III. Ueber ein neues Photometer und Polarimeter nebst einigen damit angestellten Beobachtungen; von H. Wild aus Zürich,

Mitglied des physikalischen Seminars zu Königsberg.

So viel mir bekannt ist, kommt es bei allen bisherigen Photometern schliesslich immer darauf an, zu beurtheilen, ob zwei von den beiden zu vergleichenden Lichtquellen erleuchtete Flächen genau gleich hell seyen oder nicht. Nach Bouguer vermag so das menschliche Auge blofs noch einen Unterschied von $\frac{1}{64}$ in den Helligkeiten beider Flächen zu unterscheiden. In neuerer Zeit hat Masson nach einer andern Methode über die Empfindlichkeit des Auges in dieser Hinsicht Versuche angestellt (*Annales de chimie et de physique* 1845, t. XIV, p. 129, Auszug Pogg. Annalen Bd. 63) und ist zu den Resultaten gelangt, dafs für schwache Augen eine Erleuchtungsdifferenz von $\frac{1}{30}$ bis $\frac{1}{10}$ die Gränze der Wahrnehmbarkeit ist, dafs aber bei gewöhnlichen Augen dieselbe bis $\frac{1}{100}$, ja bei sehr guten bis $\frac{1}{120}$ steigt. Eine Genauigkeit von $\frac{1}{100}$ ist indessen für wissenschaftliche, photometrische Untersuchungen nicht hinreichend. Dafs der folgende Apparat, wie wir sehen werden, das Verhältnifs der Intensitäten bis auf ein $\frac{1}{300}$ bis $\frac{1}{1000}$ genau bestimmen läfst, hat mich daher bewogen, denselben der Oeffentlichkeit zu übergeben.

Hr. Prof. Neumann in Königsberg hat in seiner Vorlesung über Optik die Theorie eines Apparats berührt, mittelst dessen man an theilweise polarisirtem Lichte das Verhältnifs der Intensitäten des natürlichen und polarisirten Antheils bestimmen kann. Es beruht derselbe auf folgenden beiden Principien, erstens dafs gleiche Quantitäten senkrecht zueinander polarisirten Lichts sich verhalten wie natürliches Licht, und dafs zweitens nach dem vierten Fresnel-Arago'schen Gesetz zwei senkrecht zueinander polarisirte Strahlen, falls man sie auf eine gemeinschaftliche

Polarisations-Ebene zurückführt, nur dann interferiren, wenn sie ursprünglich eine gemeinschaftliche Polarisations-Ebene gehabt haben, dafs also die Farbenringe, welche eine zwischen zwei Polarisatoren befindliche Krystallplatte zeigt, sofort verschwinden, falls man den vorderen Polarisator wegnimmt d. h. natürliches Licht auf den Krystall einfallen läfst. Berücksichtigend den Zweck dieses Apparates wollen wir denselben *Polarimeter* nennen. Da das auf denselben beiden Principien beruhende Photometer zugleich auch als Polarimeter dienen kann, so werde ich weiter unten auf letzteres zurückkommen und jetzt unmittelbar die Auseinandersetzung des ersten folgen lassen.

a. Theorie des Photometers für natürliches Licht.

Die Idee des Photometers ist einfach folgende. Man verschafft sich von den beiden zu untersuchenden Lichtquellen zwei zusammenfallende Strahlen (resp. Strahlenbündel), die senkrecht zu einander polarisirtes Licht enthalten. Sind diese beiden senkrecht zu einander polarisirten Antheile nicht gleich stark, so wird der resultirende Strahl den Eindruck von theilweise polarisirtem Lichte machen, wogegen er als natürliches Licht erscheint, falls jene beiden Quantitäten gleich sind (siehe das erste Princip). Besitzt man nun Mittel, die componirenden polarisirten Antheile beliebig zu ändern und alsdann den Punkt genau zu erkennen wo beide gleich sind, also zu natürlichem Lichte sich neutralisiren, so werden wir sofort im Stande seyn, das Verhältnifs der Intensitäten der beiden Lichtquellen anzugeben, falls wir für den Neutralisationspunkt bestimmen können, wie viel in jedem Strahl von dem natürlichen Licht der betreffenden Lichtquellen polarisirt worden ist. Diesen Anforderungen kann auf folgende Weise genügt werden. J und J_1 (Fig. 3 Taf. II) seyen die beiden zu vergleichenden Lichtquellen mit den Intensitäten J^2 und J_1^2 . Auf zwei parallelen Richtungen JM und J_1M_1 sollen zwei Platten S und S_1 vertical so aufgestellt seyn, dafs sie einander parallel sind, und dafs der von S_1 reflectirte

