IV.

*Gedrängter Auszug aus der geometrischen
Attractionslehre, und ihrer Anwendung
auf die Erde.*

von

HOSZFELD, Lehr. d. Math. an dem Forstinstitut
zu Dreißigacker.

(Fortsetzung von S. 107.)

Zweiter oder praktischer Theil,
welcher die Figur, Abplattung, Gröſſe und innere
Beschaffenheit der Erde untersucht.

§. 15.

*Von der Figur der Erde und einigen Vorichtsregeln
bei Gradmessungen und Pendelbeobachtungen.*

Hier wird unter andern dargethan, daß die
Erde ihrer Hauptform nach ein Ellipsoid seyn müsse.

§. 16.

*Geometrische Formeln zur Berechnung der verschiede-
nen Theile des Erdellipsoides. Taf. I. Fig. 7.*

Es sey AEDBHA ein Meridian des Erdellipsoi-
des; A und B die Pole, und DH die Lage des Ae-

quators; C der Mittelpunkt und E ein gegebener Ort der Erde; die Halbaxe $AC=a$; der Aequatorial-Halbmesser $CD=c$; der wahre Breitenwinkel $ECD=\varphi^\circ$; FE die Ordinate $=y$, und FC die Abscisse $=x$; EG die Normale und FG die Subnormale zum Punct E; endlich der scheinbare Breitenwinkel oder die Polhöhe $ELD=\alpha^\circ$; so ist

I. die Entfernung des Punctes E vom Mittelpuncte C, nämlich

$$EC=b=\frac{ac}{\sqrt{[a^2+(c^2-a^2)\sin^2\varphi]}};$$

II. die Ordinate $FE=b.\cos.\varphi=\frac{ac.\cos.\varphi}{\sqrt{[a^2+(c^2-a^2)\sin^2\varphi]}};$

III. die Abscisse $FC=b.\sin.\varphi=\frac{ac.\sin.\varphi}{\sqrt{[a^2+(c^2-a^2)\sin^2\varphi]}};$

IV. die Subnormale $FG=\frac{FC.c^2}{a^2}=\frac{c^3.\sin.\varphi}{a\sqrt{[a^2+(c^2-a^2)\sin^2\varphi]}};$

V. die Normale $EG=\frac{c}{a}\sqrt{\left(\frac{a^4+(c^2-a^2)\sin^2\varphi}{a^2+(c^2-a^2)\sin^2\varphi}\right)};$

VI. $\tan\alpha=\frac{c^2}{a^2}\tan\varphi$, und $\tan\varphi=\frac{a^2}{c^2}\tan\alpha$.

VII. $\sin^2\varphi=\frac{a^4\sin^2\alpha}{c^4-(c^2-a^2)\sin^2\alpha}=$

$$\begin{aligned} & \sin^2\alpha + \left(\frac{c^2-a^2}{a^2}\right) \cdot (-2\sin^2\alpha + 2\sin^4\alpha) \\ & + \left(\frac{c^2-a^2}{a^2}\right)^2 \cdot (3\sin^2\alpha - 7\sin^4\alpha + 4\sin^6\alpha) + \dots \end{aligned}$$

VIII. Die Länge des Bogens $DE=z=$

$$\begin{aligned} & a \left[\frac{x\pi}{180} + \frac{c^2-a^2}{a^2} \left(-\frac{3}{8}\sin.2\alpha + \frac{x\pi}{4.180} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{c^2-a^2}{a^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2.72}\sin.4\alpha + \frac{3}{5.2}\sin.2\alpha - \frac{3\alpha\pi}{64.180} \right) \right] \end{aligned}$$

wo D unter dem Aequator und E unter α° Polhöhe liegt, und 90° auf den Quadranten gerechnet sind.

IX. Das Stück Meridian EM zwischen α und β Grad Polhöhe:

$$EM = \frac{a(\beta - \alpha)\pi}{180} + a \frac{(c^2 - a^2)}{a^2} \times$$

$$\left[-\frac{1}{4} \cos(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha) + \frac{(\beta - \alpha)\pi}{4 \cdot 180} \right] + a \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} \right)^2 \times$$

$$\left[\frac{1}{128} \cos 2(\beta + \alpha) \sin 2(\beta - \alpha) + \frac{1}{16} \cos(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha) - \frac{3(\beta - \alpha)\pi}{64 \cdot 180} \right]$$

X. Der Werth W eines Breitengrades unter γ° mittlerer Breite:

$$W = a \left[\frac{\pi}{180} + \frac{(c^2 - a^2)}{a^2} \left(-\frac{1}{4} \cos 2\gamma \sin 1^\circ + \frac{\pi}{4 \cdot 180} \right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} \right)^2 \left(\frac{1}{128} \cos 4\gamma \sin 2^\circ \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{16} \cos 2\gamma \sin 1^\circ - \frac{5\pi}{64 \cdot 180} \right) + \dots \right] \text{ oder}$$

$$W = \frac{c\pi}{180} - \frac{c}{4} \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} \right) \left[\frac{\pi}{180} + 3 \cos 2\gamma \sin 1^\circ \right]$$

$$+ \frac{c}{64} \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \cos 4\gamma \sin 2^\circ \right.$$

$$\left. + 36 \cos 2\gamma \sin 1^\circ + \frac{13\pi}{180} \right] +$$

XI. Wenn der gemessene Bogen $EM = b$; der Unterschied der Polhöhe zwischen E und M $= \delta$ und der Punct N in der mittlern Polhöhe γ° liegt, so ist der Werth eines Breitengrades in

$$N = \frac{b}{\delta} \left[1 + \frac{(c^2 - a^2)}{a^2} \cdot \frac{180 \cdot 3}{4\pi} \cdot \cos 2\gamma \cdot \left(\frac{\sin \delta}{\delta} - \sin 1^\circ \right) + \dots \right]$$

XII. der Meridian - Quadrant:

$$DA = \frac{1}{2} \pi \cdot a$$

$$\left[1 + \frac{1}{3} \frac{c^2 - a^2}{a^2} - \frac{1 \cdot 3 (c^2 - a^2)^2}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 (c^2 - a^2)^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot a^6} + \dots \right]$$

XIII. die ganze Oberfläche Q eines Ellipsoides:

$$Q = \frac{2a^2 c \pi}{(c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \text{Log. nat.} \left[\frac{(c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{a} + \frac{c}{a} \right] + 2 \cdot c^3 \pi; \text{ oder}$$

$$Q = 4ac \pi \left[1 + \frac{(c^2 - a^2)}{2 \cdot 5 \cdot a^2} - \frac{1 \cdot (c^2 - a^2)^2}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot (c^2 - a^2)^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot a^6} + \dots \right]$$

Und so weiter.

