SULLE FUNZIONI DI GREEN D'ORDINE m.

Memoria di **Tommaso Boggio**, in Torino.

Adunanza del 12 febbrajo 1905.

In questa Memoria studio in modo speciale le proprietà di certe funzioni poliarmoniche in un corpo circolare o sferico.

Nei cap. I e II stabilisco per le funzioni poliarmoniche e per le funzioni di GREEN d'ordine m alcune proprietà che sono una estensione di altre ben note relative alle funzioni armoniche e alla ordinaria funzione di GREEN.

Nel cap. III considero un'area circolare e faccio vedere come certi integrali, estesi a tutto il cerchio, e relativi a prodotti di funzioni poliarmoniche per funzioni di GREEN d'ordine qualunque, possano esprimersi o sotto forma finita, o mediante integrali semplici (cioè quadrature). Estendo poi queste proprietà al caso di un campo sferico. Per ottenere questi risultati non occorre affatto la conoscenza delle funzioni di GREEN.

Il cap. IV è destinato alla costruzione delle funzioni G_m di GREEN d'ordine m e di 1ª specie per campi speciali. Esprimo perciò la funzione G_m mediante funzioni poliarmoniche che determino successivamente con un metodo assai semplice. Tale funzione G_m ha un segno costante nel campo considerato; inoltre essa si può porre, anche nel caso di quante si vogliano variabili, sotto una forma assai semplice, mediante la considerazione di un integrale definito; questa forma si presta bene a stabilire un'altra proprietà, della funzione G_m, che è l'estensione di una già nota dovuta al POINCARÉ.

Dall'espressione della funzione G_m, nel caso dell'area circolare, si deducono agevolmente dei limiti superiori per i massimi valori assoluti delle derivate dei primi $2m-1$ ordini di G_m; questo è mostrato nel cap. V. Se ne trae poi di conseguenza che l'integrale u dell'equazione

$\Delta_{2m} u = F(x, y)$ (F essendo una data funzione di x, y), che si annulla, sul contorno, colle sue derivate normali successive dei primi $m - 1$ ordini è finito colle sue derivate parziali dei primi $2m - 1$ ordini, in ogni punto del cerchio e del suo contorno. Inoltre i massimi valori assoluti di queste derivate tendono a zero quando il raggio del cerchio decresce indefinitamente. Dimostro infine le proposizioni analoghe nel caso di un campo sferico.

Queste proprietà, come mostrerò in una prossima pubblicazione, trovano una applicazione immediata nella determinazione di una funzione u, regolare in un'area σ, semplicemente connessa, che soddisfa nei punti di σ all'equazione $\Delta_{2m} u = f(u)$ [ove $f(u)$ è una funzione data di u e delle sue derivate parziali dei primi $2m - 2$ ordini], e che sul contorno assume colle sue derivate normali successive dei primi $m - 1$ ordini, dei valori assegnati. Il metodo che conviene adoperare è un'estensione di quello classico delle approssimazioni successive, proposto dal Picard per integrare le equazioni di 2° ordine della forma $\Delta_2 u = f(u)$ [$f(u)$ essendo una data funzione di u], colla condizione $u = 0$ sul contorno.

I.

Generalizzazione delle formole di Green.

1. Consideriamo un volume S limitato da una superficie chiusa σ; indichiamo con n la normale a σ diretta all'interno di S e con u, v due funzioni regolari nello spazio S; allora si ha ovviamente, mediante integrazioni per parti *):

$$\int_S \Delta_{2r-2} u \,\Delta_{2s} v \,dS + \int_\sigma \Delta_{2r-2} u \frac{d\,\Delta_{2s-2} v}{dn} d\sigma$$
$$+\int_S \left(\frac{\partial \Delta_{2r-2} u}{\partial x} \frac{\partial \Delta_{2s-2} v}{\partial x} + \frac{\partial \Delta_{2r-2} u}{\partial y} \frac{\partial \Delta_{2s-2} v}{\partial y} + \frac{\partial \Delta_{2r-2} u}{\partial z} \frac{\partial \Delta_{2s-2} v}{\partial z} \right) dS = 0,$$

$$\int_S \left(\frac{\partial \Delta_{2r-2} u}{\partial x} \frac{\partial \Delta_{2s-2} v}{\partial x} + \frac{\partial \Delta_{2r-2} u}{\partial y} \frac{\partial \Delta_{2s-2} v}{\partial y} + \frac{\partial \Delta_{2r-2} u}{\partial z} \frac{\partial \Delta_{2s-2} v}{\partial z} \right) dS$$
$$+ \int_\sigma \frac{d\,\Delta_{2r-2} u}{dn} \Delta_{2s-2} v \,d\sigma + \int_S \Delta_{2r} u \,\Delta_{2s-2} v \,dS = 0,$$

*) Indichiamo, secondo l'uso, con $\Delta_4, \Delta_6, \ldots$ i simboli operatori $\Delta_2 \Delta_2$, $\Delta_2 \Delta_2 \Delta_2, \ldots$ ove $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ nel caso di 3 variabili, e $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ nel caso di 2 variabili.

onde sottraendo:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & \int_S (\Delta_{2r-2} u \, \Delta_{2s} v - \Delta_{2r} u \, \Delta_{2s-2} v) \, dS \\ & + \int_\sigma \left(\Delta_{2r-2} u \frac{d \Delta_{2s-2} v}{dn} - \Delta_{2s-2} v \frac{d \Delta_{2r-2} u}{dn} \right) d\sigma = 0 ; \end{aligned} \right.$$

questa formola, del resto, discende subito da un noto lemma di GREEN.

Indichiamo con m un numero pari, e poniamo in questa formola $v = u$, poi successivamente:

$$\begin{array}{ll} r = m, & s = 1 \\ r = m - 1, & s = 2 \\ \dots\dots\dots & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots \\ r = \mu + 1, & s = \mu \qquad \left(\mu = \dfrac{m}{2}\right), \end{array}$$

e sommiamo le formole che così si ottengono; risulterà:

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & \int_S [(\Delta_{2\mu} u)^2 - u \, \Delta_{2m} u] \, dS \\ & + \sum_1^\mu {}_i \int_\sigma \left(\Delta_{2\mu+2i-2} u \frac{d \Delta_{2\mu-2i} u}{dn} - \Delta_{2\mu-2i} u \frac{d \Delta_{2\mu+2i-2} u}{dn} \right) d\sigma = 0, \end{aligned} \right.$$

nella quale formola compariscono, sul contorno, i valori delle funzioni:

$$(a)\qquad u, \quad \frac{du}{dn}, \quad \Delta_2 u, \quad \frac{d \Delta_2 u}{dn}, \quad \dots, \quad \Delta_{2m-2} u, \quad \frac{d \Delta_{2m-2} u}{dn}.$$

Supponiamo che su σ siano nulle le prime m delle quantità (a), allora risulta dalla (2):

$$\int_S u \, \Delta_{2m} u \, dS = \int_S (\Delta_{2\mu} u)^2 \, dS ;$$

se poi la funzione u è m-armonica in S *), ne segue:

$$\Delta_{2\mu} u = 0$$

in tutto il campo S.

Se poi m è un numero dispari e si pone $\nu = \frac{m-1}{2}$, invece della (2) si ha la seguente:

*) Ricordiamo che una funzione u si dice m-armonica, o poliarmonica di ordine m, in un dato campo, se è regolare in tale campo e soddisfa all'equazione $\Delta_{2m} u = 0$.

$$-\int_S\left\{\left[\left(\frac{\partial\Delta_{2\nu}u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Delta_{2\nu}u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Delta_{2\nu}u}{\partial z}\right)^2\right]+u\,\Delta_{2m}u\right\}dS$$

$$+\sum_1^{\nu}{}_i\int_\sigma\left(\Delta_{2\nu+2i}u\frac{d\Delta_{2\nu-2i}u}{dn}-\Delta_{2\nu-2i}u\frac{d\Delta_{2\nu+2i}u}{dn}\right)d\sigma-\int_\sigma\Delta_{2\nu}u\frac{d\Delta_{2\nu}u}{dn}d\sigma=0;$$

perciò se su σ sono nulle le prime m delle quantità (a) si deduce:

$$\int_S u\,\Delta_{2m}u\,dS=-\int_S\left[\left(\frac{\partial\Delta_{2\nu}u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Delta_{2\nu}u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Delta_{2\nu}u}{\partial z}\right)^2\right]dS;$$

se inoltre la funzione u è m-armonica in S, se ne trae:

$$\frac{\partial\Delta_{2\nu}u}{\partial x}=\frac{\partial\Delta_{2\nu}u}{\partial y}=\frac{\partial\Delta_{2\nu}u}{\partial z}=0,$$

delle quali segue facilmente, in ogni punto di S:

$$\Delta_{2\nu}u=0.$$

Così proseguendo, è facile dedurre, qualunque sia m, che la funzione u, poliarmonica d'ordine m in S, e della quale su σ son nulle le prime m delle quantità (a), è identicamente nulla in ogni punto di S.

È chiaro che se sopra σ sono nulle le prime m delle quantità (a), saranno pure nulle, nei punti di σ, le derivate normali dei primi $m-1$ ordini di u, e viceversa; perciò si può anche dire che se una funzione u, m-armonica in S, si annulla sul contorno colle sue derivate normali dei primi $m-1$ ordini, sarà identicamente nulla in tutto il campo S.

Come conseguenza immediata si ha: *Se di una funzione u, regolare in S, si conosce il Δ_{2m}, e se sul contorno σ le prime m delle quantità (a) assumono valori assegnati, la funzione u risulta completamente determinata in ogni punto di S.* Ovvero: *Una funzione u, regolare in S, di cui si conosce il $\Delta_{2m}u$, è completamente determinata nell'intero campo S, se sul contorno σ si conoscono i valori della funzione u e delle sue derivate normali successive dei primi $m-1$ ordini.*

2. Poniamo ora nella formola (1) successivamente:

$$\begin{array}{ll}
r=m, & s=1\\
r=m-1, & s=2\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\\
r=2, & s=m-1\\
r=1, & s=m
\end{array}$$

e sommiamo le formole che così risultano; si avrà;

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_S (u\,\Delta_{2m} v - v\,\Delta_{2m} u)\,dS \\ &+\sum_1^m{}_i \int_\sigma \left(\Delta_{2i-2} u \frac{d\,\Delta_{2m-2i} v}{dn} - \Delta_{2m-2i} v \frac{d\,\Delta_{2i-2} u}{dn}\right) d\sigma = 0 \text{ *)}, \end{aligned}\right.$$

che chiameremo *il lemma di* GREEN *per l'operazione* Δ_{2m}.

Se, in particolare, le funzioni u, v sono m-armoniche in S, si ha:

$$\sum_1^m{}_i \int_\sigma \left(\Delta_{2i-2} u \frac{d\,\Delta_{2m-2i} v}{dn} - \Delta_{2m-2i} v \frac{d\,\Delta_{2i-2} u}{dn}\right) d\sigma = 0,$$

questa formola può ancora scriversi:

$$(3')\qquad \sum_1^m{}_i \int_\sigma \left(\Delta_{2i-2} u \frac{d\,\Delta_{2m-2i} v}{dn} - \Delta_{2i-2} v \frac{d\,\Delta_{2m-2i} u}{dn}\right) d\sigma = 0.$$

Poniamo ora:

$$v = r^{2m-3},$$

ove r è la distanza dell'origine O delle coordinate da un punto qualunque (x, y, z). Se il punto O è fuori di S, la funzione v, data dalla formola precedente, è regolare nello spazio S, quindi la formola (3) sussiste inalterata.

Se invece l'origine è un punto di S, a distanza finita dal contorno, le derivate di v dell'ordine $2m - 2$ diventano infinite precisamente in questo punto, quindi la (3) non sussiste più. Escludiamo perciò il punto O da S mediante una sfera S_0, di centro l'origine O, di contorno σ_0, e di raggio R_0 piccolo in modo che questa sfera sia tutta contenuta nel campo S.

