 + (b + \eta + \beta)^2 - 3 \frac{(R-r)^2 (R+r)^2}{w^2} \right\} \right. \\ \left. + E(c) \{ 2(R^2 + r^2) - (b + \eta + \beta)^2 \} - 3 \frac{(R-r)^2 (b + \eta + \beta)^2}{w^2} II_1(\pi/2, n) \right] \\ w = \sqrt{(R+r)^2 + (b + \eta + \beta)^2}$$

$F(c)$ und $E(c)$ sind die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung vom Modul $c = (2\sqrt{Rr}/w)$, $II_1(\pi/2, n)$ das vollständige elliptische Integral dritter Gattung:

$$II_1(\pi/2, n) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \Delta \varphi}, \quad n = \frac{-4Rr}{(R+r)^2}.$$

Für die Rechnung ist es am bequemsten, dies durch die erste Gattung und Θ -Functionen auszudrücken. Durch bekannte Transformationen¹⁾ erhält man:

1) Vgl. Durège, Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig 1861. Auch die Bezeichnungsweise jenes Lehrbuches ist hier benutzt.

$$H_1(\pi/2, n) = \frac{R+r}{R-r} \frac{w}{b+\eta+\beta} F(c) \left\{ \frac{\pi u}{2F(c)F(c')} + \frac{\Theta'(uc')}{\Theta(uc')} \right\}$$

$$u = F(\varphi, c') = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c'^2 \sin^2 \varphi}} \quad c' = \sqrt{1-c^2}.$$

Es wird mithin:

$$A_1 = \frac{1}{6} w \left[F(c) \left\{ (R-r)^2 + (b+\eta+\beta)^2 - 3 \frac{(R-r)^2 (R+r)^2}{w^2} \right\} \right. \\ \left. + E(c) \{ 2(R^2 + r^2) - (b+\eta+\beta)^2 \} \right. \\ \left. - 3 \frac{(R+r)(R-r)(b+\eta+\beta)}{w} F(c) \left\{ \frac{\pi u}{2F(c)F(c')} + \frac{\Theta'(uc')}{\Theta(uc')} \right\} \right] \cdot 1)$$

Von der Reihenentwicklung für Θ'/Θ braucht man bei der ausserordentlich raschen Convergenz einzig und allein das erste Glied; das zweite beträgt bei den Verhältnissen hier im ungünstigsten Falle nur den 10^{-8} Theil des ersten.

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \frac{2\pi}{F(c')} \frac{q \sin\left(\frac{\pi u}{F(c')}\right)}{1 - 2q' \cos\left(\frac{\pi u}{F(c')}\right)} \quad q = e^{-\pi \frac{F(c)}{F(c')}}.$$

Die Formeln sehen etwas umständlich aus sind aber für die Ausrechnung gar nicht so unbequem, und, was die Hauptsache ist, sie sind auf alle noch so eng übereinander gewickelte Rolle anwendbar, ja, je enger die Rollen übereinander liegen, desto kleiner wird das dritte, das eigentlich unbequeme Glied, sodass man in vielen Fällen dasselbe ganz wird fortlassen dürfen.

Für die numerische Berechnung habe ich angenommen, dass das Solenoid in 27 Abtheilungen von je 5 cm Länge getheilt sei. Diejenige Abtheilung, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des ganzen Solenoids zusammenfällt, ist im Folgenden immer mit L_0 bezeichnet, die übrigen, von der Mitte aus nach beiden Enden, sind mit

1) Vielleicht ist es von Interesse, darauf aufmerksam zu machen, dass die meisten der in der Formel vorkommenden Ausdrücke eine einfache geometrische Bedeutung haben. So sind $b+\eta+\beta$, $b+\eta-\beta$ etc. die Abstände je zweier Endflächen der Rollen voneinander $\sqrt{(R+r)^2 + (b+\eta+\beta)^2}$ $\sqrt{(R-r)^2 + (b+\eta+\beta)^2}$ etc. sind die Diagonalen eines durch die Rollen gelegten Längsschnittes und damit e das Verhältniss zweier Diagonalen.