Die Herleitung mancher dieser Formeln, welche noch nicht genug bekannt sind, wird gezeigt.

§. 17.

Unter welcher Polhöhe man einen Breitengrad messen müßte, um dadurch die Länge eines Aequatorialgrades zu erhalten.

Der Werth eines Aequatorialgrades ist $= \frac{c \cdot \pi}{180}$ und soll auch dem Werthe in X des vor §. gleichkommen, daher

$$\frac{c \pi}{180} = \frac{c \pi}{180} - \frac{c(c^2 - a^2)}{4 \cdot a^2} \cdot \left(3 \cos. 2 \gamma \sin. 1^\circ + \frac{\pi}{180} \right) \text{ etc.,}$$

aus welcher Gleichung folgt

$$\gamma = 54^\circ 44' 10''$$

Es wird daher auf einer Ebene im Schleswigischen, im Preussischen, oder noch besser in der Ferne vom Meere, z. B. in der Gegend von Willna oder Smolensk, wo die Flütze günstig sind, eine Gradmessung am vortheilhaftesten zu veranstalten seyn, etc.

§. 18.

Hier wird ein Verzeichniß einiger gemessenen Grade des Erdmeridians beygelegt; manche Resultate der Gradmessung werden verbessert, und sodann wird aus der Uebersicht dieser Resultate dargethan, daß die wahre Länge eines Breitengrades unter $47^{\circ} 28'$ Breite 57071 Toisen betrage etc.

§. 19.

Berechnung der beiden Axen und der Abplattung der Erde aus den Gradmessungen.

Hier wird dargethan, daß die kleine Erdaxe höchstens = 3265000 Toisen seyn kann, und daß die Abplattung sehr verschieden ausfalle, je nachdem man sie aus zwei verschiedenen Gradmessungen herleitet. Der Grund zu dieser Verschiedenheit in den Resultaten der Gradmessung ist aufgedeckt worden.

§. 20.

Entwicklung der specifischen Erdmasse und der Beschleunigung der Schwere bei einer gleichförmigen Verdichtung. Fig. 7.

Bei einer gleichförmigen Verdichtung ist nach §. 10. VIII. die Anziehungskraft des Erdellipsoides auf den Punct E, nach der Richtung EP oder IK, = $4\pi\pi a \sin.\phi.p$, und

$$p = \frac{1}{3} + \frac{c^2 - a^2}{a^2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{8} \sin.^2\phi \right) +$$

$$\left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} \right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{80} - \frac{1}{20} \sin.^2\phi + \frac{1}{8} \sin.^4\phi \right) + \dots$$

Ferner ist nach §. 10. VII. die Anziehungskraft auf denselben Punct E nach der Richtung EI $= 4m\pi a \cos. \varphi . q$, und

$$q = \frac{1}{3} + \frac{c^2 - a^2}{a^2} \left(\frac{r}{10} - \frac{\sin^2 \varphi}{6} \right) + \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} \right)^2 \times \\ \left(-\frac{1}{2} \frac{r^3}{80} - \frac{\sin^2 \varphi}{20} + \frac{1}{8} \sin^4 \varphi \right) + \dots$$

Wenn sich aber die Erde in 23 Stunden 56 Minuten und 4 Secunden $= 86164$ Secunden $= t$ Secunden um ihre Axe AB dreht, so wird die Anziehungskraft nach der Richtung EI um $\frac{EF \cdot 2\pi^2}{t^2} = \frac{2\pi^2 \cdot ac \cos. \varphi}{t^2 \sqrt{[a^2 + (c^2 - a^2) \sin^2 \varphi]}}$ aus bekannten mechanischen Gründen vermindert. Es ist demnach bei der Rotation der Erde die Kraft nach EI

$$= 4m\pi a \cos. \varphi . q - \frac{2\pi^2 \cdot ac \cos. \varphi}{t^2 \sqrt{[a^2 + (c^2 - a^2) \sin^2 \varphi]}}.$$

Da hingegen wird die Kraft nach EP oder IK, weil sie senkrecht auf EF oder DC steht, durch die Rotation nicht verändert.

Wenn ES eine zum Puncte E gezogene Tangente ist, so wird die directe Anziehungskraft EK, welche nichts anders als die Beschleunigung der Schwere g am Puncte E ist, auf dieser Tangente senkrecht stehen, oder in der Richtung der Normale EG liegen. Es ist aber $\triangle EIK \sim \triangle EFG$, daher 1) $EI : IK = EF : FG$ oder

$$4m\pi a \cos. \varphi . q - \frac{2\pi^2 \cdot ac \cos. \varphi}{t^2 \sqrt{[a^2 + (c^2 - a^2) \sin^2 \varphi]}} : 4m\pi a \sin. \varphi . p \\ = \frac{ac \cos. \varphi}{\sqrt{[a^2 + (c^2 - a^2) \sin^2 \varphi]}} : \frac{c^2 \sin. \varphi}{a \sqrt{[a^2 + (c^2 - a^2) \sin^2 \varphi]}} \quad (\S. 16)$$