La funzione r^{2m-3} risulta allora regolare nello spazio $S - S_0$, ed inoltre, come è facile verificare, è m-armonica in tale spazio; perciò la formola (3) applicata alle funzioni u, r^{2m-3} che sono regolari nello spazio $S - S_0$, il quale ha per contorno $\sigma + \sigma_0$, porge:

$$\begin{aligned} &-\int_{S-S_0} r^{2m-3}\,\Delta_{2m} u\,dS \\ &+\sum_1^m{}_i \int_{\sigma+\sigma_0} \left(\Delta_{2i-2} u \frac{d\,\Delta_{2m-2i} r^{2m-3}}{dn} - \Delta_{2m-2i} r^{2m-3} \frac{d\,\Delta_{2i-2} u}{dn}\right) d\sigma = 0, \end{aligned}$$

od ancora:

*) Cfr. GUTZMER, *Remarques sur certaines équations aux différences partielles d'ordre supérieur* [Journal de Mathématiques, IV^{e} série, t. VI (1890), pp. 405-422].

$$\begin{aligned}&\int_{S-S_0} r^{2m-3}\Delta_{2m} u\, dS\\
&=\sum_1^m{}_i\int_\sigma\left(\Delta_{2i-2}u\frac{d\,\Delta_{2m-2i}r^{2m-3}}{dn}-\Delta_{2m-2i}r^{2m-3}\frac{d\,\Delta_{2i-2}u}{dn}\right)d\sigma\\
&+\int_{\sigma_0}\left(u\frac{d\,\Delta_{2m-2}r^{2m-3}}{dn_0}-\Delta_{2m-2}r^{2m-3}\frac{du}{dn_0}\right)d\sigma_0\\
&+\sum_2^m{}_i\int_{\sigma_0}\left(\Delta_{2i-2}u\frac{d\,\Delta_{2m-2i}r^{2m-3}}{dn_0}-\Delta_{2m-2i}r^{2m-3}\frac{d\,\Delta_{2i-2}u}{dn_0}\right)d\sigma_0,\end{aligned}$$

ove n_0 è la normale a σ_0 diretta all'esterno di S_0.

Si faccia ora tendere a zero il raggio R_0, allora è facile vedere che l'ultima $\sum$ tende a zero; e osservando che

$$\Delta_{2m-2}r^{2m-3}=(2m-2)!\frac{1}{r},$$

si otterrà:

$$\begin{aligned}\int_S r^{2m-3}\Delta_{2m}u\,dS=&\sum_1^m{}_i\int_\sigma\left(\Delta_{2i-2}u\frac{d\,\Delta_{2m-2i}r^{2m-3}}{dn}-\Delta_{2m-2i}r^{2m-3}\frac{d\,\Delta_{2i-2}u}{dn}\right)d\sigma\\
&+(2m-2)!\lim_{R_0=0}\int_\sigma\left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dn_0}-\frac{1}{r}\frac{du}{dn_0}\right)d\sigma.\end{aligned}$$

Chiamiamo inoltre u_0 il valore di u nel punto O, ricordiamo che $d\sigma_0=R_0^2$ sen $\theta\, d\theta\, d\varphi$, e si avrà:

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_0}\left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dn_0}-\frac{1}{r}\frac{du}{dn_0}\right)d\sigma=&-u_0\int_{\sigma_0}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi\\
&-\int_{\sigma_0}(u-u_0)\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi-\int_{\sigma_0}\frac{du}{dn_0}R_0\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi,\end{aligned}$$

onde:

$$\lim_{R_0=0}\int_\sigma\left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dn_0}-\frac{1}{r}\frac{du}{dn_0}\right)d\sigma_0=-4\pi u_0,$$

quindi infine:

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}(2m-2)!4\pi u_0=&\sum_1^m{}_i\int_\sigma\left(\Delta_{2i-2}u\frac{d\Delta_{2m-2i}r^{2m-3}}{dn}-\Delta_{2m-2i}r^{2m-3}\frac{d\Delta_{2i-2}u}{dn}\right)d\sigma\\
&-\int_S r^{2m-3}\Delta_{2m}u\,dS,\end{aligned}\right.$$

che si può chiamare *la formola di* GREEN *per l'operazione* Δ_{2m} *).

---

*) Questa formola, per $m=2$, è stata data dal MATHIEU nel suo lavoro: *Mé-*

Se il punto O cade su σ basta porre nel primo membro di questa formola 2π al posto di 4π.

Questa formola vale anche se il campo S è lo spazio indefinito esterno ad una o più superficie chiuse; bisogna però supporre in tal caso che quando r tende ad ∞, le derivate d'ordine i della funzione u moltiplicate per r^{i+1} $(i = 0, 1, \ldots, 2m-1)$ tendano verso limiti determinati e finiti.

Per funzioni di 2 variabili, definite in un'area piana σ, limitata da un contorno chiuso s, bisogna invece porre:

$$v = r^{2m-2} \log r,$$

e si ottiene la formola corrispondente della (4):

$$(4_1)\quad \left\{\begin{aligned} & 2^{2m-2}[(m-1)!]^2 2\pi u_0 \\ & = \sum_1^m {}_i \int_s \left[\Delta_{2i-2} u \frac{d\Delta_{2m-2i}(r^{2m-2}\log r)}{dn} - \Delta_{2m-2i}(r^{2m-2}\log r)\frac{d\Delta_{2i-2}u}{dn}\right] ds \\ & - \int_\sigma r^{2m-2}(\log r)\Delta_{2m} u\, d\sigma. \end{aligned}\right.$$

II.

Le funzioni di Green d'ordine *m* e loro proprietà generali.

3. Chiameremo *funzione preliminare di* GREEN *d'ordine m e di* 1ª *specie* la funzione Γ_m, m-armonica in S, e che su σ soddisfa alle condizioni:

$$(5)\qquad \frac{d^i \Gamma_m}{dn^i} = \frac{d^i r^{2m-3}}{dn^i}, \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1),$$

ove r è la distanza di un punto fisso qualunque M di S da un punto mobile.

Si vede facilmente, analogamente a quanto si è detto in fine del § 1, che essendo verificate le (5), saranno soddisfatte le seguenti se m è pari:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta_{2i-2}\Gamma_m &= \Delta_{2i-2} r^{2m-3} \\ \frac{d\Delta_{2i-2}\Gamma_m}{dn} &= \frac{d\Delta_{2i-2} r^{2m-3}}{dn} \end{aligned}\right. \quad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\right),$$

---

moire sur l'équation aux différences, etc. [Journal de Mathématiques, IIᵉ série, t. XIV (1869), pp. 378-421]. Per m qualunque, l'ho data (senza dimostrazione) nella mia Nota: *Un teorema di reciprocità sulle funzioni di* GREEN *d'ordine qualunque* [Atti Acc. Torino, vol. XXXV (1900), pp. 498-509].

ovvero queste altre se m è dispari:

$$
(6') \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta_{2i-2}\Gamma_m &= \Delta_{2i-2} r^{2m-3} \\ \frac{d\Delta_{2i-2}\Gamma_m}{dn} &= \frac{d\Delta_{2i-2} r^{2m-3}}{dn} \\ \Delta_{m-1}\Gamma_m &= \Delta_{m-1} r^{2m-3}, \end{aligned} \right. \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}\right)
$$

e queste condizioni possono sostituirsi alle (5).

Se si pone:

$$
(7) \qquad G_m = r^{2m-3} - \Gamma_m,
$$

la funzione G_m è nulla su σ colle sue derivate normali successive dei primi $m - 1$ ordini; è poi m-armonica nel campo S salvo nel polo M, da cui si contano le distanze r, perchè in questo punto le derivate parziali d'ordine $2m - 2$ diventano infinite come $\frac{1}{r}$.

La funzione G_m la chiameremo *funzione di* GREEN *d'ordine m e di 1ª specie* *).

In qualche lavoro precedente ho chiamato funzione di GREEN d'ordine m e di 1ª specie la funzione Γ_m; ora invece, seguendo il POINCARÉ ed altri autori, ho indicato con tale nome la funzione G_m, che, del resto, è quella che comparisce nella maggior parte delle formole che incontreremo; poichè però occorre talvolta considerare la funzione Γ_m, così, come dissi, verrà chiamata funzione preliminare di GREEN d'ordine m e di 1ª specie.

È chiaro che la funzione G_m, al pari di Γ_m, dipende soltanto dalla forma del contorno σ, ed è funzione di due terne di variabili.

Nel § 1 si è dimostrato che una funzione u, regolare in S, di cui è noto il Δ_{2m}, è determinata in ogni punto M di questo campo allorchè sul contorno si conoscono i valori delle prime m delle quantità (a); ora mostreremo che se si sa determinare, nel campo S, la funzione di GREEN d'ordine m e di 1ª specie, il cui polo è il punto M, si saprà pure trovare il valore, nel punto M, della funzione u.

Infatti, chiamando $u(M)$ tale valore, la (4) porge:

$$
(4') \qquad \left\{ \begin{aligned} &(2m-2)!\,4\pi u(M) \\ &= \sum_1^m {}_i \int_\sigma \left(\Delta_{2i-2} u \frac{d\Delta_{2m-2i} r^{2m-3}}{dn} - \Delta_{2m-2i} r^{2m-3} \frac{d\Delta_{2i-2} u}{dn} \right) d\sigma - \int_S r^{2m-3} \Delta_{2m} u \, dS; \end{aligned} \right.
$$

*) Nel caso di due variabili, la funzione G_2 è suscettibile di una semplice interpretazione fisica. Cfr. in proposito la mia Nota: *Sull'equilibrio delle piastre elastiche incastrate* [Rend. Acc. Lincei, vol. X, 1° sem. 1901, pp. 197-205].

ma dalla (3) applicata alle funzioni Γ_m ed u si ottiene:

$$(3'') \quad \int_S \Gamma_m \Delta_{2m} u\, dS = \sum_1^m {}_i \int_\sigma \left(\Delta_{2i-2} u \frac{d\Delta_{2m-2i}\Gamma_m}{dn} - \Delta_{2m-2i}\Gamma_m \frac{d\Delta_{2i-2}u}{dn} \right) d\sigma;$$

onde sottraendo e ricordando la (7) e le (6) se m è pari si ha:

$$(8) \quad \begin{cases} k\, u(M) = \sum_1^\mu {}_i \int_\sigma \left(\Delta_{2i-2} u \frac{d\Delta_{2m-2i} G_m}{dn} - \Delta_{2m-2i} G_m \frac{d\Delta_{2i-2}u}{dn} \right) d\sigma \\ \qquad\qquad - \int_S G_m \Delta_{2m} u\, dS \\ \left[k = (2m-2)!\, 4\pi; \quad \mu = \frac{m}{2} \right], \end{cases}$$

la quale formola, supposta nota la funzione G_m, fornisce appunto il valore della u nel punto M.

Se m è dispari, invece delle condizioni (6) bisogna applicare le (6′) e si ottiene così:

$$(8') \quad \begin{cases} k\, u(M) = \sum_1^\nu {}_i \int_\sigma \left(\Delta_{2i-2} u \frac{d\Delta_{2m-2i} G_m}{dn} - \Delta_{2m-2i} G_m \frac{d\Delta_{2i-2}u}{dn} \right) d\sigma \\ \qquad\qquad + \int_\sigma \Delta_{2\nu} u \frac{d\Delta_{2\nu} G_m}{dn} d\sigma - \int_S G_m \Delta_{2m} u\, dS \\ \left[k = (2m-2)!\, 4\pi; \quad \nu = \frac{m-1}{2} \right]. \end{cases}$$

In particolare, indichiamo con $F(x, y, z)$ una funzione data, continua colle sue derivate di 1° ordine, e cerchiamo la funzione u, regolare in S, che soddisfa ivi all'equazione:

$$\Delta_{2m} u = F,$$

e nei punti del contorno σ alle altre:

$$\frac{d^i u}{dn^i} = 0, \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Da queste condizioni e da quanto si disse nel § 1, risulta che nei punti di σ si avrà pure:

$$\Delta_{2i} u = 0, \qquad \frac{d\Delta_{2i} u}{dn} = 0 \quad \left(i = 0, 1, \ldots, \frac{m-2}{2} \right)$$

se m è pari; ovvero:

$$\Delta_{2i} u = 0, \quad \frac{d\Delta_{2i} u}{dn} = 0, \quad \Delta_{m-1} u = 0 \quad \left(i = 0, 1, \ldots, \frac{m-3}{2} \right)$$

se m è dispari. Perciò dalla (8) od (8') si deduce in ogni caso:

$$(9)\quad k\,u(x, y, z) = -\int_S G_m(x, y, z;\, \xi, \eta, \zeta) F(\xi, \eta, \zeta) dS \qquad (dS = d\xi d\eta d\zeta).$$

Per funzioni di 2 variabili bisogna sostituire in luogo di r^{2m-3} l'espressione $r^{2m-2}\log r$, perciò invece delle (5), (7) avremo:

$$(5_1)\qquad \frac{d^i\,\Gamma_m}{d\,n^i} = \frac{d^i\,(r^{2m-2}\log r)}{d\,n^i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1),$$

$$(7_1)\qquad G_m = r^{2m-2}\log r - \Gamma_m;$$

applicando poi la (4_1) si ottiene la formola seguente, analoga alla (8):

$$(8_1)\quad \left\{\begin{aligned} k'\,u(M) &= \sum_i^{\mu}{}_i \int_s \left(\Delta_{2i-2}\,u \frac{d\,\Delta_{2m-2i}G_m}{d\,n} - \Delta_{2m-2i}G_m \frac{d\,\Delta_{2i-2}\,u}{d\,n}\right) d\,s \\ &\qquad - \int_\sigma G_m\,\Delta_{2m}\,u\,d\,\sigma \text{ *)} \\ &\left\{k' = 2^{2m-2}[(m-1)!]^2\,2\pi;\quad \mu = \frac{m}{2}\right\}, \end{aligned}\right.$$

ed un'altra formola, che non scriveremo, analoga alla (8').