$L_1 L_2 \dots$, resp. $L_1' L_2' \dots$ bezeichnet. Ich habe nun die M aller 27 Abtheilungen für vier verschiedene secundäre Rollen berechnet. $r = 12,315$ ist der kleinste, $r = 15,5$ der grösste mittlere Radius der von mir benutzten Rollen. $r = 13,254$ und $r = 13,986$ sind die Rollen, welche längs des Solenoids verschoben wurden.¹⁾ In den Angaben für M ist der allen gemeinsame Factor $4\pi\mu$ fortgelassen. Die Werthe für $L_1' L_2' \dots$ sind identisch mit denen für $L_1 L_2 \dots$. Für die elliptischen Integrale wurden die Tafeln von Legendre benutzt.

$$r = 12,315 \text{ cm.}$$

$$M = \begin{array}{c} L_0 \quad L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 \quad L_5 \quad L_6 \quad L_7 \quad L_8 \quad L_9 \quad L_{10} \quad L_{11} \quad L_{12} \quad L_{13} \\ 526,49 \quad 267,67 \quad 122,55 \quad 68,22 \quad 40,20 \quad 25,16 \quad 16,61 \quad 11,36 \quad 7,37 \quad 5,94 \quad 4,46 \quad 3,16 \quad 2,46 \quad 2,14 \end{array}$$

$$r = 15,5 \text{ cm}$$

$$M = \begin{array}{c} L_0 \quad L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 \quad L_5 \quad L_6 \quad L_7 \quad L_8 \quad L_9 \quad L_{10} \quad L_{11} \quad L_{12} \quad L_{13} \\ 349,58 \quad 256,00 \quad 147,67 \quad 87,32 \quad 54,11 \quad 35,18 \quad 23,74 \quad 16,64 \quad 11,98 \quad 8,87 \quad 6,73 \quad 5,22 \quad 4,09 \quad 3,32 \end{array}$$

$$r = 13,254 \text{ cm.}$$

$$M = \begin{array}{c} L_0 \quad L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 \quad L_5 \quad L_6 \quad L_7 \quad L_8 \quad L_9 \quad L_{10} \quad L_{11} \quad L_{12} \quad L_{13} \\ 451,23 \quad 273,08 \quad 134,05 \quad 72,83 \quad 44,53 \quad 28,15 \quad 18,64 \quad 12,90 \quad 9,22 \quad 6,80 \quad 5,15 \quad 3,62 \quad 3,00 \quad 2,49 \end{array}$$

$$r = 13,986 \text{ cm.}$$

$$M = \begin{array}{c} L_0 \quad L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 \quad L_5 \quad L_6 \quad L_7 \quad L_8 \quad L_9 \quad L_{10} \quad L_{11} \quad L_{12} \quad L_{13} \\ 413,99 \quad 270,09 \quad 139,61 \quad 79,06 \quad 47,79 \quad 30,41 \quad 20,34 \quad 14,10 \quad 10,08 \quad 7,45 \quad 5,69 \quad 4,40 \quad 3,52 \quad 2,74 \end{array}$$

Um die Ausdrücke $\Sigma(\lambda_i M_i)$ und $\lambda_m \Sigma(M_i)$, auf welche es hier ankommt, bilden zu können, fehlen jetzt noch die λ , d. h. für die einzelnen Abtheilungen, in welche wir uns das Solenoid zerlegt denken, die Anzahl der Windungen auf der Längeneinheit. Um diese zu bestimmen, wurden zwei Mikroskope mit Ocularmikrometern unveränderlich miteinander verbunden und der Abstand correspondirender Theilstriche in denselben bestimmt durch Einstellen auf den controlirten Glasmaassstab zu 5,081 cm, darauf wurde mit denselben die Breite von je 106 nebeneinander liegenden Windungen gemessen und daraus die folgenden Werthe für die λ abgeleitet.

1) Vgl. Versuche 24a bis 28b der Tabelle I. c.

$$\lambda = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} L_{18} & L_{12} & L_{11} & L_{10} & L_9 & L_8 & L_7 & L_6 & L_5 & L_4 & L_3 & L_2 & L_1 & L_0 \\ \hline 21,04 & 21,18 & 21,06 & 21,26 & 21,24 & 21,18 & 21,19 & 21,22 & 21,36 & 21,18 & 21,16 & 21,17 & 21,24 & 21,18 \end{array}$$

$$\lambda = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} L_1' & L_2' & L_3' & L_4' & L_5' & L_6' & L_7' & L_8' & L_9' & L_{10}' & L_{11}' & L_{12}' & L_{13}' & - \\ \hline 21,12 & 21,22 & 21,25 & 21,18 & 21,10 & 21,15 & 21,32 & 21,19 & 21,27 & 21,25 & 21,19 & 21,18 & 21,13 & - \end{array}$$

