SULLE EQUAZIONI DEL MOLTIPLICATORE PER LA TRASFORMAZIONE
DELLE FUNZIONI ELITTICHE.

NOTA

DEL PROF. FRANCESCO BRIOSCHI.

È noto come supponendo n numero dispari si soddisfi all'equazione:

$$\frac{dy}{\sqrt{\{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)\}}} = \frac{z dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(1-k^2 x^2)\}}}$$

mediante la sostituzione $y = \frac{U}{V}$, nella quale U, V sono due polinomj in x dei gradi n ed $n-1$; e come ponendo:

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(1-k^2 x^2)\}}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(1-k'^2 x^2)\}}}, \quad k^2 + k'^2 = 1$$

ed :

$$\omega = \frac{mK + m'iK'}{n},$$

dove m, m' sono due numeri interi, ed $i = \sqrt{-1}$, si hanno le relazioni :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{\lambda} = k^{\frac{n}{2}} \text{sen coam. } 4\omega \text{ sen coam. } 8\omega \dots \text{sen coam. } 2(n-1)\omega \\ \sqrt{z} = \sqrt{\left((-1)^{\frac{n-1}{2}}\right) \frac{\text{sen am. } 4\omega \text{ sen am. } 8\omega \dots \text{sen am. } 2(n-1)\omega}{\text{sen coam. } 4\omega \text{ sen coam. } 8\omega \dots \text{sen coam. } 2(n-1)\omega}} \end{array} \right.$$

Se n è numero primo, si hanno $n+1$ trasformazioni dell'ennesimo ordine differenti fra loro, le quali corrispondono agli $n+1$ seguenti valori di ω :

$$\frac{K}{n}, \quad \frac{iK'}{n}, \quad \frac{K + iK'}{n}, \quad \frac{K + 2iK'}{n} \dots \dots \frac{K + (n-1)iK'}{n};$$

e questi sostituiti nella (1) danno $n+1$ valori corrispondenti pel modulo λ ed $n+1$ pel moltiplicatore z . Quindi le equazioni, le radici delle quali sono quegli $n+1$ valori di λ o di z , saranno del grado $n+1$. Le prime equazioni sono denominate equazioni del modulo o modulari; alle seconde daremo il nome di equazioni del moltiplicatore.

Indicando con $z_1, z_2 \dots z_{n+1}$ gli $n+1$ valori del moltiplicatore, e con $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \dots$ i valori della funzione completa :

$$\Lambda = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(1-\lambda^2 x^2)\}}}$$

corrispondenti agli $n + 1$ valori del modulo si hanno le :

$$z_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n \Lambda_1}{K}, \quad z_2 = \frac{\Lambda_2}{K}, \quad \dots \quad z_{n+1} = \frac{\Lambda_{n+1}}{K};$$

od osservando essere : (*Fundamenta Nova* pag. 184)

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}$$

si avrà per un teorema di Jacobi (*) dimostrato da Sohnke (**)

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{\left((-1)^{\frac{n-1}{2}} n\right) \frac{\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{nm^2}}{\sum_m q^{m^2}}}$$

ed i valori di $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$... si otterranno ponendo nella :

$$\frac{\sum_m p^{m^2}}{\sum_m q^{m^2}}$$

in luogo di p ordinatamente $q^{\frac{1}{n}}$, $\alpha q^{\frac{1}{n}}$, $\alpha^2 q^{\frac{1}{n}}$... $\alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}}$; essendo α una radice dell'equazione $\alpha^n - 1 = 0$. Questa proprietà dei moltiplicatori fu già dimostrata dall'Abel, ma inesattamente quanto al primo di essi (***).