La formola corrispondente della (9) è:

$$(9_1)\qquad k'\,u(x, y) = \int_\sigma G_m(x, y;\, \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\sigma.$$

4. Consideriamo una funzione u, regolare in S, di cui sia noto in S il Δ_{2m}, e sul contorno σ i valori delle quantità:

$$(b)\qquad u,\quad \frac{d\,\Delta_{2s_2}\,u}{d\,n},\quad \Delta_{2s_3}u,\quad \frac{d\,\Delta_{2s_4}\,u}{d\,n},\ \ldots\ \frac{d\,\Delta_{2s_{m-1}}\,u}{d\,n},\quad \Delta_{2s_m}u,$$

ove $s_2, s_3, \ldots s_{m-1}, s_m$ sono numeri interi e positivi (dei quali il primo soltanto può esser zero) e minori di m, disposti per ordine di grandezza crescente e tali inoltre che tre consecutivi non siano mai eguali; nei termini (b) compariscono delle derivate i cui ordini sono rispettivamente $0,\ 2s_2 + 1,\ 2s_3, \ldots, 2s_{m-1} + 1,\ 2s_m$; orbene supporremo ancora che questi numeri siano tali che la somma di due qualunque di essi non sia mai eguale a $2m - 1$.

Per determinare la funzione u, allorquando sul contorno si cono-

---

*) Per $m = 2$ questa formola è stata data dal Prof. LAURICELLA nella sua Memoria: *Sull'equazione delle vibrazioni delle placche elastiche incastrate* [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, t. XLVI (1896)].

scono i valori delle quantità (b), basta determinare una conveniente funzione di GREEN d'ordine m.

Consideriamo infatti una funzione Γ'_m, m-armonica in S, e che nei punti di σ verifichi le equazioni:

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{c} \Gamma'_m = r^{2m-3} \\ \dfrac{d\,\Delta_{2s_2}\Gamma'_m}{d\,n} = \dfrac{d\,\Delta_{2s_2} r^{2m-3}}{d\,n} \\ \Delta_{2s_3}\Gamma'_m = \Delta_{2s_3} r^{2m-3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\,\Delta_{2s_{m-1}}\Gamma'_m}{d\,n} = \dfrac{d\,\Delta_{2s_{m-1}} r^{2m-3}}{d\,n} \\ \Delta_{2s_m}\Gamma'_m = \Delta_{2s_m} r^{2m-3}\,; \end{array}\right.$$

sottraendo allora la (3''), nella quale si legga Γ'_m al posto di Γ_m, dalla (4'), ricordando le (10), e ponendo, analogamente alla (7):

$$G'_m = r^{2m-3} - \Gamma'_m\,,$$

è facile ottenere:

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} k\,u(M) = \displaystyle\int_\sigma u\frac{d\,\Delta_{2m-2}G'_m}{d\,n}\,d\,\sigma - \int_\sigma \frac{d\,\Delta_{2s_2}u}{d\,n}\Delta_{2m-2s_2-2}G'_m\,d\,\sigma \\ \displaystyle + \int_\sigma \Delta_{2s_3}u\frac{d\,\Delta_{2m-2s_3-2}G'_m}{d\,n}\,d\,\sigma - \int_\sigma \frac{d\,\Delta_{2s_4}u}{d\,n}\Delta_{2m-2s_4-2}G'_m\,d\,\sigma + \cdots \\ \displaystyle \cdots + \int_\sigma \Delta_{2s_m}u\frac{d\,\Delta_{2m-2s_m-2}G'_m}{d\,n}\,d\,\sigma - \int_S G'_m\Delta_{2m}u\,d\,S, \end{array}\right.$$

la quale dimostra la proprietà enunciata.

È chiaro che la funzione Γ'_m ora considerata, dipende dalle coordinate del polo e del punto mobile; a questo riguardo ora dimostreremo che è simmetrica rispetto a queste due terne di coordinate *).

Siano perciò $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ due punti di S; indichiamo con $\Gamma'_m(P_0, P_1)$ il valore in P_0 della funzione Γ'_m avente per polo il punto P_1, e con $\Gamma'_m(P_1, P_0)$ il valore in P_1 della funzione Γ'_m il cui polo è P_0; allora si vuol dimostrare che:

$$\Gamma'_m(P_0, P_1) = \Gamma'_m(P_1, P_0).$$

---

*) Questo teorema lo diedi, senza dimostrazione, nella mia Nota già citata: *Un teorema di reciprocità*, etc.

Se $P(x, y, z)$ è un terzo punto di S e si pone:

$$\Gamma_0(P) = \Gamma'_m(P, P_0)$$
$$\Gamma_1(P) = \Gamma'_m(P, P_1),$$

basterà far vedere che

$$\Gamma_0(P_1) = \Gamma_1(P_0).$$

Chiamiamo perciò r_0, r_1 le distanze di P_0 e P_1 da P; dalla (11) si ha, ponendo per G'_m la sua espressione:

$$k\,\Gamma_0(P_1) = \int_\sigma \Gamma_0 \left(\frac{d\,\Delta_{2m-2}\, r_1^{2m-3}}{d\,n} - \frac{d\,\Delta_{2m-2}\,\Gamma_1}{d\,n} \right) d\,\sigma$$
$$- \int_\sigma \frac{d\,\Delta_{2s_2}\,\Gamma_0}{d\,n} (\Delta_{2m-2s_2-2}\, r_1^{2m-3} - \Delta_{2m-2s_2-2}\,\Gamma_1)\, d\,\sigma + \cdots$$
$$\cdots + \int_\sigma \Delta_{2s_m}\,\Gamma_0 \left(\frac{d\,\Delta_{2m-2s_m-2}\, r_1^{2m-3}}{d\,n} - \frac{d\,\Delta_{2m-2s_m-2}\,\Gamma_1}{d\,n} \right) d\,\sigma,$$

$$k\,\Gamma_1(P_0) = \int_\sigma \Gamma_1 \left(\frac{d\,\Delta_{2m-2}\, r_0^{2m-3}}{d\,n} - \frac{d\,\Delta_{2m-2}\,\Gamma_0}{d\,n} \right) d\,\sigma$$
$$- \int_\sigma \frac{d\,\Delta_{2s_2}\,\Gamma_1}{d\,n} (\Delta_{2m-2s_2-2}\, r_0^{2m-3} - \Delta_{2m-2s_2-2}\,\Gamma_0)\, d\,\sigma + \cdots$$
$$\cdots + \int_\sigma \Delta_{2s_m}\,\Gamma_1 \left(\frac{d\,\Delta_{2m-2s_m-2}\, r_0^{2m-3}}{d\,n} - \frac{d\,\Delta_{2m-2s_m-2}\,\Gamma_0}{d\,n} \right) d\,\sigma.$$

Sottraendo si deduce:

$$k[\Gamma_1(P_0) - \Gamma_0(P_1)] = \int_\sigma \left(\Gamma_1 \frac{d\,\Delta_{2m-2}\, r_0^{2m-3}}{d\,n} - \Gamma_0 \frac{d\,\Delta_{2m-2}\, r_1^{2m-3}}{d\,n} \right) d\,\sigma$$
$$- \int_\sigma \left(\frac{d\,\Delta_{2s_2}\,\Gamma_1}{d\,n} \Delta_{2m-2s_2-2}\, r_0^{2m-3} - \frac{d\,\Delta_{2s_2}\,\Gamma_0}{d\,n} \Delta_{2m-2s_2-2}\, r_1^{2m-3} \right) d\,\sigma + \cdots$$
$$\cdots + \int_\sigma \left(\Delta_{2s_m}\,\Gamma_1 \frac{d\,\Delta_{2m-2s_2-2}\, r_0^{2m-3}}{d\,n} - \Delta_{2s_m}\,\Gamma_0 \frac{d\,\Delta_{2m-2s_m-2}\, r_1^{2m-3}}{d\,n} \right) d\,\sigma$$
$$+ \left\{ \int_\sigma \left(\Gamma_0 \frac{d\,\Delta_{2m-2}\,\Gamma_1}{d\,n} - \Gamma_1 \frac{d\,\Delta_{2m-2}\,\Gamma_0}{d\,n} \right) d\,\sigma \right.$$
$$- \int_\sigma \left(\frac{d\,\Delta_{2s_2}\,\Gamma_0}{d\,n} \Delta_{2m-2s_2-2}\,\Gamma_1 - \frac{d\,\Delta_{2s_2}\,\Gamma_1}{d\,n} \Delta_{2m-2s_2-2}\,\Gamma_0 \right) d\,\sigma + \cdots$$
$$\left. \cdots + \int_\sigma \left(\Delta_{2s_m}\,\Gamma_0 \frac{d\,\Delta_{2m-2s_m-2}\,\Gamma_1}{d\,n} - \Delta_{2s_m}\,\Gamma_1 \frac{d\,\Delta_{2m-2s_m-2}\,\Gamma_0}{d\,n} \right) d\,\sigma \right\}.$$

Consideriamo ora gli $\int_\sigma$ contenuti tra le $\{\cdots\}$; essi sono m in tutto, inoltre, per le ipotesi fatte sui numeri s, è facile riconoscere che questi integrali sono tutti diversi tra loro e che quindi essi non sono altro che quelli contenuti nell'espressione

$$\sum_1^m{}_i \int_\sigma \left(\Delta_{2i-2}\Gamma_0 \frac{d\Delta_{2m-2i}\Gamma_1}{dn} - \Delta_{2i-2}\Gamma_1 \frac{d\Delta_{2m-2i}\Gamma_0}{dn} \right) d\sigma$$

scritti però in ordine differente; ora, in virtù della (3′) l'espressione precedente vale zero.

Tenendo conto delle (10), l'eguaglianza precedente diventa:

$$k[\Gamma_1(P_0) - \Gamma_0(P_1)] = \int_\sigma \left(r_1^{2m-3} \frac{d\Delta_{2m-2} r_0^{2m-3}}{dn} - r_0^{2m-3} \frac{d\Delta_{2m-2} r_1^{2m-3}}{dn} \right) d\sigma$$

$$- \int_\sigma \left(\frac{d\Delta_{2s_2} r_1^{2m-3}}{dn} \Delta_{2m-2s_2-2} r_0^{2m-3} - \frac{d\Delta_{2s_2} r_0^{2m-3}}{dn} \Delta_{2m-2s_2-2} r_1^{2m-3} \right) d\sigma + \cdots$$

$$\cdots + \int_\sigma \left(\Delta_{2s_m} r_1^{2m-3} \frac{d\Delta_{2m-2s_m-2} r_0^{2m-3}}{dn} - \Delta_{2s_m} r_0^{2m-3} \frac{d\Delta_{2m-2s_m-2} r_1^{2m-3}}{dn} \right) d\sigma,$$

e per quanto si disse or ora possiamo anche scrivere:

$$k[\Gamma_1(P_0) - \Gamma_0(P_1)]$$
$$= \sum_1^m{}_i \int_\sigma \left(\Delta_{2i-2} r_1^{2m-3} \frac{d\Delta_{2m-2i} r_0^{2m-3}}{dn} - \Delta_{2i-2} r_0^{2m-3} \frac{d\Delta_{2m-2i} r_1^{2m-3}}{dn} \right) d\sigma,$$

ed ancora:

$$k[\Gamma_1(P_0) - \Gamma_0(P_1)]$$
$$= \sum_1^m{}_i \int_\sigma \left(\Delta_{2i-2} r_1^{2m-3} \frac{d\Delta_{2m-2i} r_0^{2m-3}}{dn} - \Delta_{2m-2i} r_0^{2m-3} \frac{d\Delta_{2i-2} r_1^{2m-3}}{dn} \right) d\sigma;$$

ma il 2° membro vale zero, come ho mostrato nel § 4 della mia prima Nota citata, onde si conclude:

$$\Gamma_1(P_0) = \Gamma_0(P_1),$$

come volevasi dimostrare.