$\lambda_m = 21,193.$

Die Unsicherheit in den Zahlen beträgt ± 1 der zweiten Decimale und rührt hauptsächlich daher, dass man weder auf die Mitte eines Drahtes, noch auf die Punkte, in welchen zwei aufeinander folgende Windungen sich berühren, mit grösserer Sicherheit einstellen kann. Berechnet man nun das Potential des Solenoids auf die secundäre Rolle einmal mit Benutzung der Solenoidformel, das zweite mal unter Berücksichtigung der für die Unterabtheilungen gefundenen λ , so erhält man zwei Werthe, die im ungünstigsten Falle, nämlich für $r = 12,315$, um nicht ganz 0,0003, für $r = 15,5$ aber nur um 0,00015 ihres Betrags voneinander abweichen, und damit ist also zunächst in ganz directer Weise der Nachweis geführt, dass meine Messungen von jenem Einwande nur unerheblich getroffen werden.

Man kann die Frage aber auch noch in etwas anderer Weise angreifen, und die anzustellende Ueberlegung ist es, auf welche sich die Anordnung meiner l. c. beschriebenen Versuche stützt, und aus welcher sich auch ersehen lässt, dass ich von vornherein versucht habe, auf den in Frage kommenden Punkt Rücksicht zu nehmen. Denkt man sich die primäre Rolle in drei angenähert gleich lange Theile $A B C$ zerlegt, sodass B aus den oben mit $L_0 L_1 \dots L_5 L_1' \dots L_6'$ bezeichneten Unterabtheilungen A , resp. C aus $L_6 \dots L_{13}$, resp. $L_6' \dots L_{13}'$ bestehen würde, und berechnet mit Hülfe der für die M und λ gegebenen Tabellen die Potentiale von $A B C$ auf die secundäre Rolle, so ergibt sich, dass A und C zusammengenommen zu dem Potentiale des ganzen Solenoids, je nach dem Radius der secundären Rolle, nur einen Beitrag von 6 bis höchstens 10 Proc. liefern. Wenn also die Wickelung nicht ganz besonders ungleichmässig ist, wird man für diese Theile statt der einzelnen λ der Unterabtheilungen ohne Bedenken das Mittel aus denselben nehmen dürfen.

Andererseits, wenn man auf anderem Wege nachweisen kann, dass die Mitte B in sich gleichmässig gewickelt ist, also die einzelnen λ ihrer Unterabtheilungen sehr nahe einander gleich sind, wird man auch aus ihnen das Mittel nehmen dürfen, und wenn endlich dieses übereinstimmt mit dem oben erwähnten Mittel für A und C , so wird man berechtigt sein, für das ganze Solenoid das Hauptmittel zu nehmen. Um zu untersuchen, ob man für die Mitte B das Mittel ihrer λ nehmen darf, habe ich 1. Versuche mit secundären Rollen von verschiedenem Radius angestellt und 2. dieselbe secundäre Rolle bei einigen Versuchen um die Mitte des Solenoids gelegt, bei anderen 10 cm mehr nach dem einen, resp. anderen Ende desselben verschoben.¹⁾ Dass hierdurch die Mitte in ausreichender Weise untersucht wird, lässt sich durch einfache Zahlenrechnungen aus den oben mitgetheilten Tabellen nachweisen. Es ist mithin nur noch zu prüfen, wie weit stimmt der Mittelwerth der λ genommen für die Mitte B überein mit dem Mittelwerthe für die Enden A und C . Dies habe ich leider früher übersehen. Ich habe die Mitte in der eben angegebenen Weise auf die gleichmässige Wickelung untersucht, und ich hatte gelegentlich der oben erwähnten Bestimmung des $k = 2864/135,125$ mich überzeugt, dass die beiden Hälften des Solenoids in der Windungszahl übereinstimmten, damit ist aber die geforderte Uebereinstimmung des B mit $A + C$ noch nicht bewiesen. Um diese Untersuchung jetzt auszuführen, wurden mit dem Comparator die Längen von $A B C$ bestimmt und mit den erhaltenen Zahlen dividirt in die Anzahl der betreffenden Windungen. Es wurde gefunden für:

$$\begin{array}{lcl} A & \lambda = 21,178 & \} \text{ Mittel} \\ B & \lambda = 21,220 & \} 21,199 \end{array} \quad B \quad \lambda = 21,191.$$

Hiernach würde also der von mir bei der Berechnung des Potentials begangene Fehler nahe +2,5 auf 10000 betragen, während die erste Betrachtung +1,5 bis +2,7 auf 10000 ergab, oder wenn man die Correctionen bei allen einzelnen Versuchen anbringt, im Mittel +2,— auf 10000. Ich

1) Vgl. die Tabelle l. c. p. 573 u. 574.