II. $FG:GE=IK:KE$ oder (§. 16)

$$\frac{c^3 \sin. \varphi}{a \sqrt{[a^2 + (c^2 - a^2) \sin.^2 \varphi]}} : \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^4 + (c^4 - a^4) \sin.^2 \varphi}{a^2 + (c^2 - a^2) \sin.^2 \varphi}} \\ = 4m\pi a \sin. \varphi . p : g.$$

Aus erster Gleichung folgt:

$$m = \frac{15 \pi a^2}{4 t^2 (c^2 - a^2)} \cdot \left[1 + \frac{5}{7} \frac{c^2 - a^2}{a^2} + \frac{7}{49} \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} \right)^2 + \dots \right] ^*)$$

und aus zweiter Gleichung,

$$g = \frac{4m\pi a}{3} \left[1 + e \left(-\frac{1}{15} + \frac{1}{2} \sin.^2 \varphi \right) + \right. \\ \left. + e^2 \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{15} \sin.^2 \varphi - \frac{1}{8} \sin.^4 \varphi \right) + \dots \right]$$

wo $e = \frac{c^2 - a^2}{a^2}$ ist, oder, für m den Werth substituirt:

$$g = \frac{5\pi^2 a}{t^2 e} \left[1 + e \left(\frac{1}{75} + \frac{1}{2} \sin.^2 \varphi \right) + \right. \\ \left. + e^2 \left(-\frac{1}{1500} + \frac{1}{150} \sin.^2 \varphi - \frac{1}{8} \sin.^4 \varphi \right) + \dots \right]$$

oder, da $a = \frac{c}{(1+e)^{\frac{1}{2}}}$ ist,

$$g = \frac{5\pi^2 c}{t^2 e} \left[1 + e \left(\frac{1}{75} + \frac{1}{2} \sin.^2 \varphi \right) + \right. \\ \left. + e^2 \left(-\frac{1}{1500} + \frac{1}{150} \sin.^2 \varphi - \frac{1}{8} \sin.^4 \varphi \right) + \dots \right]$$

Dies ist die Beschleunigung unter φ° wahrer Breite; wollen wir die Beschleunigung unter α° Polhöhe finden, so müssen wir (nach §. 16. VI.)

*) Die Entwicklung des Werthes von m hier zu zeigen, wäre zu umständlich, da ein jeder Mathematiker diesen leicht selbst entwickeln kann. Uebrigens verbürge ich die Richtigkeit nicht nur dieser, sondern aller folgenden Formeln.

$\sin.^2\varphi = \sin.^2\alpha + e \cdot (-2\sin.^2\alpha + 2\sin.^4\alpha) + e^2 (5\sin.^2\alpha - 7\sin.^4\alpha + 4\sin.^6\alpha) + \dots$ setzen. Nach gehöriger Substitution ist unter α° Polhöhe:

$$g = \frac{5\pi^2 a}{t^2 \cdot e} \left[1 + e \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{2} \sin.^2\alpha \right) + e^2 \left(-\frac{1}{8} \frac{2}{5} - \frac{1}{4} \frac{7}{8} \sin.^2\alpha + \frac{3}{8} \sin.^4\alpha \right) + \dots \right]$$

Oder:

$$g = \frac{5\pi^2 c}{t^2 \cdot e} \left[1 + e \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{2} \sin.^2\alpha \right) + e^2 \left(-\frac{1}{8} \frac{2}{5} - \frac{1}{4} \frac{7}{8} \sin.^2\alpha + \frac{3}{8} \sin.^4\alpha \right) + \dots \right]$$

Wir wollen über den Werth von m und g folgende Bemerkungen machen.

1) Bei einer gleichartigen Verdichtung ist m eine constante Größe.

2) Bei gleicher Abplattung oder bei gleichem Werthe des Bruchs $e = \frac{c^2 - a^2}{a^2}$, steht die specifische Masse mit dem Quadrate der Umwälzungszeit t im *umgekehrten* — oder, mit dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit im *geraden* Verhältnisse.

3) Bei einerlei Umschwungszeit muß die Abplattung desto stärker seyn, je lockerer die Masse, oder je geringer die specifische Masse ist.

4) Bei einerlei specifischen Massen muß die Abplattung ungefähr mit dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit im Verhältnisse stehen.

5) Bei einerlei Abplattung steht die Beschleunigung der Schwere im zusammengesetzten Verhältnisse mit der specifischen Masse und der Axe des Ellipsoides.

6) Bei einerlei Abplattung ist die spezifische Masse desto dichter je größer die Beschleunigung — und desto lockerer, je größer der Durchmesser oder die Axe des Ellipsoides ist.

7) Bei einerlei Abplattung nimmt die Beschleunigung in größerer Breite immer mehr zu, am Pol selbst ist sie am stärksten.

8) Bei gleicher Beschleunigung ist die Abplattung desto größer, je größer der Durchmesser des Ellipsoides ist.

Und dergleichen Bemerkungen mehr.

§. 21.

Entwicklung des Verdichtungs factors und der Beschleunigung der Schwere bei einer parabolischen Verdichtung.

Bei einer parabolischen Verdichtung ist vermöge §. 13. VI. die Anziehungskraft des Ellipsoides nach der Richtung EP oder IK, parallel zur Axe, $= 4\pi \sin \Phi . a . m v$, wo $m = (pa)^{\frac{1}{2}}$ und $v = \frac{2}{3} + e(\frac{1}{11} - \frac{1}{7} \sin.^2 \Phi) + e^2(-\frac{1}{44} - \frac{1}{6} \sin.^2 \Phi + \frac{3}{2} \frac{1}{5} \sin.^4 \Phi) + \dots$ ist.