Nella mia Nota già citata: *Sull'equilibrio delle piastre*, ecc., ho fatto vedere che questo teorema di reciprocità, nel caso di 2 variabili e della funzione G_2, dà luogo all'interpretazione fisica seguente: Sia σ una piastra elastica, piana, disposta orizzontalmente, e sia applicato in un punto qualunque A di essa un peso P; allora lo spostamento (verticale) in un altro punto qualunque M di σ è lo stesso di quello che si avrebbe nel punto A se il peso P fosse applicato in M. Un caso assai particolare di questo teorema, e precisamente il caso in cui la piastra σ è circolare e il punto M è nel centro, trovasi a pag. 138 dell'opera del BOUSSINESQ, *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques* (Paris, 1885).

III.

Trasformazione di integrali relativi alle funzioni di Green d'ordine m.

5. Indichiamo con σ un'area circolare di raggio R, il cui contorno verrà indicato con s; come origine delle coordinate assumeremo il centro O di σ.

Denotiamo poi con $F(x, y)$ una funzione data, n-armonica in σ; allora la funzione u, regolare in σ, che soddisfa alle equazioni:

$$\Delta_2 u = F \qquad (\text{in } \sigma) \tag{12}$$

$$u = 0 \qquad (\text{su } s) \tag{13}$$

è data dalla formola (9_1) del § 3 ove vi si faccia $m = 1$, e si ha così:

$$2\pi u(x, y) = \int_\sigma G_1(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\sigma, \tag{14}$$

ove G_1 è l'ordinaria funzione di GREEN.

Questa formola esprime la funzione u mediante un integrale doppio; è però facile trovarne un'altra che dia la u espressa per mezzo di integrali semplici (quadrature).

Osserviamo per questo che la funzione n-armonica F può rappresentarsi, come è ben noto, colla formola:

$$F(x, y) = \sum_0^{n-1}{}_i \rho^{2i} f_i, \qquad (\rho^2 = x^2 + y^2), \tag{15}$$

le f_i essendo funzioni armoniche conosciute.

Sostituendo nella (12) si ha:

$$\Delta_2 u = \sum_0^{n-1}{}_i \rho^{2i} f_i, \tag{16}$$

la quale mostra che la funzione u è poliarmonica d'ordine $n+1$, e può perciò scriversi:

$$u = \sum_0^{n}{}_s \rho^{2s} \varphi_s, \tag{17}$$

le φ_s essendo funzioni armoniche da determinarsi.

Da questa eguaglianza si deduce:

$$\Delta_2 u = \sum_1^{n}{}_s \left(4 s^2 \rho^{2s-2} \varphi_s + 4 s \rho^{2s-2} . \rho \frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho}\right),$$

e confrontando colla (16):

$$\sum_{1}^{n}{}_s\, \rho^{2s-2}\left(4s^2\varphi_s + 4s\rho\frac{\partial\varphi_s}{\partial\rho} - f_{s-1}\right) = 0\,;$$

ora, l'espressione entro parentesi è una funzione armonica, perciò affinchè quest'equazione possa sussistere debbono necessariamente essere nulle le espressioni entro le parentesi, cioè:

$$s\varphi_s + \rho\frac{\partial\varphi_s}{\partial\rho} = \frac{1}{4s}f_{s-1}\,, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

da quest'equazione si ricava con una nota formola:

$$\varphi_s = \frac{1}{4s}\rho^{-s}\int_0^\rho \rho^{s-1} f_{s-1}\, d\rho \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{18}$$

e così conosciamo già le funzioni armoniche $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Rimane ora da determinare la funzione armonica φ_0.

Dobbiamo perciò ricorrere alla (13) che ci dà, tenendo conto della (17):

$$\sum_{0}^{n}{}_s\, R^{2s}\varphi_s = 0 \qquad (\text{sopra } s),$$

e quest'equazione, com'è chiaro, sussiste non solo nei punti di s, ma nell'intero cerchio σ.

Se ne trae:

$$\varphi_0 = -\sum_{1}^{n}{}_s\, R^{2s}\varphi_s\,;$$

la funzione φ_0 è così conosciuta, e sostituendo nella (17) potremo scrivere:

$$u = \sum_{1}^{n}{}_s\,(\rho^{2s} - R^{2s})\varphi_s\,, \tag{19}$$

le funzioni φ_s essendo date dalle (18).

Questa formola esprime appunto la funzione u mediante integrali semplici.

Se F è un polinomio, è pure, di conseguenza, una funzione poliarmonica; allora nella (15) le funzioni f_i sono polinomi armonici, perciò dalle (18) risulta che le φ_s sono anch'esse polinomi armonici, e infine la funzione u data dalla (19) sarà pure un polinomio.

6. Indichiamo ancora con $F(x, y)$ una funzione n-armonica data e cerchiamo la funzione u, regolare in σ, e che soddisfa alle equazioni:

$$(20) \qquad \Delta_{2m} u = F \qquad (\text{in } \sigma)$$

$$(21) \qquad u = \frac{d u}{d n} = \cdots = \frac{d^{m-1} u}{d n^{m-1}} = 0 \qquad (\text{su } s).$$

È chiaro intanto che la funzione u è poliarmonica d'ordine $m + n$, perciò, come è noto, può rappresentarsi con $m + n$ funzioni armoniche $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m+n-1}$ mediante la formola:

$$(22) \qquad u = \sum_0^{m+n-1}{}_s \rho^{2s} \varphi_s .$$

Se ne trae:

$$\Delta_2 u = \sum_1^{m+n-1}{}_s 4 s \rho^{2s-2} \left(s \varphi_s + \rho \frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho} \right),$$

che può ancora scriversi:

$$\Delta_2 u = \sum_1^{m+n-1}{}_s 4 s \rho^{2s-2} \left[\frac{1}{\rho^{s-1}} \frac{\partial (\rho^s \varphi_s)}{\partial \rho} \right];$$

ne viene, in modo analogo:

$$\Delta_4 u = \sum_2^{m+n-1}{}_s 4^2 (s-1) s \rho^{2s-4} \left[\frac{1}{\rho^{s-2}} \frac{\partial^2 (\rho^s \varphi_s)}{\partial \rho^2} \right],$$

e in generale:

$$\Delta_{2m} u = \sum_m^{m+n-1}{}_s 4^m (s-m+1)(s-m+2) \cdots (s-1) s \rho^{2s-2m} \left[\frac{1}{\rho^{s-m}} \frac{\partial^m (\rho^s \varphi_s)}{\partial \rho^m} \right].$$

Questa eguaglianza può ancora scriversi:

$$\Delta_{2m} u = \sum_0^{n-1}{}_s h_s \rho^{2s} \left[\frac{1}{\rho^s} \frac{\partial^m (\rho^{m+s} \varphi_{m+s})}{\partial \rho^m} \right],$$

ove si è posto, per brevità:

$$h_s = 4^m (s-m+1)(s-m+2) \cdots (s-1) s;$$

perciò sostituendo nella (20) e ricordando l'espressione (15) di F, si ha:

$$\sum_0^{n-1}{}_s \rho^{2s} \left[h_s \frac{1}{\rho^s} \frac{\partial^m (\rho^{m+s} \varphi_{m+s})}{\partial \rho^m} - f_s \right] = 0,$$

dalla quale si deduce, come nel § precedente:

$$h_s \frac{1}{\rho^s} \frac{\partial^m (\rho^{m+s} \varphi_{m+s})}{\partial \rho^m} - f_s = 0 \qquad (s = 0, \ldots, n-1)$$

cioè:

$$(23) \qquad \frac{\partial^m (\rho^{m+s} \varphi_{m+s})}{\partial \rho^m} = \frac{1}{h_s} \rho^s f_s .$$

Da quest'equazione si ricava:

$$\frac{\partial^{m-1} (\rho^{m+s} \varphi_{m+s})}{\partial \rho^{m-1}} = \frac{1}{h_s} \int_0^\rho \rho^s f_s \, d\rho ,$$

quindi:

$$\frac{\partial^{m-2}(\rho^{m+s}\varphi_{m+s})}{\partial\rho^{m-2}} = \frac{1}{h_s}\int_0^\rho\left(\int_0^\rho \rho^s f_s\,d\rho\right)d\rho,$$

e con una integrazione per parti:

$$\frac{\partial^{m-2}(\rho^{m+s}\varphi_{m+s})}{\partial\rho^{m-2}} = \frac{1}{h_s}\left(\rho\int_0^\rho \rho^s f_s\,d\rho - \int_0^\rho \rho^{s+1} f_s\,d\rho\right);$$

ne segue:

$$\frac{\partial^{m-3}(\rho^{m+s}\varphi_{m+s})}{\partial\rho^{m-3}} = \frac{1}{h_s}\left[\int_0^\rho\left(\rho\int_0^\rho \rho^s f_s\,d\rho\right)d\rho - \int_0^\rho\left(\int_0^\rho \rho^{s+1} f_s\,d\rho\right)d\rho\right],$$

ed integrando per parti:

$$\frac{\partial^{m-3}(\rho^{m+s}\varphi_{m+s})}{\partial\rho^{m-3}} = \frac{1}{2!\,h_s}\left[\rho^2\int_0^\rho \rho^s f_s\,d\rho - 2\rho\int_0^\rho \rho^{s+1} f_s\,d\rho + \int_0^\rho \rho^{s+2} f_s\,d\rho\right];$$

così proseguendo si trova infine:

$$\rho^{m+s}\varphi_{m+s} = \frac{1}{(m-1)!\,h_s}\sum_0^{m-1}{}_i(-1)^i\binom{m-1}{i}\rho^{m-1-i}\int_0^\rho \rho^{s+i} f_s\,d\rho;$$

del resto è assai facile verificare che questa funzione soddisfa effettivamente alla (23).

Se ne deduce:

$$(24)\qquad \varphi_{m+s} = \frac{1}{(m-1)!\,h_s}\sum_0^{m-1}{}_i(-1)^i\binom{m-1}{i}\rho^{-s-i-1}\int_0^\rho \rho^{s+i} f_s\,d\rho$$
$$(s = 0, 1, \ldots, n-1),$$

e così conosciamo le funzioni armoniche $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_{m+n-1}$.

7. Dobbiamo ora determinare le funzioni armoniche $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$, e perciò ricorreremo alle (21), che sinora non sono state adoperate.

La prima delle (21), tenendo conto della (22), porge nei punti di s:

$$(25_1)\qquad \sum_0^{m+n-1}{}_s R^{2s}\varphi_s = 0,$$

e quest'equazione è valida non solo su s, ma in tutto il cerchio σ.

Dalla (22) e dalla seconda delle (21) si ha poi:

$$\sum_0^{m+n-1}{}_s\left(2s\rho^{2s-1}\varphi_s + \rho^{2s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial\rho}\right) = 0 \qquad (\text{su } s)$$

cioè, poichè $\rho = R$:

$$\sum_0^{m+n-1}{}_s\left(2sR^{2s}\varphi_s + R^{2s}\rho\frac{\partial\varphi_s}{\partial\rho}\right) = 0,$$

e quest'equazione, come si riconosce subito, sussiste non solo nei punti di s, ma nell'intero cerchio σ.

Dalla (25_1) risulta poi subito che l'equazione precedente si riduce alla:

$$(25_2) \qquad \sum_{1}^{m+n-1} {}_s \, s R^{2s-2} \varphi_s = 0 .$$

Similmente, tenendo conto delle (25_1), (25_2) è facile vedere che la terza delle (21) conduce all'equazione:

$$(25_3) \qquad \sum_{2}^{m+n-1} {}_s \, s(s-1) R^{2s-4} \varphi_s = 0 ;$$

e così procedendo si trova infine che l'ultima delle (21) fornisce l'equazione:

$$(25_m) \qquad \sum_{m-1}^{m+n-1} {}_s \, s(s-1) \ldots (s-m+2) R^{2s-2m+2} \varphi_s = 0 .$$

Da quest'equazione si ricava φ_{m-1}, che è l'unica funzione incognita che vi figura; da quella che la precede si ottiene poi φ_{m-2}, e così via; la (25_3) fornisce poi la funzione φ_2, la (25_2) la funzione φ_1, e la (25_1) la funzione φ_0.