muss hier jedoch darauf aufmerksam machen, dass diese grosse Uebereinstimmung zum Theil eine zufällige ist, denn, wie schon erwähnt, ist die Unsicherheit in der Bestimmung der λ bei der ersten Berechnung eine zu grosse, als dass man dem absoluten Werthe der Correction eine so hohe Bedeutung beilegen könnte. Bei der zweiten Betrachtung ist diese Unsicherheit natürlich weit geringer, denn die für ABC bestimmten λ sind nahe bis auf ± 1 der dritten Decimale sicher. Jedenfalls zeigen aber beide Betrachtungen, dass der begangene Fehler innerhalb der Grenzen der übrigen Beobachtungsfehler liegt, und dass die Correction sicher nicht mehr als 3 auf 10000 beträgt, sodass der von mir erhaltene Werth 1 S.-E. = 0,94356 Ohm höchstens in 1 S. E. = 0,94327 übergehen würde, also 1 Ohm entspräche einer Quecksilbersäule von 1 qmm Querschnitt und 106,01 cm Länge.

Zum Schluss noch eine Bemerkung. Lord Rayleigh hat am Ende der erwähnten Publication die Ansicht ausgesprochen, dass eine Versuchsanordnung mit einem sogenannten unendlich langen Solenoid überhaupt für die Rechnung wohl sehr bequem, für den Versuch selbst aber nur scheinbar so empfehlenswerth wäre. In dieser Allgemeinheit kann ich dem Ausspruche nicht beistimmen. Allerdings gibt es Fälle, in denen man zweifelhaft sein kann, ob die Vortheile oder Nachtheile bei der Anwendung eines Solenoids überwiegen. Das rührt aber daher, dass für die Beurtheilung solcher Fälle noch ganz andere Punkte in Frage kommen, wie denn z. B. bei den von Lord Rayleigh citirten Versuchen des Hrn. Mascart über das electrochemische Aequivalent des Silbers¹⁾ der Umstand ins Gewicht fällt, dass durch die Anwendung eines langen Solenoids dort die Belastung der Wage erheblich vermehrt wird, während die electromagnetische Wirkung nicht in gleichem Maasse zunimmt. Bei den Versuchen mit Inductionsströmen hat aber auch Lord Rayleigh gegenüber den Vortheilen nur das Bedenken der Windungszahl geltend gemacht. Dem kann man

1) Lord Rayleigh, Journ. de phys. 3. p. 283. 1884
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXVIII.

aber unter allen Umständen begegnen, wenn man entweder, wie dies z. B. Hr. Lorenz ¹⁾ gethan hat, in die Walze einen Schraubengang für den aufzuwickelnden Draht einschneiden lässt, oder aber man kann die Gleichmässigkeit der Wickelung in ausgiebigster Weise untersuchen, resp. die Correctionen bestimmen, indem man die secundäre Rolle an mehrere verschiedene Stellen der primären bringt und verschiedene secundäre Rollen benutzt. Beide Manipulationen halte ich immer noch für einfacher, als die Bestimmung des Inductionscoëfficienten zweier Drahtspulen, deren jede eine grössere Anzahl von Drahtlagen besitzt, denn hierbei muss man von zwei Rollen die Dimensionen, besonders aber die mittleren Radien und die gegenseitigen Abstände mit grösster Genauigkeit bestimmen, während man dort von der secundären Rolle diese Grössen nur in erster Annäherung zu kennen braucht, bei dem Solenoid aber, da man nur eine Drahtlage hat, den Radius mit aller erforderlichen Genauigkeit und weit leichter messen kann.

Physik. Inst. Freiburg i. Br.

XII. Ueber die Abhängigkeit der Elasticität, des Kautschuks von der Temperatur und ihre Beziehung zum thermischen Ausdehnungscoëfficienten; von L. Graetz.

1) Der Kautschuk ist für die mechanische Wärmetheorie deshalb eine so wichtige Substanz, weil seine thermoelastischen Eigenschaften denen der übrigen bekannten Körper entgegengesetzt sind, und weil daher der Zusammenhang zwischen den thermischen und elastischen Eigenschaften, den die Thermodynamik verlangt, bei ihm in ganz auffälliger Weise, schon durch das Vorzeichen, bestätigt werden kann. Wie Kautschuk verhalten sich nur noch Guttapercha und Muskelfasern. In der That fand Joule bekanntlich, dass entsprechend der Erwärmung des Kautschuks bei der Ausdehnung, umgekehrt gespannter Kautschuk bei Erwärmung

1) Lorenz, Wied. Ann. 25. p. 16. 1885.