Ferner ist die Anziehungskraft ohne Rotation nach der Richtung EI oder PK parallel zum Aequator: $4\pi \cos \Phi \text{ amu}$, wo $u = [\frac{2}{3} + e(\frac{1}{11} - \frac{1}{7} \sin.^2 \Phi) + e^2(\dots)]$

Da aber nach vor. §. durch die Rotation diese letzte Kraft um $\frac{2\pi^2}{t^2} \times \frac{ac \cos. \Phi}{\sqrt{[a^2 + (c^2 - a^2) \sin.^2 \Phi]}}$ vermindert wird, so bleibt die Kraft nach EI nur

$$= 4\pi \cos. \Phi . \text{amu} - \frac{2\pi^2 ac \cos. \Phi}{t^2 \sqrt{[a^2 + (c^2 - a^2) \sin.^2 \Phi]}}$$

Nun muß, wie im vorigen Paragraphen, die directe Kraft nach EK oder die Beschleunigung g der Schwere in der Normale EG liegen. Daher ist

1) $EF : FG = EI : IK$ oder EP , oder

$$\frac{ac \cdot \cos. \varphi}{\sqrt{(a^2 + (c^2 - a^2) \sin.^2 \varphi)}} : \frac{c^3 \sin. \varphi}{a \sqrt{(a^2 + (c^2 - a^2) \sin.^2 \varphi)}} = \\ \left[4\pi \cos. \varphi amu - \frac{2\pi^2 ac \cos. \varphi}{t^2 \sqrt{(a^2 + (c^2 - a^2) \sin.^2 \varphi)}} \right] : 4\pi \sin. \varphi amv.$$

2) $FG : GE = IK : KE$ oder

$$\frac{c^3 \sin. \varphi}{a \sqrt{(a^2 + (c^2 - a^2) \sin.^2 \varphi)}} : \frac{c \sqrt{(a^2 + (c^2 - a^2) \sin.^2 \varphi)}}{a \sqrt{(a^2 + (c^2 - a^2) \sin.^2 \varphi)}} = \\ = 4\pi \sin. \varphi amv : g.$$

Aus welchen beiden Gleichungen durch Entwicklung folgt:

$$m = \frac{77 \cdot \pi}{16 t^2 e} \left[1 + e \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \sin.^2 \varphi \right) + \right. \\ \left. e^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \frac{2}{3} \sin.^2 \varphi - \frac{1}{3} \frac{2}{3} \sin.^4 \varphi \right) + \dots \right]$$

und

$$g = \frac{11 \cdot \pi^2 a}{2 t^2 e} \left[1 + e \left(\frac{9}{15} + \frac{1}{3} \frac{2}{3} \sin.^2 \varphi \right) + \right. \\ \left. e^2 \left(-\frac{2}{4} \frac{5}{8} \frac{9}{8} + \frac{5}{2} \frac{6}{7} \frac{5}{8} \sin.^2 \varphi - \frac{2}{3} \frac{5}{8} \frac{2}{3} \frac{7}{8} \sin.^4 \varphi \right) + \dots \right]$$

wo φ die Abweichung ist, oder

$$g = \frac{11 \cdot \pi^2 a}{2 t^2 e} \left[1 + e \left(\frac{3}{15} + \frac{1}{3} \frac{2}{3} \sin.^2 \alpha + \right. \right. \\ \left. \left. e^2 \left(-\frac{2}{4} \frac{5}{8} \frac{9}{8} - \frac{5}{2} \frac{6}{7} \frac{5}{8} \sin.^2 \alpha + \frac{1}{3} \frac{7}{8} \frac{5}{8} \frac{8}{8} \sin.^4 \alpha \right) + \dots \right] \right]$$

welches die Beschleunigung unter α Polhöhe ist.

Auch hier finden dieselben Bemerkungen, wie im vorigen Paragr. Statt.

1) Bei einerlei Abplattung und gleicher Umschwungszeit steht die Beschleunigung mit der Axe des Ellipsoides im Verhältnisse.

2) Die Beschleunigung ist desto größer, je kleiner die Abplattung ist, etc.

§. 22.

Entwicklung des Verdichtungs factors und der Beschleunigung der Schwere bei einer Verdichtung von der $\frac{2}{3}$ Potenz.

Wenn man die Resultate in §. 14. VI und V eben so behandelt, wie wir die in §. 10 und 13. VI und VII in den beiden vorhergehenden Paragraphen behandelt haben, so finden wir bei der Verdichtung von der $\frac{2}{3}$ Potenz den Factor $m = \frac{187 \cdot \pi}{361^2 e} [1 + e(\frac{1}{2} \frac{a}{r} + \frac{4}{3} \sin.^2 \varphi) + \dots]$ und die Beschleunigung g der Schwere unter φ° Abweichung oder auch unter α° Polhöhe

$$g = \frac{17 \pi^2 a}{31^2 e} [1 + e(\frac{1}{2} \frac{a}{r} + \frac{4}{3} \sin.^2 \alpha) + \dots]$$

Auch hier finden dieselben Bemerkungen, wie §. 21. Statt.

§. 23.

Entwicklung der Beschleunigung der Schwere bei einer Verdichtung von der ersten Potenz.

Bei dieser Verdichtung müssen wir die trapezoidische Verdichtung §. 12. V und VI zu Grund legen und daselbst $n = 0$ setzen. Wir erhalten nach den dort angegebenen Formeln unter φ° Abweichung

$$\begin{aligned} 1) \text{ die Anziehung nach der Richtung der Axe} \\ k = 4 \pi a m \sin. \varphi [\frac{1}{4} + e(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \sin.^2 \varphi) \\ + e^2(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \sin.^2 \varphi + \frac{2}{3} \sin.^4 \varphi) + \dots] \end{aligned}$$

a) die Anziehung nach der Richtung des Aequators:

$$k = 4 \operatorname{am} \pi \cos. \Phi \left[\frac{1}{4} + e \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2} \sin.^2 \Phi \right) \right. \\ \left. + e^2 \left(-\frac{1}{12} - \frac{7}{96} \sin.^2 \Phi + \frac{1}{192} \sin.^4 \Phi \right) + \dots \right]$$

Behandeln wir nun diese Formeln eben so, wie wir §. 20 die ähnlichen Formeln* (in §. 10. VIII und VII) behandelt haben, so erhalten wir die Beschleunigung g der Schwere unter α° Polhöhe:

$$g = \frac{6a\pi^2}{e t^2} \left[1 + e \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{12} \sin.^2 \alpha \right) \right. \\ \left. + e^2 \left(-\frac{1}{12} - \frac{5}{24} \sin.^2 \alpha + \frac{1}{240} \sin.^4 \alpha \right) + \dots \right]$$

§. 24.