In tal modo tutte le funzioni armoniche φ_s che figurano nella (22) sono conosciute e risultano espresse mediante integrali semplici (quadrature).

Ricordando poi la (9_1) e le (15), (22) potremo scrivere:

$$(26) \qquad \int_\sigma G_m \sum_{0}^{n-1} {}_i \, \delta^{2i} f_i \, d\sigma = k' \sum_{0}^{m+n-1} {}_s \, \rho^{2s} \varphi_s \qquad (\delta^2 = \xi^2 + \eta^2) .$$

Se la funzione F è un polinomio, le funzioni f_i che compariscono nella (15) sono, come già è stato detto, dei polinomi armonici, e allora le funzioni φ date dalle (24), $(25_1) \ldots (25_m)$ risultano pure polinomi armonici, e infine la funzione u data dalla (22) sarà anch'essa un polinomio.

Questo risultato vale ancora se il contorno s, invece che una circonferenza, è un'ellisse qualunque.

Infatti sia F un polinomio di un grado qualunque n; la funzione u che soddisfa alla (20) nell'area limitata dall'ellisse considerata, e alle (21) sul contorno, è allora un polinomio di grado $2m + n$, come ho fatto vedere in una Nota precedente *); esso si determina facilmente col metodo dei coefficienti indeterminati.

Sia cioè:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'equazione dell'ellisse s, e poniamo:

$$u = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^m \lambda(x, y),$$

ove λ è un polinomio di grado n di cui dobbiamo cercare i coefficienti. È chiaro allora che le (21) sono soddisfatte; sostituendo poi nella (20) e confrontando fra loro i due membri si trovano tante equazioni (effettivamente compatibili, cioè, come è assai facile vedere, col determinante dei coefficienti non nullo) quante occorrono per trovare tutti i coefficienti del polinomio λ, che così risulta conosciuto.

Se si suppone $F = 1$ è facile avere dalle (20), (21) nel cerchio σ:

$$u = \frac{1}{2^{2m}(m!)^2}(\rho^2 - R^2)^m,$$

onde, confrontando colla (9_1):

$$\int_\sigma G_m d\sigma = \frac{\pi}{2m^2}(\rho^2 - R^2)^m, \tag{26'}$$

che è un caso particolare della (26).

8. Sia σ' un'area piana semplicemente connessa, limitata da un contorno s', appartenente ad un piano x', y', e supponiamo che si possa fare la rappresentazione conforme dell'area σ' sopra un cerchio σ appartenente al piano xy mediante le formole:

$$x' = p(x, y), \qquad y' = q(x, y),$$

ove p, q sono dei polinomi (armonici).

Si voglia poi cercare la funzione u', regolare in σ' e che soddisfa alle equazioni:

$$\begin{cases} \Delta_2' u' = F' & (\text{in } \sigma') \\ u' = 0 & (\text{su } s') \end{cases} \qquad \left(\Delta_2' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right),$$

ove F' è una data funzione n-armonica (rispetto alle variabili x', y').

*) Boggio, *Sopra alcune funzioni armoniche o biarmoniche*, etc. [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. LX, parte 2ª (1901)].

Converrà fare la rappresentazione conforme di σ' sul cerchio σ, e si avrà così:

$$\begin{cases} \Delta_2 u = H^2 F & (\text{in } \sigma) \\ u = 0 & (\text{su } s) \end{cases}$$

ove:

$$H^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2,$$

ed u, F indicano le funzioni u', F' espresse mediante le variabili x, y.

Ora la funzione F è notoriamente poliarmonica, rispetto alle variabili x, y; e poichè H^2 è un polinomio, anche la funzione $H^2 F$ sarà poliarmonica, perciò la funzione u si può ottenere col metodo esposto nel § 5; se ne deduce poi una formola analoga alla (26).

9. Le proprietà stabilite nei §§ 5, 6, 7 si possono estendere facilmente al caso di 3 o più variabili.

Indichiamo perciò con S la sfera di raggio R, col centro nell'origine O delle coordinate, e con σ il contorno di S; allora dovendo cercare la funzione u, regolare in S, e che soddisfa alle equazioni:

$$\begin{cases} \Delta_{2m} u = F \quad (\text{in } S) \\ u = \dfrac{du}{dn} = \cdots = \dfrac{d^{m-1} u}{dn^{m-1}} = 0 \quad (\text{su } \sigma), \end{cases}$$

ove $F(x, y, z)$ è una data funzione n-armonica, converrà esprimere la F colla formola seguente, analoga alla (15):

$$F = \sum_0^{n-1}{}_i \rho^{2i} f_i, \qquad (\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2),$$

ed u con una formola analoga alla (22); e si dedurrà così:

$$\Delta_2 u = \sum_1^{m+n-1}{}_s 4 s \rho^{2s-2} \left[\left(s + \frac{1}{2}\right) \varphi_s + \rho \frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho} \right],$$

cioè:

$$\Delta_2 u = \sum_1^{m+n-1}{}_s 4 s \rho^{2s-2} \left[\frac{1}{\rho^{s-\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{s+\frac{1}{2}} \varphi_s \right) \right],$$

e poi

$$\Delta_4 u = \sum_2^{m+n-1}{}_s 4^2 (s-1) s \rho^{2s-4} \left[\frac{1}{\rho^{s-\frac{3}{2}}} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\rho^{s+\frac{1}{2}} \varphi_s \right) \right],$$

e così via; e si otterrà poi l'equazione corrispondente della (23) che è:

$$\frac{\partial^m}{\partial \rho^m}\left(\rho^{m+s+\frac{1}{2}}\varphi_{m+s}\right) = \frac{1}{h_s}\rho^{s+\frac{1}{2}} f_s ,$$

ove la costante h_s ha lo stesso significato che nella (23).

Dall'equazione precedente si ricava questa formola, analoga alla (24):

$$\varphi_{m+s} = \frac{1}{(m-1)!\,h_s}\sum_0^{m-1}{}_i(-1)^i\binom{m-1}{i}\rho^{-s-i-\frac{3}{2}}\int_0^\rho \rho^{s+i+\frac{1}{2}} f_s\, d\rho$$
$$(s = 0, 1, \ldots, n-1),$$

e così conosciamo le funzioni armoniche $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \ldots \varphi_{m+n-1}$.

È poi evidente che le equazioni (25_1), (25_2), ... (25_m) sussistono inalterate anche nel caso attuale di un campo sferico, perciò da esse potremo ricavare le rimanenti funzioni armoniche $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$; e così otterremo la funzione u espressa mediante integrali semplici (anzichè tripli).

Se F è un polinomio, anche la u è un polinomio, e questa proprietà vale anche se il contorno σ è un ellissoide qualunque.

In particolare, se $F = 1$, si ha come è facile verificare:

$$u = \frac{1}{(2m+1)!}(\rho^2 - R^2)^m ,$$

onde confrontando colla (9):

$$\int_S G_m\, dS = -\frac{2\pi}{m(4m^2-1)}(\rho^2 - R^2)^m . \tag{27}$$

IV.

Costruzione delle funzioni di Green d'ordine m per campi speciali.

10. Consideriamo ancora alcuni campi speciali a 2 e a 3 dimensioni.

Indichiamo, come dianzi, con σ l'area circolare di centro O e di raggio R, e diciamo s il contorno di σ.

Sia poi M un punto qualunque di σ (polo di G_m), M' la sua immagine rispetto ad s, e P un punto variabile qualsiasi di σ.

Ponendo poi:

$$(28)\qquad \begin{cases} \rho = OM, \quad \rho_1 = OP, \quad \theta = \widehat{MOP}, \\ \qquad r = MP, \quad r' = M'P \end{cases}$$

risulta:

$$(29)\qquad r^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\theta,$$

$$r'^2 = \frac{R^4}{\rho^2} + \rho_1^2 - 2\frac{R^2}{\rho}\rho_1\cos\theta\,;$$

perciò se si considera la funzione:

$$(30)\qquad r_1 = \frac{\rho}{R}r',$$

si può scrivere:

$$(31)\qquad r_1^2 = \frac{1}{R^2}(R^4 + \rho^2\rho_1^2 - 2R^2\rho\rho_1\cos\theta)\,,$$

ed eliminando θ fra questa e la (29):

$$(32)\qquad r_1^2 = r^2 + \frac{1}{R^2}(R^2 - \rho^2)(R^2 - \rho_1^2)\,.$$

Questa semplicissima identità sarà adoperata spesso in seguito.

Essa intanto mostra che, essendo M fisso, comunque si muova il punto P in σ, la funzione r_1 è finita e diversa da zero nel cerchio σ, e che nei punti P di s (cioè per $\rho_1 = R$), si ha:

$$(33)\qquad r_1 = r \qquad (\text{su } s).$$

Risulta poi dalla (30) che la funzione $\log r_1$ è armonica nel cerchio σ, perciò in base alla (33) si conclude che la funzione preliminare di GREEN di 1° ordine, cioè Γ_1 è precisamente $\log r_1$, e la ordinaria funzione di GREEN è quindi:

$$(34)\qquad G_1 = \log\frac{r}{r_1} \;{}^{*)}\,.$$

Si può ancora notare che se il polo M cade nel centro O di σ la (30) perde ogni significato, ma la (32) porge però in tal caso: $r_1 = R$.

11. Cerchiamo ora il valore nel punto P della funzione G_m il cui polo è il punto M; converrà perciò costruire anzitutto la funzione pre-

---

*) Si può osservare che dalla (34) si ha, nei punti di s:

$$\frac{dG_1}{dn} = \frac{1}{r}\frac{dr}{dn} - \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dn} = \frac{1}{r}\left(\frac{dr}{dn} - \frac{dr_1}{dn}\right) = -\frac{1}{2r^2}\frac{d(r_1^2 - r^2)}{dn},$$

quindi, dalla (32):

$$\frac{dG_1}{dn} = -\frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2},$$

da cui segue subito il noto integrale che risolve il problema di DIRICHLET per il cerchio.

liminare Γ_m, m-armonica in σ (rispetto alle coordinate di P) e che verifica nei punti P di s le equazioni (5_1) del § 3, cioè:

$$(5_1) \qquad \frac{d^i \Gamma_m}{d n^i} = \frac{d^i (r^{2m-2} \log r)}{d n^i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Poniamo perciò:

$$(35) \qquad \Gamma_m = \sum_0^{m-1}{}_i (r^2 - r_1^2)^i \varphi_{m-i},$$

ove φ_{m-i} è una funzione da determinarsi, poliarmonica d'ordine $m - i$. È chiaro allora, a causa della (32), che la funzione data dalla (35) è effettivamente m-armonica in σ.

Nei punti di s, cioè, in virtù della (33), per $r_1 = r$, si ha dalla (35):

$$(36) \qquad \Gamma_m = \varphi_m,$$

d'altra parte per $i = 0$ la (5_1) porge:

$$\Gamma_m = r^{2m-2} \log r,$$

sicchè nei punti di s si ha:

$$\varphi_m = r^{2m-2} \log r,$$

e poichè la φ_m deve essere m-armonica in σ, si può porre, nell'area σ:

$$(37) \qquad \varphi_m = r^{2m-2} \log r_1;$$

infatti, come si verifica subito, questa funzione è proprio m-armonica in σ, e, per la (33), sul contorno diventa eguale a $r^{2m-2} \log r$.