Ora la sommatoria $\sum_n q^{\frac{m^2}{n}}$ può scomporsi nel modo seguente :

$$\begin{aligned} \sum_n q^{\frac{m^2}{n}} &= 1 + 2q^{\frac{1}{n}} + 2q^{\frac{(n-1)^2}{n}} + 2q^{\frac{(n+1)^2}{n}} + 2q^{\frac{(2n-1)^2}{n}} + 2q^{\frac{(2n+1)^2}{n}} + \dots \\ &+ 2q^{\frac{4}{n}} + 2q^{\frac{(n-2)^2}{n}} + 2q^{\frac{(n+2)^2}{n}} + 2q^{\frac{(2n-2)^2}{n}} + 2q^{\frac{(2n+2)^2}{n}} + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ &+ 2q^{\frac{\frac{1}{n}(\frac{n-1}{2})^2}{n}} + 2q^{\frac{\frac{1}{n}(\frac{n+1}{2})^2}{n}} + 2q^{\frac{\frac{1}{n}(\frac{3n-1}{2})^2}{n}} + \dots \\ &+ 2q^{\frac{1}{n}} + 2q^{\frac{4}{n}} + 2q^{\frac{9}{n}} + \dots \end{aligned}$$

per cui ponendo per brevità :

$$A_0 = \frac{\sum_m q^{nm^2}}{\sum_m q^{m^2}}, \quad A_1 = 2q^{\frac{1}{n}} \frac{\sum_m q^{nm^2+2m}}{\sum_m q^{m^2}}, \quad \dots \quad A_r = 2q^{\frac{r^2}{n}} \frac{\sum_m q^{nm^2+2rm}}{\sum_m q^{m^2}} \dots$$

(*) Giornale di Crelle T. 3. pag. 193.

(**) Idem T. 16. pag. 103.

(***) Idem T. 3. pag. 400. Oeuvres complètes. T. 1. pag. 315.

si avranno le seguenti relazioni:

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{\left((-1)^{\frac{n-1}{2}} n\right) A_0}$$

$$\sqrt{z_2} = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{\frac{n-1}{2}}$$

$$\sqrt{z_3} = A_0 + \alpha A_1 + \alpha^4 A_2 + \dots + \alpha^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} A_{\frac{n-1}{2}}$$

e analoghe espressioni per $\sqrt{z_4}$, $\sqrt{z_5}$. . . ponendo in quest'ultima α^2 , α^3 . . . in luogo di α . Questa importante proprietà delle radici delle equazioni del moltiplicatore venne pure enunciata da Jacobi nel T.^o 3.^o del Giornale di Crelle pag. 308.

Quindi supponendo $n = 3$ le A_0 , A_1 dovranno soddisfare a due equazioni di condizione; le quali, essendo per questo caso:

$$z^4 - 6z^2 + 8(1 - 2k^2)z - 3 = 0$$

l'equazione del moltiplicatore, risulteranno:

$$A_0(A_0^3 + A_1^3) = 1 \quad 8A_0^6 - 20A_0^3 A_1^3 - A_1^6 = 8(1 - 2k^2).$$

Così per $n = 5$ essendo l'equazione del moltiplicatore la:

$$z^6 - 10z^5 + 35z^4 - 60z^3 + 55z^2 - 2(13 - 27k^2k'^2)z + 5 = 0$$

o più semplicemente la:

$$(z - 1)^6 - 4(z - 1)^5 + 2^8 k^2 k'^2 z = 0$$

dal confronto dei coefficienti si otterranno le relazioni:

$$\begin{aligned} A_0^2 + A_1 A_2 &= 1 & 11A_0^6 - 15A_0^4 + 5A_0^2 + A_0(A_1^5 + A_2^5) &= 1 \\ 494A_0^{10} - 1170A_0^8 + 5040A_0^6 - 5880A_0^4 + 1890A_0^2 - 228A_0^5(A_2^5 + A_2^5) \\ + 120A_0^3(A_1^5 + A_2^5) + 360A_0(A_1^5 + A_2^5) + A_1^{10} + A_2^{10} &= 374 - 2^8 k^2 k'^2. \end{aligned}$$

od altre dipendenti da queste. Mostreremo in un prossimo lavoro alcune conseguenze di queste proprietà dalle equazioni del moltiplicatore; e come dalla medesima si possano far dipendere i risultati ottenuti recentemente dal Sig. Hermite (*Comptes Rendus*, N.^o 11. Mars 1858) intorno la risoluzione della equazione del quinto grado.

Pavia. Maggio 1858.