Entwicklung des Verdichtungs factors und der Beschleunigung der Schwere bei einer trapezoidischen Verdichtung.

Eben so finden wir auch, wenn wir die Formeln §. 12. V und VI zu Grunde legen, daß bei einer trapezoidischen Verdichtung

$$m = \begin{cases} \frac{+9g}{4\pi a} \left[1 + e \left(-\frac{1}{7} - \frac{1}{3} \sin.^2 \Phi \right) + \dots \right] \\ \frac{-15\pi}{2t^2 e} \left[1 + e \left(\frac{6}{145} + \frac{1}{4} \sin.^2 \Phi \right) + \dots \right] \text{ und} \end{cases}$$

$$n = \begin{cases} \frac{+45\pi}{2t^2 e} \left[1 + e \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \sin.^2 \Phi \right) + \dots \right] \\ \frac{-15g}{4\pi a} \left[1 + e \left(\frac{1}{7} - \sin.^2 \Phi \right) + \dots \right] \end{cases}$$

Ferner:

$$g = \frac{4ma\pi}{9} \left[1 + e \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \sin.^2 \alpha \right) + \dots \right] + \\ \frac{10a\pi^2}{3t^2 e} \left[1 + e \left(\frac{8}{145} + \frac{1}{2} \sin.^2 \alpha \right) + \dots \right]$$

oder

$$g = \frac{6a\pi^2}{e t^2} [1 + e (\frac{3}{4} + \frac{7}{12} \sin.^2 \alpha) + \dots] \\ - \frac{4na\pi}{15} [1 + e (-\frac{1}{7} + \sin.^2 \alpha) + \dots]$$

Anmerk. Wie man aus diesen Formeln die Größe a und e bestimmen könne, wird weiter unten vorkommen.

§. 25.

Bestimmung des Secundenpendels unter allerlei Verdichtung der Erde.

Es sey die Pendellänge unter α° Breite $= p$, so ist bekanntlich $g = \frac{1}{2} p \pi^2$. Substituirt man diesen Werth für g in die bisher erhaltenen Gleichungen für die Beschleunigung g unter allerlei Verdichtung der Erde, so finden wir

*) 6) bei einer gleichartigen Verdichtung (vermöge §. 20)

$$p = \frac{10a}{t^2 e} [1 + e (\frac{53}{78} + \frac{1}{2} \sin.^2 \alpha) + \dots]$$

7) Bei der Verdichtung von der $\frac{1}{2}$ Potenz (nach §. 21)

$$p = \frac{11a}{t^2 e} [1 + e (\frac{83}{110} + \frac{179}{338} \sin.^2 \alpha) + \dots]$$

8) Bei der Verdichtung von der $\frac{2}{3}$ Potenz (§. 22)

$$p = \frac{34a}{3 \cdot t^2 e} [1 + e (\frac{589}{782} + \frac{435}{782} \sin.^2 \alpha) + \dots]$$

*) Die übrigen Nummern habe ich der Kürze wegen weggelassen. Um die Uebereinstimmung mit dem Manuscripte zu erhalten, habe ich die zu den Formeln gehörigen Nummern beibehalten.

9) Bei der Verdichtung von der einten Potenz
(§. 25.:

$$p = \frac{12a}{1^2e} [1 + e (\frac{3}{4} + \frac{7}{12} \sin.^2\alpha) + \dots]$$

10) Bei der trapezoidilchen Verdichtung, wo m
der äußere und n der innere Verdichtungsgrad, ist
nach §. 24:

$$p = \frac{8ma}{9\pi} [1 + e (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin.^2\alpha) + \dots] +$$

$$\frac{20a}{5.e^2} [1 + e (\frac{8}{15} + \frac{7}{12} \sin.^2\alpha) + \dots]$$

oder

$$12) p = \frac{12a}{e1^2} [1 + e (\frac{3}{4} + \frac{7}{12} \sin.^2\alpha) + \dots] +$$

$$\frac{8na}{15\pi} [1 + e (-\frac{1}{2} + \sin.^2\alpha) + \dots]$$

Man setze $\alpha = \alpha'$ und die zugehörige Pendel-
länge $p = p'$, und suche die *Differenz der Pendel-*
längen zwischen α und α' Grad Polhöhe, so ist

19) Bei einer gleichartigen Verdichtung:

$$p' - p = \frac{5a}{1^2} (\sin.^2\alpha' - \sin.^2\alpha)$$

20) Bei einer Verdichtung von der $\frac{1}{2}$ Potenz:

$$p' - p = \frac{170a}{501^2} (\sin.^2\alpha' - \sin.^2\alpha)$$

21) Bei einer Verdichtung von der $\frac{2}{3}$ Potenz:

$$p' - p = \frac{145.a}{25.1^2} (\sin.^2\alpha' - \sin.^2\alpha)$$

22) Bei der Verdichtung von der ersten Potenz:

$$p' - p = \frac{7a}{1^2} (\sin.^2\alpha' - \sin.^2\alpha)$$

23) Bei einer trapezoidischen Verdichtung:

$$p' - p = \left(\frac{8mae}{27 \cdot \pi} + \frac{35a}{9t^2} \right) (\sin.^2 \alpha - \sin.^2 \alpha') \text{ oder}$$

$$24) p' - p = \left(\frac{7a}{t^2} - \frac{8nae}{15\pi} \right) (\sin.^2 \alpha' - \sin.^2 \alpha). \quad *)$$

Aus diesen fünf letzten Gleichungen folgt der wichtige Satz:

Bei einer jeden Verdichtung, von welcher Function sie auch seyn mag, steht die Differenz der Beschleunigungen oder der Pendellängen unter verschiedenen Breiten, von α und α' Grad, im Verhältniß, wie die Differenz der Quadrate aus den Sinussen ihrer Breitenwinkel.