Determiniamo ora la funzione φ_{m-1}. Osserviamo perciò che nei punti di s si ha dalla (35):

$$(38) \qquad \frac{d \Gamma_m}{d n} = \frac{d \varphi_m}{d n} + 2 \left(r \frac{d r}{d n} - r_1 \frac{d r_1}{d n} \right) \varphi_{m-1},$$

cioè ricordando le (37), (33):

$$\frac{d \Gamma_m}{d n} = (2m - 2) r^{2m-3} \frac{d r}{d n} \log r + r^{2m-3} \frac{d r_1}{d n} + 2r \left(\frac{d r}{d n} - \frac{d r_1}{d n} \right) \varphi_{m-1},$$

e confrontando colla (5_1) per $i = 1$:

$$r^{2m-3} \frac{d r}{d n} - r^{2m-3} \frac{d r_1}{d n} = 2r \left(\frac{d r}{d n} - \frac{d r_1}{d n} \right) \varphi_{m-1},$$

da cui:

$$\varphi_{m-1} = \frac{1}{2} r^{2m-4},$$

equazione che deve esser soddisfatta nei punti di s; però siccome la funzione r^{2m-4} è poliarmonica d'ordine $m - 1$ (precisamente come la

φ_{m-1}), si può porre addirittura, anche nei punti di σ:

$$(39) \qquad \varphi_{m-1} = \frac{1}{2} r^{2m-4}.$$

Passiamo ora a determinare la funzione φ_{m-2}. Dalla (35) si deduce, nei punti di s:

$$(40) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \Gamma_m}{dn^2} &= \frac{d^2 \varphi_m}{dn^2} + 2r \left(\frac{dr}{dn} - \frac{dr_1}{dn} \right)^2 \frac{d\varphi_{m-1}}{dn} \\ &+ 2 \left[\left(\frac{dr}{dn} \right)^2 - \left(\frac{dr_1}{dn} \right) + r \frac{d^2 r}{dn^2} - r \frac{d^2 r_1}{dn^2} \right] \varphi_{m-1} \\ &+ 2!\, 2^2 r^2 \left(\frac{dr}{dn} - \frac{dr_1}{dn} \right)^2 \varphi_{m-2}, \end{aligned} \right.$$

ricordando poi la (5_1) per $i = 2$, sostituendo a φ_m, φ_{m-1} i valori già ottenuti (37), (39) e riducendo, si ha:

$$4 \left(\frac{dr}{dn} - \frac{dr_1}{dn} \right)^2 \varphi_{m-2} = r^{2m-6} \left(\frac{dr}{dn} \right)^2 + r^{2m-6} \left(\frac{dr_1}{dn} \right)^2 - 2 r^{2m-6} \left(\frac{dr}{dn} \right) \left(\frac{dr_1}{dn} \right),$$

onde:

$$\varphi_{m-2} = \frac{1}{4} r^{2m-6},$$

perciò possiamo assumere, anche nei punti di σ:

$$\varphi_{m-2} = \frac{1}{4} r^{2m-6};$$

analogamente è facile ottenere:

$$\varphi_{m-3} = \frac{1}{6} r^{2m-8},$$

e in generale:

$$\varphi_{m-i} = \frac{1}{2i} r^{2m-2-2i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Sostituendo nella (35) si ha:

$$\Gamma_m = r^{2m-2} \log r_1 + \sum_1^{m-1}{}_i \frac{1}{2i} (r^2 - r_1^2)^i r^{2m-2-2i};$$

è del resto assai facile verificare che questa funzione soddisfa a tutte le condizioni richieste. Dopo ciò la (7_1) porge:

$$(41) \qquad G_m = r^{2m-2} \log \frac{r}{r_1} - \sum_1^{m-1}{}_i \frac{1}{2i} (r^2 - r_1^2)^i r^{2m-2-2i},$$

che dà nel punto P il valore della G_m avente per polo il punto M.

Se M cade nel centro O, la r_1 va sostituita con R, come si è visto in fine del § 10.

12. Dalla (32) risulta ancora che nel cerchio σ si ha sempre:

$$r_1 > r; \tag{42}$$

di qui si può concludere che la funzione G_m ha un segno costante in σ.

Infatti, per la G_2, si ha dalla (41):

$$G_2 = \frac{1}{2}(r_1^2 - r^2) - r^2 \log \frac{r_1}{r} \text{ *)},$$

che può ancora scriversi:

$$G_2 = r^2 \int_1^{\frac{r_1}{r}} \frac{v^2 - 1}{v} d v,$$

perciò dalla (42) ne segue, in ogni punto di σ:

$$G_2 > 0.$$

Per la G_3 si trova:

$$G_3 = -\frac{1}{4}(r_1^4 - 4r^2 r_1^2 + 3r^4) - r^4 \log \frac{r_1}{r},$$

che può esser scritta anche così:

$$G_3 = -r^4 \int_1^{\frac{r_1}{r}} \frac{(v^2 - 1)^2}{v} d v,$$

onde dalla (42) si conclude, nel cerchio σ:

$$G_3 < 0.$$

In generale, la (41) può ancora mettersi sotto la forma:

$$G_m = (-1)^m r^{2m-2} \int_1^{\frac{r_1}{r}} \frac{(v^2 - 1)^{m-1}}{v} d v, \tag{41'}$$

perciò dalla (42) si deduce che *la funzione G_m ha un segno costante nel cerchio σ*; e precisamente se m è pari si ha $G_m > 0$, e se m è dispari si ha invece $G_m < 0$.

13. Costruiamo ora la G_m per l'area piana indefinita σ, limitata da una retta s.

È chiaro che tale area può ottenersi dall'area circolare prima con-

---

*) Nel caso del cerchio e del semipiano, la funzione G_2 è stata ottenuta, in altro modo, dal Prof. LAURICELLA. Cfr. la sua Nota: *Integrazione dell'equazione $\Delta^2 (\Delta^2 u) = 0$ in un campo di forma circolare* [Atti Acc. Torino, vol. XXXI (1895-96), pp. 1010-1018] e la sua Memoria già citata.

siderata supponendo che il punto O si allontani indefinitamente; allora ρ e R tendono ad ∞ ed il loro rapporto ad 1, perciò la (30) si riduce ad:

$$r_1 = r', \tag{43}$$

essendo r' la distanza del punto P dall'immagine (o simmetrico) M' del polo M rispetto alla retta s.

Sostituendo quindi r' al posto di r_1 nella (41) avremo, per l'area considerata, il valore in P della G_m il cui polo è il punto M.

Poichè anche in questo caso è verificata la (42), sussiste pure per la G_m il teorema del § precedente.

È facile determinare, per le due aree ora considerate, la funzione m-armonica in σ e che sul contorno assume colle sue derivate normali successive dei primi $m - 1$ ordini, dei valori assegnati; tale funzione infatti risulta espressa dalla (8_1) od ($8'_1$) nella quale la funzione G_m è data dalla (41).

14. Risolviamo ora le questioni analoghe nel caso di 3 variabili.

Sia S la sfera di centro O e raggio R; e σ il contorno di S. Sia poi M un punto qualunque di S, M' ha la sua immagine rispetto a σ, e P un punto mobile qualsiasi di S.

Adoperando le notazioni (28) è chiaro che sussisteranno tutte le formole (29)-(33), mentre, invece della (34), si avrà:

$$G_1 = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}. \tag{44}$$

Ciò posto, determiniamo nel punto P, la funzione G_m il cui polo è il punto M; costruiremo perciò dapprima la funzione preliminare Γ_m, che nei punti P di σ soddisfa alle (5), cioè:

$$\frac{d^i \Gamma_m}{d n^i} = \frac{d^i r^{2m-3}}{d n^i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{5}$$

A tale oggetto esprimeremo ancora Γ_m mediante la (35); ne viene che la (36) sussiste ancora, e osservando che per $i = 0$ si ha dalla (5):

$$\Gamma_m = r^{2m-3},$$

si deduce, nei punti di σ:

$$\varphi_m = r^{2m-3},$$

e poichè la funzione φ_m deve essere m-armonica, si può porre, nei punti di S:

$$\varphi_m = r_1^{2m-3}; \tag{45}$$

infatti, questa funzione, come si vede subito ricorrendo alla (30), è appunto m-armonica in S, e poi sul contorno vale r^{2m-3}.

Per determinare la funzione φ_{m-1} si osservi che la (38) vale ancora, e confrontandola colla (5) per $i=1$, si deduce, ricordando la (45):

$$(2m-3)r^{2m-4}\frac{dr}{dn}=(2m-3)r^{2m-4}\frac{dr_1}{dn}+2r\left(\frac{dr}{dn}-\frac{dr_1}{dn}\right)\varphi_{m-1},$$

onde:

$$\varphi_{m-1}=\frac{2m-3}{2}r^{2m-5},$$

equazione che è verificata nei punti di σ; e poichè la funzione φ_{m-1} è poliarmonica d'ordine $m-1$, si può porre, nella sfera S:

$$\varphi_{m-1}=\frac{2m-3}{2}r_1^{2m-5}. \tag{46}$$

Determiniamo ora la funzione φ_{m-2}; basta osservare che la (40) è ancor vera, poi sostituendo a φ_m, φ_{m-1} i valori (45), (46), ricordando la (5) per $i=2$, e riducendo si ha facilmente:

$$\varphi_{m-2}=\frac{(2m-3)(2m-5)}{2!\,2^2}r^{2m-7},$$

equazione che deve esser soddisfatta sulla superficie σ; nei punti di S potremo assumere:

$$\varphi_{m-2}=\frac{(2m-3)(2m-5)}{2!\,2^2}r_1^{2m-7};$$

in modo analogo è facile ottenere:

$$\varphi_{m-3}=\frac{(2m-3)(2m-5)(2m-7)}{3!\,2^3}r_1^{2m-9},$$

e in generale:

$$\varphi_{m-i}=\frac{(2m-3)(2m-5)\cdots(2m-2i+1)(2m-2i-1)}{i!\,2^i}r_1^{2m-3-2i}$$

$$(i=1,2,\ldots,m-1).$$

Sostituendo nella (35) si ottiene:

$$\Gamma_m=r_1^{2m-3}+\sum_1^{m-1}\frac{(2m-3)(2m-5)\cdots(2m-2i-1)}{i!\,2^i}r_1^{2m-3-2i};$$

dopo ciò, per avere la funzione G_m basta sostituire nella (7) e si ha:

$$G_m=r^{2m-3}-r_1^{2m-3}+\sum_1^{m-1}{}_i\,\frac{(2m-3)(2m-5)\ldots(2m-2i-1)}{i!\,2^i}r_1^{2m-3-2i}. \tag{47}$$

Un altro metodo, completamente diverso, per costruire la funzione

G_m nel caso della sfera, è stato esposto dal Prof. MARCOLONGO nella sua Nota: *Determinazione della funzione di* GREEN *di grado n, nel caso di una sfera* *). In una Nota successiva **) egli ha dato l'espressione esplicita della G_m ***) sotto una forma diversa dalla (47), e ne ha dedotto alcune interessanti proprietà.

15. Anche nel caso della sfera sussiste la (42), cioè $r_1 > r$; da ciò si può dedurre facilmente che la funzione G_m ha un segno costante in S.

Infatti dalla (47) si ha:

$$G_2 = -\frac{1}{2r_1}(r_1 - r)^2,$$

che può pure scriversi:

$$G_2 = -\frac{1}{2} r \int_1^{\frac{r_1}{r}} \frac{v^2 - 1}{v^2} dv,$$

onde, nel campo S:

$$G_2 < 0.$$

Per la funzione G_3 si ha:

$$G_3 = \frac{1}{8r_1}(r_1^4 - 6r_1^2 r^2 + 8r_1 r^3 - 3r^4),$$

che può mettersi sotto la forma:

$$G_3 = \frac{1.3}{2!\,2^2} r^3 \int_1^{\frac{r_1}{r}} \frac{(v^2-1)^2}{v^2} dv,$$

perciò, nella sfera S:

$$G_3 > 0.$$

---

*) Rend. Acc. Lincei, vol. X, 2° sem. 1901, pp. 131-137.

**) *Sulla funzione di* GREEN *di grado n per la sfera* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVI (1902), pp. 230-235]. In fine di questa Nota il Prof. MARCOLONGO cortesemente scrive: « Dopo la pubblicazione della mia Nota all'Accademia « dei Lincei, il Dr. BOGGIO mi ha gentilmente informato di aver per suo conto riso- « luto, con metodo del tutto diverso, il problema della determinazione della funzione « G_n per la sfera, il cerchio, il semi-piano, ecc. Tale metodo e alcune proprietà delle « G_n sono esposti in una Memoria che egli ha compiuto da oltre un anno e che an- « cora non è stampata ». Il presente lavoro è appunto quello di cui è cenno nelle linee ora citate; esso, e quello che gli farà seguito, trovasi già annunziato nelle pag. 6 e 198 delle mie due prime note già citate.

***) Cfr. anche: ORLANDO, *Sulla funzione n^{ma} di* GREEN *per la sfera* [Giornale di Matematiche di BATTAGLINI, vol. XLII (1904), pp. 292-296].

In generale, la (47) può porsi sotto la forma:

$$(47') \quad G_m = (-1)^{m+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-3)}{(m-1)!\, 2^{m-1}} r^{m-3} \int_1^{\frac{r_1}{r}} \frac{(v^2-1)^{m-1}}{v^2} dv,$$

quindi, ricordando la (42) si conclude che *la funzione G_m ha un segno costante nella sfera S*; e precisamente se m è pari si ha $G_m < 0$, e se m è dispari è invece $G_m > 0$.

Se il campo S, invece che una sfera, è lo spazio indefinito limitato da un piano σ, la funzione r_1 risulterà espressa dalla (43), ove r' rappresenta la distanza del punto P dall'immagine (o simmetrico) M' di M rispetto al piano σ; e la funzione G_m sarà ancora data dalla (47).

Inoltre sussisterà sempre il teorema, dimostrato dianzi, sul segno di G_m.

Per ciascuno di questi campi si ha poi, mediante la (8) od (8'), la funzione m-armonica in S e che sul contorno assume, colle sue derivate normali successive dei primi $m-1$ ordini, dei valori assegnati.

16. Cerchiamo ora la funzione di Green d'ordine m e di 1ª specie nel caso di n variabili e di un campo sferico.

Converrà distinguere due casi:

1° Il numero n è dispari; oppure n è pari, ma però $2m < n$.

2° Il numero n è pari ed inoltre $2m \geqq n$.

Indicando con $\Gamma_{m,n}$ la funzione preliminare di Green d'ordine m e di 1ª specie avente per polo il punto M di S, essa dovrà, nei punti del contorno soddisfare nel 1° caso alle equazioni:

$$\frac{d^i \Gamma_{m,n}}{d n^i} = \frac{d^i (r^{2m-n} \log r)}{d n^i} \qquad (i = 0, 1, \dots m-1)$$

e nel 2° caso alle altre:

$$\frac{d^i \Gamma_{m,n}}{d n^i} = \frac{d^i r^{2m-n}}{d n^i} \qquad (i = 0, 1, \dots, m-1),$$

ove, al solito, r indica la distanza di M da un punto variabile qualunque P di S.

Dopo ciò la funzione di Green $G_{m,n}$ d'ordine m e di 1ª specie avente per polo M sarà data dalla formola:

$$(7') \qquad G_{m,n} = r^{2m-n} - \Gamma_{m,n},$$

che è l'analoga della (7); ovvero dall'altra:

$$(7_1') \qquad G_{m,n} = r^{2m-n} \log r - \Gamma_{m,n},$$

che è la corrispondente della (7_1).

Adoperando le stesse notazioni che nel § 10, si conclude che la funzione $G_{m,n}$ è in ogni caso data dalla formola seguente, che è una generalizzazione delle (41'), (47'):

$$(48) \qquad G_{m,n} = k_{m,n} r^{2m-n} \int_1^{\frac{r_1}{r}} \frac{(v^2 - 1)^{m-1}}{v^{n-1}} dv,$$

ove $k_{m,n}$ è una costante numerica, che ora determineremo.

Poichè nel campo considerato è soddisfatta la (42), cioè $r_1 > r$, si trae dalla (48) che *la funzione $G_{m,n}$ ha un segno costante nel campo considerato,* e precisamente ha il segno della costante $k_{m,n}$.

È facile trovare il valore di questa costante. Infatti nel 1° caso si ha dalla (48), eseguendo l'integrazione:

$$(48') \quad G_{m,n} = k_{m,n} r^{2m-n} \sum_0^{m-1}{}_i (-1)^i \binom{m-1}{i} \frac{1}{2m-n-2i} \left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^{2m-n-2i} - 1\right],$$

cioè:

$$G_{m,n} = k_{m,n} \sum_0^{m-1}{}_i (-1)^i \binom{m-1}{i} \frac{1}{2m-n-2i} (r^{2i} r_1^{2m-n-2i} - r^{2m-n});$$

in questa formola il coefficiente di r^{2m-n} è:

$$k_{m,n} \sum_0^{m-1}{}_i (-1)^i \binom{m-1}{i} \frac{-1}{2m-n-2i},$$

onde, confrontando colla (7') si deduce:

$$k_{m,n} = -\frac{1}{\sum_0^{m-1}{}_i (-1)^i \binom{m-1}{i} \frac{1}{2m-n-2i}}.$$

Nel 2° caso, posto per brevità $2p = 2m - n$, si ha invece della (48') la seguente:

$$G_{m,n} = k_{m,n} r^{2m-n} \left\{ \sum_0^{m-1}{}'_i (-1)^i \binom{m-1}{i} \frac{1}{2m-n-2i} \left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^{2m-n-2i} - 1\right] + (-1)^p \binom{m-1}{p} \log \frac{r_1}{r} \right\},$$

ove colla scrittura $\sum'_i$ si intende che la sommatoria va fatta escludendo il valore $i = p$; si può ancora scrivere:

$$G_{m,n} = k_{m,n} \left\{ \sum_0^{m-1}{}'_i (-1)^i \binom{m-1}{i} \frac{1}{2m-n-2i} (r^{2i} r_1^{2m-n-2i} - r^{2m-n}) + (-1)^p \binom{m-1}{p} r^{2m-n} (\log r_1 - \log r) \right\};$$

in questa formola il coefficiente di $r^{2m-n}\log r$ vale:

$$-k_{m,n}(-1)^p\binom{m-1}{p},$$

quindi, confrontando colla $(7'_1)$ otteniamo:

$$k_{m,n}=\frac{(-1)^{p+1}}{\binom{m-1}{p}}.$$

Si può infine osservare che essendo la (32), al pari della (29), simmetrica rispetto a ρ e ρ_1, cioè ad M e P, ne viene che la stessa proprietà compete alla funzione $G_{m,n}$, il che è in armonia col teorema di reciprocità relativo alle funzioni di GREEN.

17. Dalla formola (48) è facile dedurre una proprietà della funzione $G_{m,n}$, che è un'estensione di un'altra dovuta al POINCARÉ *), relativa alla ordinaria funzione di GREEN.

Consideriamo, per semplicità, il caso di 3 variabili. Indichiamo con S ed S' due sfere di cui la seconda sia interna alla prima; sia poi M un punto fisso qualunque di S' e diciamo G_m la funzione di GREEN d'ordine m e di 1ª specie, relativa ad S, e avente per polo M, e G'_m quella relativa ad S' e avente pure per polo M.

Sussiste allora la proprietà seguente: *In ogni punto di S' si ha*:

$$G_m > G'_m, \quad \text{se } m \text{ è dispari,}$$

$$G_m < G'_m, \quad \text{se } m \text{ è pari.}$$

Infatti conservando le notazioni dei §§ precedenti e indicando con r'_1 la funzione analoga ad r_1, ma relativa però alla sfera S', si ha dalla (47'):

$$G_m=(-1)^{m+1}\frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{(m-1)!\,2^{m-1}}r^{2m-3}\int_1^{\frac{r_1}{r}}\frac{(v^2-1)^{m-1}}{v^2}dv,$$

$$G'_m=(-1)^{m+1}\frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{(m-1)!\,2^{m-1}}r^{2m-3}\int_1^{\frac{r'_1}{r}}\frac{(v^2-1)^{m-1}}{v^2}dv,$$

onde:

$$(49)\quad G_m-G'_m=(-1)^{m+1}\frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{(m-1)!\,2^{m-1}}r^{2m-3}\int_{\frac{r'_1}{r}}^{\frac{r_1}{r}}\frac{(v^2-1)^{m-1}}{v^2}dv;$$

---

*) POINCARÉ, *Theorie du Potentiel newtonien,* § 73 (Paris, 1899).

ora si ha:

$$(50) \qquad r_1 > r'_1,$$

questa diseguaglianza si può verificare facilmente con un calcolo diretto; però si possono evitare calcoli osservando che $\frac{1}{r_1}$ è la ordinaria funzione preliminare di GREEN relativa ad S e avente per polo M, ed $\frac{1}{r'_1}$ è l'analoga funzione relativa ad S' e avente pure per polo M; ma per questo caso il teorema in questione è vero, come ha stabilito il POINCARÉ, cioè $\frac{1}{r_1} < \frac{1}{r'_1}$, di qui segue la (50), e dalla (49) si deduce poi senz'altro:

$$G_m - G'_m > 0, \qquad \text{se } m \text{ è dispari},$$

$$G_m - G'_m < 0, \qquad \text{se } m \text{ è pari},$$

conforme al teorema.

V.

Studio delle derivate successive delle funzioni di Green d'ordine m.

18. Mediante le formole (41), (47) è facile trovare dei limiti superiori per le derivate successive della funzione G_m relativa ad un campo circolare o sferico.

Stabiliremo anzitutto alcune diseguaglianze relative alle derivate successive della funzione G_1.

Consideriamo perciò nuovamente un cerchio σ di raggio R, il cui centro O è l'origine delle coordinate; al solito, diremo s il contorno di σ.

Usando le stesse notazioni che a § 10, la funzione G_1 è data dalla (34), cioè:

$$G_1 = \log r - \log r_1 .$$

Siano poi (x, y) le coordinate del polo M, (ξ, η) quelle del punto mobile P, e cerchiamo le derivate successive di G_1 rispetto ad x, y.

Indichiamo perciò con ψ l'angolo della direzione PM coll'asse Ox; allora poichè: $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$, si ha:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\psi = \frac{x-\xi}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \operatorname{sen}\psi = \frac{y-\eta}{r},$$

se ne trae facilmente:

$$\frac{\partial \log r}{\partial x} = \frac{1}{r} \cos \psi , \qquad \frac{\partial \log r}{\partial y} = \frac{1}{r} \operatorname{sen} \psi ,$$

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^2} \cos 2\psi = -\frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} , \qquad \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{r^2} \operatorname{sen} 2\psi ,$$

e in generale:

$$(51) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^n \log r}{\partial x^n} &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{r^n} \cos n\psi \\ \frac{\partial^n \log r}{\partial x^{n-1} \partial y} &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{r^n} \operatorname{sen} n\psi \end{aligned} \right. \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

le altre derivate d'ordine n non hanno un valore diverso da quelle ora scritte; indicando quindi con D^n una derivata parziale qualsiasi d'ordine n, rispetto alle variabili x, y, cioè uno qualunque dei simboli

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} , \quad \frac{\partial^n}{\partial x^{n-1} \partial y} , \ldots \frac{\partial^n}{\partial x \partial y^{n-1}} , \quad \frac{\partial^n}{\partial y^n} ,$$

avremo dalle (51):

$$| D^n \log r | < \frac{(n-1)!}{r^n} .$$

Veniamo ora alle derivate di $\log r_1$. Ponendo $\frac{\rho_1}{R} = \alpha$, si deduce dalla (32):

$$(32') \qquad r_1^2 = r^2 + (1 - \alpha^2)(R^2 - \rho^2) ,$$

perciò derivando e riducendo:

$$r_1 \frac{\partial r_1}{\partial x} = \alpha^2 x - \xi , \qquad r_1 \frac{\partial r_1}{\partial y} = \alpha^2 y - \eta ,$$

onde:

$$r_1^2 \left[\left(\frac{\partial r_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{\rho_1^2}{R^4} (\rho^2 \rho_1^2 + R^4 - 2 R^2 \rho \rho_1 \cos \theta) ,$$

quindi, per la (31):

$$\left(\frac{\partial r_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial y} \right)^2 = \frac{\rho_1^2}{R^2} = \alpha^2 ;$$

ne segue che si può trovare un angolo ψ_1 tale che:

$$\alpha \cos \psi_1 = \frac{\partial r_1}{\partial x} , \qquad \alpha \operatorname{sen} \psi_1 = \frac{\partial r_1}{\partial y} .$$

Osserviamo ora, ciò che del resto è facile verificare, che da ogni eguaglianza contenente x, y, r, ψ se ne ottiene una nuova sostituendo al posto di queste quattro quantità rispettivamente queste altre: $\alpha^2 x$, $\alpha^2 y$, αr_1, ψ_1. Quest'osservazione permette di dedurre subito dalle (51), senza eseguire nuovi calcoli, le seguenti eguaglianze:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^n \log r_1}{\partial x^n} &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{r_1^n}\alpha^n \cos n\psi_1 \\ \frac{\partial^n \log r_1}{\partial x^{n-1}\partial y} &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{r_1^n}\alpha^n \operatorname{sen} n\psi_1 \end{aligned}\right. \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

da cui segue:

$$|D^n \log r_1| < \frac{(n-1)!}{r_1^n}\alpha^n,$$

od ancora, per la (42):

$$|D^n \log r_1| < \frac{(n-1)!}{r^n}\alpha^n.$$

Ricordando l'espressione di G_1 deduciamo poi:

$$(52) \qquad |D^n G_1| < (1+\alpha^n)\frac{(n-1)!}{r^n} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

19. Riprendiamo ora la (41) che può anche scriversi:

$$G_m = \sum_0^{m-1}{}_i\, a_i r^{2i} r_1^{2m-2-2i} + r^{2m-2} G_1,$$

le a_i essendo costanti numeriche conosciute.