Ferner folgen aus diesen und den vorhergehenden Gleichungen auch noch die nicht minder wichtigen Sätze:

1) Je größer oder je länger der Secundenpendel ist, desto größer muß bei einerlei Verdichtungsart die Axe a des Erdellipsoides oder desto geringer muß die Abplattung seyn.

2) Je größer die Differenz der Pendellängen ist, desto größer muß bei einerlei Verdichtungsart ebenfalls auch die Axe, oder desto geringer die Abplattung seyn.

3) Je größer die Beschleunigung der Schwere oder je länger der Secundenpendel bei einer glei-

*) Obgleich die folgenden Glieder der unendlichen Reihen, aus welchen diese Formeln stammen, nicht hier angeführt sind, so sind diese Formeln zum Gebrauche doch vollkommen genau, indem die folgenden Glieder gar keinen Werth angeben, der auf Beobachtungen Einfluß haben kann.

chen Axe und Abplattung ist, desto größer ist die Potenz der Verdichtung:

4) Je größer die Verdichtung, desto größer ist die Abplattung.

5) Je größer die Potenz der Verdichtung, desto kleiner ist bei gleicher Belchleunigung die Erdaxe, u. f. f.

§. 26.

Lehrsatz: Wenn an irgend einem Orte Anomalien im Secundenpendel oder in der Gradlänge herrschen, so muß die Gradlänge desto kürzer seyn, je kürzer der Secundenpendel ist, und umgekehrt.

Dieser Lehrsatz wird mathematisch bewiesen.

§. 27.

Verzeichniß einiger beobachteten Pendellängen unter verschiedener Polhöhe, nebst Verbesserung einiger Resultate.

Der Kürze und Folge wegen führe ich nur an: daß die Pendellänge unter dem Aequator wenigstens 439,1 und höchstens 439,2 Par. Lin., unter 45° Polhöhe sehr nahe 440,4, und unter 66° 48' wenigstens 441,15 und höchstens 441,35 Par. Lin. betrage.

§. 28.

Die Dichtigkeit der Erde nahe an der Oberfläche und im Kern derselben ist sehr verschieden.

Dies ergibt sich aus der Formel 19 des 25ten Paragr., wo bei einer gleichartigen Verdichtung an der Rinde und im Kern der Erde:

$$p' - p = \frac{10a}{2t^2} (\sin.^2 x' - \sin.^2 x) \text{ oder}$$

$p - p' = \frac{10a}{4t^2} (\cos.2\alpha - \cos.2\alpha')$ ist, wo a die Halbaxe, t die Umwälzungszeit in Secunden, p die Länge des Secundenpendels unter α° , und p' die Länge desselben unter α Grad Polhöhe vorstellt.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$a = \frac{4t^2(p' - p)}{10(\cos.2\alpha - \cos.2\alpha')}.$$

Man setze $\alpha=0$ und $\alpha'=45^\circ$, so ist $p=439,06$ oder höchstens $=439,21$ Par. Lin.; $p'=440,40$ bis $440,42$; $p' - p$ höchstens $=1,54$ oder wenigstens $=1,21$ Par. L.; und deshalb die Halbaxe $a = \frac{4}{78} \cdot (86164)^2 \times 1,34$ oder wenigstens $= \frac{4}{78} \cdot (86164)^2 \cdot 1,21$ P. L. Nach Toisen findet man den höchsten Werth von $a = 4605775$ und den niedrigsten $= 4158947$. Da aber schon §. 19 erwiesen ist, daß der höchste Werth von a nicht einmal 3269984 Toisen betragen kann, so folgt auch, daß die Erde im Kerne und an der Rinde nicht gleich dicht ist.

§. 29.

Die Erde ist an der äußern Schale dichter als am Kerne.

Angenommen, daß die innere Dichtigkeit am Mittelpunkte $=n$ und die Dichtigkeit nahe an der Oberfläche $=m$ sey, und daß die Dichtigkeit von innen nach außen gleichförmig wachse oder abnehme, so ist (nach §. 25. No. 23 u. 24) die Differenz der Pendellängen p' und p unter α' und α Grad Polhöhe, folgende

$$1) p' - p = \left(\frac{8mae}{27\pi} + \frac{35a}{9t^2} \right) \cdot \sin. 2\alpha' - \sin. 2\alpha \text{ oder}$$

$$p' - p = \left(\frac{8mae}{27\pi} + \frac{35a}{9t^2} \right) \times \left(\frac{\cos. 2x - \cos. 2x'}{2} \right)$$

$$2) p' - p = \left(\frac{7a}{t^2} - \frac{8mae}{15\pi} \right) \cdot \left(\frac{\cos. 2x - \cos. 2x'}{2} \right),$$

wo, wie vorher, a die Erdhalbaxe und t die Umwälzungszeit vorstellt.

Aus erster Gleichung folgt:

$$m = \left[\frac{18(p' - p)}{\cos. 2x - \cos. 2x'} - \frac{35a}{t^2} \right] \frac{3\pi}{8ae}, \text{ und aus der zweiten:}$$

$$n = \left[\frac{-10(p' - p)}{\cos. 2x - \cos. 2x'} + \frac{35a}{t^2} \right] \frac{3\pi}{8ae};$$

und es steht demnach in Proportion:

$$m:n = \left[\frac{18(p' - p)}{\cos. 2x - \cos. 2x'} - \frac{35a}{t^2} \right] : \left[\frac{-10(p' - p)}{\cos. 2x - \cos. 2x'} + \frac{35a}{t^2} \right].$$

Es sey $x=0$; $\alpha'=45^\circ$; $p=439,15$; $p'=440,4$ Par. Lin.; ferner $a=3265000 \times 86 \frac{1}{4}$ P. L.; so ist

$$m:n = 9,2 : 0,8.$$

Wäre aber $p' - p$ um etwas größer, oder a um etwas kleiner angenommen worden, so würde der Werth für n gar $= 0$ werden.

Daß die Halbaxe kleiner seyn müßte, liegt aus dem Grunde vor Augen, weil auf alle Fälle die äußere Verdichtung der Erde größer als die innere ist (§. 25 beym Beschlusse).

§. 30.

Die Erde ist von innen nach aussen im Verhältnisse der Entfernung vom Mittelpunkte verdichtet.

Die trapezoidische Verdichtung des vorigen Paragraphen setzt voraus, daß bei der Bildung der Erde gleich anfangs, noch vor der ersten Annäherung und Berührung der Erdstoffe, der Chemismus oder die Verdichtung schon mit einer anfänglichen Anziehungskraft gewirkt habe; allein dies kann aus mathematischen und physikalischen Gründen nicht geschehen seyn, weil jede GröÙe mit 0 anfängt und eben durch die Annäherung und Berührung der Stoffe erst chemische und attrahirende Kräfte thätig werden. Natürlich muß daher der Chemismus oder die Verdichtung anfangs $= 0$ gewesen, und nachher immer stärker geworden seyn. Es ist demnach die Verdichtung entweder durch die $\frac{1}{2}$ te Potenz (parabolisch) oder durch die $\frac{2}{3}$, oder durch eine andere Potenz, deren Basis die Entfernung vom Mittelpunkte ist, geschehen, weil, wenn bei allen diesen Verdichtungsarten die Entfernung $= 0$ ist, auch sodann die Verdichtung selbst $= 0$ wird.

Um nun zu finden, von welcher Potenz die Verdichtung der Erde sey, deren Exponent schon aus den Gründen des 28ten Parag. gröÙer als 0 seyn muß, bediene man sich der allgemeinen Formel

$$p' - p = \frac{ma}{l^2} (\sin^2 \alpha' - \sin^2 \alpha) = \frac{ma}{2l} (\cos 2\alpha - \cos 2\alpha'),$$

wo $p' - p$, wie immer, die Differenz der Pendellängen unter α' und α Grad Polhöhe, a die Erdhalbaxe

und t die Umwälzungszeit bezeichnet, m aber bei einer gleichartigen Verdichtung $= 5,0$, bei einer Verdichtung von der $\frac{1}{2}$ Potenz $= \frac{1,7^2}{3^2} = 5,97$, bei einer Verdichtung von der $\frac{2}{3}$ Potenz $= \frac{1,4^2}{3^2} = 6,304$, und bei einer Verdichtung von der ersten Potenz $= 7,0$ ist etc. (vermöge §. 25. No. 19, 20; 21 und 22.). Man entwickle aus der allgemeinen Formel die Größe

$$m = \frac{(p' - p) 2 t^2}{a (\cos. 2x - \cos. 2x')};$$

setze $\alpha = 0$ und $\alpha' = 45^\circ$, und demnach (wie §. 29.) $p - p = 1,25$ und $\alpha = 3260000 \times 864$ P. L., weil bei einer ungleichen Verdichtung (vermöge des fünften Folgesatzes des 25sten Parag.) die Halbxaxe a nicht über 3260000 Toisen seyn kann, so ist

$$m = 6,59.$$

Wäre aber $p - p = 1,3$, so würde m sehr nahe $= 7$ seyn. Würden wir die von Bouguer beobachtete Pendellänge unter dem Aequator $p = 439,1$ P. L. u. die bekannte Pendellänge p' unter $45^\circ = 440,4$ zu Grunde legen, so würde wirklich $p' - p = 1,3$ seyn, und wir würden demnach die Verdichtung der Erde von der ersten Potenz bestätigt finden. Wir dürfen aber auch jede andere Beobachtung zu Grunde legen, falls überall werden wir die Exponenten der Verdichtung größer als $\frac{1}{2}$ und bei manchen gar größer als 1 finden.

Ist aber die Verdichtung y eine Funktion der Entfernung x vom Mittelpunkte; und zwar vom ersten Grade, oder vom Grade $= 1$, nämlich $y = nx$; so steht auch die Dichtigkeit mit der Entfernung vom Mittelpunkte im Verhältnisse.

§. 31.

Die Beschleunigung der Schwere innerhalb der Erde steht mit dem Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkte in geraden Verhältnisse. Fig. 6.

Denn es sey I ein Punkt innerhalb der Erde, und MI HG eine ähnliche Hülle mit der Oberfläche CSFED, so hat, vermöge des 8, 9 und 10 §., die Masse zwischen dieser innern und äußern Hülle gar keinen Einfluß auf den Punkt I, und es wird daher dieser Punkt noch bloß vom innern Ellipsoide MIHG angezogen. Nun können wir bei einer gleichen Abplattung, oder bei einem gleichen Verhältnisse der beiden Axen, die Anziehungskraft k allgemein $= xmq$ setzen, wo $LI = x$, und m den Verdichtungs-factor und q einen beständigen Factor vorstellt. Da aber bei einer Verdichtung vom ersten Grade $m = x.p$ ist, wo ebenfalls p einen beständigen Factor vorstellt, so wird die Anziehungskraft $k = x.xpq = x^2pq$ seyn. Es ist aber das Produkt pq bei einer gleichen Abplattung ebenfalls eine beständige GröÙe, daher die Anziehungskraft k mit dem Quadrate von x , oder mit LI^2 , im Verhältnisse steht.

§. 32.

Berechnung der Abplattung der Erde $= \frac{1}{230}$ aus der Pendellänge, in Uebereinstimmung mit den Gradmessungen.