La $\sum$ che comparisce nel 2° membro è un polinomio omogeneo di grado $2m-2$ in x, y, ξ, η, R, come si vede subito ricorrendo alla (32'); chiamando $P(x, y)$ tale polinomio, potremo ancora scrivere:

$$G_m = P + r^{2m-2} G_1;$$

operando col simbolo derivatorio D^i è facile avere un risultato della forma:

$$(53) \qquad D^i G_m = D^i P + \sum_0^{i}{}_j\, h_j D^j r^{2m-2} D^{i-j} G_1,$$

le h_j essendo costanti numeriche; ora $D^i P$ è un polinomio omogeneo di grado $2m-2-i$ in x, y, ξ, η, R, e poichè x, y, ξ, η non superano R potremo scrivere evidentemente:

$$|D^i P| < a_i' R^{2m-2-i}, \qquad \text{se} \qquad i \leqq 2m-2,$$

le a_i' essendo numeri positivi, ed:

$$D^i P = 0, \qquad \text{se} \qquad i > 2m-2;$$

si ha poi ancora:

$$|D^j r^{2m-2}| < b_j' r^{2m-2-j}, \qquad \text{se} \qquad j \leqq 2m-2,$$

le b'_j essendo pure numeri positivi, ed

$$D^j r^{2m-2} = 0\,, \qquad \text{se} \qquad j > 2m-2.$$

Applicando la (52) abbiamo quindi:

$$|D^j r^{2m-2} D^{i-j} G_1| < b''_{i,j} r^{2m-2-i}\,;$$

sostituendo nella (53) otteniamo un risultato della forma:

$$|D^i G_m| < a'_i R^{2m-2-2i} + b''_{i,j} r^{2m-2-i} < a''_i R^{2m-2-i} \quad (i \leqq 2m-2),$$

$$|D^{2m-1} G_m| < \frac{b'''}{r}\,,$$

a''_i, b''' essendo altri numeri positivi.

Se ne deduce con somma facilità:

$$(54) \qquad \int_\sigma |D^i G_m| d\sigma < c_i R^{2m-i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2m-1),$$

c_i essendo altri numeri positivi. Si ottiene poi per $i = 0$ una disuguaglianza analoga alla precedente ricorrendo alla (26′).

È chiaro che *i limiti superiori ora trovati dipendono esclusivamente dal cerchio σ, e tendono a zero quando il raggio decresce indefinitamente.*

Ciò posto, sia $F(x, y)$ una funzione data, continua colle sue derivate prime, e consideriamo la funzione u, regolare in σ, che soddisfa alle equazioni:

$$\begin{cases} \Delta_{2m} u = F & (\text{in } \sigma) \\ u = \dfrac{du}{dn} = \cdots = \dfrac{d^{m-1}u}{dn^{m-1}} = 0 & (\text{su } s)\,; \end{cases}$$

essa è data, come abbiamo visto, dalla (9_1), cioè:

$$k' u(x, y) = \int_\sigma G_m(x, y, \xi, \eta) F(\xi, \eta)\, d\sigma\,,$$

dalla quale si ha:

$$k' D^i u = \int_\sigma D^i G_m . F d\sigma \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2m-1).$$

Chiamando Φ il massimo valore assoluto di F in σ, e ricordando che la funzione $(-1)^m G_m$ è sempre positiva, qualunque sia m, nel cerchio σ (§ 12), si ha:

$$k' |u| < (-1)^m \Phi \int_\sigma G_m d\sigma\,,$$

ed applicando la (26′):

$$|u| < c_0 (R^2 - \rho^2)^m \Phi,$$

ove c_0 indica una costante positiva.

Dalla (54) abbiamo poi:

$$k' \mid D^i u \mid < c_i R^{2m-i} \Phi \qquad (i = 1, 2, \dots, m-1),$$

sicchè indicando con λ_i una costante numerica positiva, possiamo scrivere:

$$|D^i u| < \lambda_i R^{2m-i} \Phi \qquad (i = 0, 1, \dots, 2m-1). \tag{55}$$

Risulta evidente, da queste diseguaglianze, che *le derivate parziali, dei primi $2m - 1$ ordini, della funzione u, sono finite anche nei punti del contorno, e tendono, in valor assoluto, a zero quando il cerchio σ decresce indefinitamente.*

20. Stabiliamo ora le proprietà analoghe nel caso di una sfera S.

Abbiamo già visto che la funzione G_1 avente per polo il punto M di S è data dalla (44), cioè:

$$G_1 = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}.$$

Siano poi (x, y, z) le coordinate del polo M, (ξ, η, ζ) quelle del punto mobile P, e cerchiamo delle limitazioni per le derivate successive di G_1, rispetto ad x, y, z, e per questo incominciamo dalla funzione $\frac{1}{r}$.

Ponendo:

$$X = x - \xi, \quad Y = y - \eta, \quad Z = z - \zeta,$$

avremo:

$$r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

onde la funzione $\frac{1}{r}$ soddisfa, rispetto alle variabili X, Y, Z, all'equazione di LAPLACE, ed è omogenea di grado -1; ne segue che le sue derivate di un ordine qualunque n rispetto alle variabili x, y, z, o, ciò che è lo stesso, rispetto alle variabili X, Y, Z saranno funzioni omogenee di X, Y, Z di grado $-n-1$; indicando, come già dianzi, con D^n una qualunque di queste derivate d'ordine n è facile vedere (del resto è ben noto) che si avrà:

$$D^n \frac{1}{r} = \frac{P_n(X, Y, Z)}{r^{2n+1}},$$

ove P_n è un polinomio armonico, omogeneo di grado n.

Se poi si fa la trasformazione in coordinate polari:

$$X = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad Y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad Z = r \cos \theta,$$

si può scrivere:

$$P_n = r^n Y_n(\varphi, \theta),$$

essendo $Y_n(\varphi, \theta)$ una funzione sferica d'ordine n; quindi avremo:

(56) $$D^n \frac{1}{r} = \frac{1}{r^{n+1}} Y_n(\varphi, \theta).$$

Cerchiamo ora un'espressione analoga per $D^n \frac{1}{r_1}$. Dalla (32') è facile trarre, procedendo come a § 18:

$$\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial z}\right)^2 = \alpha^2,$$

onde si possono trovare due angoli φ_1, θ_1 tali che:

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = \alpha \operatorname{sen} \theta_1 \cos \varphi_1, \quad \frac{\partial r_1}{\partial y} = \alpha \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \varphi_1, \quad \frac{\partial r_1}{\partial z} = \alpha \cos \theta_1.$$

In virtù di un'osservazione fatta nel § 18, si deduce allora senz'altro dalla (56):

$$D^n \frac{1}{r_1} = \frac{\alpha^n}{r_1^{n+1}} Y_n(\varphi_1, \theta_1).$$

Ricordando l'espressione di G_1 avremo dunque:

(57) $$|D^n G_1| < \left|D^n \frac{1}{r}\right| + \left|D^n \frac{1}{r_1}\right| < \frac{h_n}{r^{n+1}},$$

ove h_n è una costante numerica positiva; questa diseguaglianza è l'analoga della (52).

21. Riprendiamo ora la (47) che può anche esser posta sotto la forma:

(58) $$G_m = \left\{a\, r^{2m-3} + \sum_0^{m-2} {}_i\, a_i\, r^{2i} r_1^{2m-3-2i}\right\} + b\, r^{2m-2} G_1,$$

le a, b essendo costanti numeriche conosciute.

Considerando l'espressione entro le $\{\cdots\}$ è facile trarne:

$$\left|D^i \left\{a\, r^{2m-3} + \sum_0^{m-2} {}_i\, a_i\, r^{2i} r_1^{2m-3-2i}\right\}\right| < \sum_0^{2m-4} {}_j\, a'_j\, r^j r_1^{2m-3-i-j} \qquad (i \leqq 2m-1),$$

le a'_j essendo numeri positivi; ciò posto consideriamo il termine:

$$r^j r_1^{2m-3-i-j};$$

se $j \leqq 2m-3-i$ (sarà anche $i \leqq 2m-3$), l'esponente di r_1 è positivo o nullo, e poichè, come risulta dalla (32'), si ha:

$$0 \leqq r_1 < R\sqrt{5},$$

ne segue:

$$r^j r_1^{2m-3-i-j} < a''_i R^{2m-3-i} \qquad (i \leqq 2m-3).$$

ove a_i'' è un numero positivo; se invece $j > 2m - 3 - i$, l'esponente di r_1 è negativo, e poichè, come sappiamo, $r_1 > r$, avremo:

$$r^j r_1^{2m-3-i-j} = \frac{r^j}{r_1^{j-(2m-3-i)}} < \frac{r^j}{r^{j-(2m-3-i)}} = r^{2m-3-i};$$

se poi $i \leqq 2m - 3$ si ha:

$$r^{2m-3-i} < a_i''' R^{2m-3-i}, \qquad \text{con} \qquad a_i''' > 0,$$

sicchè concludendo:

$$r^j r_1^{2m-3-i-j} < \begin{cases} a_i'' R^{2m-3-i} & \text{se} \quad i \leqq 2m - 3, \\ r^{2m-3-i} & \text{se} \quad i > 2m - 3; \end{cases}$$

perciò:

$$\left| D^i \left\{ a r^{2m-3} + \sum_0^{m-2} {}_i\, a_i r^{2i} r_1^{2m-3-2i} \right\} \right| < \begin{cases} A_i R^{2m-3-i} & \text{se} \quad i \leqq 2m - 3, \\ A_i' r^{2m-3-i} & \text{se} \quad i > 2m - 3, \end{cases}$$

ove A_i, A_i' sono numeri positivi.

Si riconosce poi facilmente, applicando la (57), e procedendo come a § 19, che:

$$|D^i (r^{2m-2} G_1)| < b_i r^{2m-3-i}.$$

Si deduce quindi dalla (58):

$$|D^i G_m| < b_i' R^{2m-3-i} \qquad (i \leqq 2m - 3),$$

$$|D^{2m-2} G_m| < \frac{b''}{r}, \qquad |D^{2m-1} G_m| < \frac{b'''}{r^2},$$

le b essendo numeri positivi; se ne trae:

$$\int_S |D^i G_m| \, dS < c_i R^{2m-i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2m - 1),$$

ove c_i indica un altro numero positivo.

Nel caso in cui $i = 0$ si ottiene la disuguaglianza analoga dalla (27).

È chiaro che *tali limiti superiori dipendono solo dal campo S, e tendono a zero quando il raggio decresce indefinitamente.*

Se ora si indica con $F(x, y, z)$ una funzione data, continua colle sue derivate prime, e si considera la funzione u, regolare nella sfera S, e che soddisfa alle equazioni:

$$\Delta_{2m} u = F \qquad (\text{in } S),$$

$$u = \frac{du}{dn} = \cdots = \frac{d^{m-1} u}{dn^{m-1}} \qquad (\text{su } \sigma),$$

essa verificherà le disuguaglianze seguenti, analoghe alle (55):

$$(59) \qquad |D^i u| < \lambda_i R^{2m-i} \Phi \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2m - 1),$$

ove Φ è il massimo valor assoluto di F in S e le λ_i sono costanti numeriche positive.

Queste disuguaglianze mostrano chiaramente che *le derivate parziali dei primi* $2m - 1$ *ordini della funzione* u *sono finite anche nei punti del contorno e tendono, in valor assoluto, a zero quando la sfera* S *decresce indefinitamente.*

Questo teorema, e l'analogo enunciato in fine del § 19, sono estensioni di teoremi noti, relativi alla soluzione u dell'equazione $\Delta_2 u = F$, che si annulla sul contorno del campo considerato.

Torino, gennajo 1905.

TOMMASO BOGGIO.