Wenn wir die beiden Erdaxen oder die Abplattung aus den bloßen Gradmessungen berechnen wollen, so muß wenigstens der Werth von zwei Breitengraden unter verschiedener Polhöhe sehr ge-

nau bekannt seyn. Wollen wir aber die Erdaxen aus den Pendelschwingungen oder Pendellängen berechnen, so müssen wir wenigstens *drey* sichere Data unter verschiedener Pohlhöhe haben, weil hier noch außerdem das Verdichtungsverhältniß in Betracht kommt. Eine Hauptschwierigkeit bei beiden Berechnungsarten ist aber, daß von der Differenz der Gradwerthe oder der Pendellängen auch die Sicherheit der Berechnung abhängt, und daß ein geringer Unterschied in dieser Differenz schon erstaunlich verschiedene Resultate zuwege bringt.

Um diesem auszuweichen, wollen wir beide Rechnungsarten auf folgende Art mit einander verbinden.

Es sey, wie immer, die Halbaxe der Erde $= a$; der Halbmesser des Aequators $= c$ und $\frac{c^2 - a^2}{a^2} = e$; ferner sey der Werth eines Breitengrades unter γ° mittlerer Pohlhöhe $= w$, und die Länge des Sekundenpendels unter α° Pohlhöhe $= p$; übrigens die Unwälgungszeit der Erde $= t$ Secunden. Es finden dann vermöge §. 16. X. und §. 25. No. 9. oder No. 16. folgende Gleichungen Statt:

$$1) \quad w = \frac{a\pi}{180} \left[1 + e \left(\frac{-155 \cos. 2\gamma}{\pi} \sin. 1^\circ + \frac{1}{4} \right) + e^2 \left(\frac{675 \cos. 4\gamma}{32\pi} \sin. 2^\circ + \frac{155 \cos. 2\gamma}{4\pi} \sin. 1^\circ - \frac{1}{64} \right) + \dots \right]$$

oder:

$$w = \frac{c\pi}{180} \left[1 - e \left(\frac{155 \cos. 2\gamma \sin. 1^\circ}{\pi} + \frac{1}{4} \right) + e^2 \left(\frac{675 \cos. 4\gamma \sin. 2^\circ}{32\pi} + \frac{405 \cos. 2\gamma \sin. 1^\circ}{4\pi} + \frac{1}{64} \right) + \dots \right]$$

$$2) p = \frac{12a}{t^2 e} [1 + e (\frac{3}{4} + \frac{7}{12} \sin^2 \alpha) + e^2 (-\frac{1}{16} - \frac{5}{24} \sin^2 \alpha + \frac{1}{48} \sin^4 \alpha) + \dots];$$

oder, weil $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2}$ und $\sin^4 \alpha = \frac{3}{8} - \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cos 4\alpha$ ist,

$$p = \frac{12a}{t^2 e} [1 + e (\frac{3}{4} - \frac{7}{12} \cos 2\alpha) + e^2 (\frac{6}{16} - \frac{7}{8} \cos 2\alpha + \frac{1}{24} \cos 4\alpha) + \dots]$$

Man dividire mit dieser Formel in die No. 1, so erhält man

$$\frac{w}{p} = \frac{\pi t^2 e}{12.180} \times [1 + e (-\frac{1}{24} - \frac{135 \cos 2\gamma \sin 1^\circ}{\pi} + \frac{7}{24} \cos 2\alpha) + \dots]$$

Aus dieser Gleichung folgt durch die Umkehrung:

$$e = \frac{12.180.w}{p \cdot \pi \cdot t^2} + (\frac{1}{24} + \frac{135 \cos 2\gamma \sin 1^\circ}{\pi} - \frac{7}{24} \cos 2\alpha) \cdot \left(\frac{12.180.w}{p \cdot \pi \cdot t^2} \right)^2 + \dots$$

Wenn aber $\alpha = 48^\circ 50' 14''$, so ist $p = 440,582$ P. L., und wenn $\gamma = 47^\circ 28'$, so ist $w = 57071$ Toisen $= 57071.864$ Par. L. Da nun $t = 86164$ Secunden, so findet man $e = 0,01044695$ *).

Man setze die Abplattung $\frac{c-a}{a} = m$, so ist $m = -1 + \sqrt{(1+e)} = \frac{1}{2} e - \frac{1}{8} e^2 + \dots$

Da nun $\frac{1}{2} e = 0,00522348$

und $\frac{1}{8} e^2 = 0,00001364$, so ist

die Abplattung $m = 0,0052098$, sehr nahe $= \frac{1}{191}$.

*) Auch für die richtige Entwicklung dieses Werthes bürge ich.

§. 33.

Berechnung der beiden Erdhalbkuxen = 3256323 und 3276304 Toifen aus denselben Formeln.

§. 34.

Werth der Breitengrade unter allerlei Polhöhe.

Aus den Formeln §. 16. X oder §. 32. No. 1 berechnet, und zwar nach Rechnungsvortheilen. *Tafel über die Gradwerthe.*

§. 35.

Länge des Secundenpendels unter allerlei Polhöhe, nebst einer Tafel hierzu.

Aus der Formel §. 32. No. 2 nach Kunstgriffen berechnet.

§. 36.

Berechnung des Aequators, Meridians, der Oberfläche, des körperlichen Inhaltes und der Masse der Erde.

§. 37.

B e f c h l u ß.

Die weitere Auseinanderletzung der Kräfte, welche *die Flächen* unter allerlei Zusammenfügungen und KrySTALLISATIONEN der Körper äußern, behalte ich mir vor, bis ich einmal mehr Muße habe.

Die Einwirkung fremder Himmelskörper aufs Schwanken der Erde etc. geschieht jetzt leichter, als man glaubte, da die Erde an der Oberfläche dichter als am Kerne und die Abplattung so beträchtlich ist.