Strahl die Platte S an derselben Stelle trifft, wo der von J kommende Strahl durchgeht. Dann erhalten wir in SM zwei zusammenfallende Strahlen von der gewünschten Eigenschaft, indem nämlich der eine, der zweimal reflectirte, Licht enthält das nach der Horizontal-Ebene (Reflections-Ebene) polarisirt ist, der andere, durchgegangene, aber Licht, dessen Polarisations-Ebene mit der Vertical-Ebene zusammenfällt d. h. mit der Ebene, die senkrecht steht auf der Einfall-Ebene. Um nun das Verhältniß der beiden Componenten zu verändern, befindet sich auf dem Wege JS eine um eine horizontale Axe drehbare Glasplatte D , welche einen Theil des von J kommenden Lichts nach der Horizontal-Ebene polarisirt. Da hier der Einfallswinkel variabel ist, so wird es (falls die beiden Intensitäten J^2 und J_1^2 nicht allzusehr differiren) immer möglich seyn, durch Drehung der Platte D in SM eine Gleichheit des nach der Vertical-Ebene und senkrecht dazu polarisirten Lichts zu erzielen. Den Moment aber, in welchem diese Neutralisation eintritt, zu erkennen, dazu bietet uns das zweite Princip ein vorzügliches Mittel. Polarisiertes Licht zeigt dem mit einem Polarisator bewaffneten Auge in einer Krystallplatte die Interferenzstreifen, natürliches Licht nicht. Wir haben somit in M bloß eine Krystallplatte K und einen Turmalin T anzubringen und zuzusehen, wann bei der Drehung von D die Interferenzfarben im Gesichtsfeld verschwinden. In dem Augenblick, wo dieses stattfindet, sind die componirenden Antheile polarisirten Lichts gleich; nennen wir sie H^2 und V^2 , so hat man also

$$H^2 = V^2.$$

Das vertical polarisirte Licht V^2 stammt bloß her von der Lichtquelle J und ist eine Folge des Durchgangs durch die Glasplatte S , somit abhängig vom constanten Einfallswinkel i des Strahls JM auf S und abhängig vom Brechungsverhältniß m dieser Glasplatte. Es ist aber das Licht vorher noch durch die drehbare Glasplatte D durchgegangen, somit V^2 auch eine Function des variablen Einfallswin-

kels φ auf diese Platte und ihres Brechungsverhältnisses m_2 . Wir haben somit:

$$V^2 = F(J^2, i, \varphi, m, m_2).$$

H^2 , d. i. das horizontal polarisirte Licht, besteht aus zwei Theilen. Einmal rührt es her von J_1 , welches Licht von S_1 unterm Winkel i nach S und von da unter demselben Winkel nach M reflectirt worden ist. Dieser Theil wird somit gegeben seyn durch $F_1(J_1^2, i, m, m_1)$ falls m_1 das Brechungsverhältniß von der Platte S_1 . Der zweite Theil kommt von J und ist erzeugt durch den Durchgang dieses Lichts durch die Platte D , ist somit, da es nachher auch noch durch die Platte S geht, darzustellen durch: $f(J^2, \varphi, i, m_2, m)$ und die Gesamt-Horizontal-Componente ist folglich:

$$H^2 = F_1(J_1^2, i, m, m_1) + f(J^2, \varphi, i, m_2, m).$$

Stellt nun φ denjenigen Einfallswinkel auf die drehbare Glasplatte D dar, bei welchem die Neutralisation eintritt, so haben wir die Bedingungsgleichung:

$$F(J^2, i, \varphi, m, m_2) = F_1(J_1^2, i, m, m_1) + f(J^2, \varphi, i, m_2, m).$$

Wir sehen, daß sich hieraus das Verhältniß der unbekannten Größen J^2 und J_1^2 bestimmen läßt, falls die Functionen F , F_1 und f bekannt sind. Der Winkel φ läßt sich an einem getheilten Kreise, auf den ein an der Axe von D befestigter Zeiger weist, ablesen; die constanten Größen i , m , m_1 und m_2 sind ein für allemal zu bestimmen. Ehe wir indessen zur Ableitung der obigen Functionen aus den Gesetzen der Reflexion und Refraction übergehen, wollen wir vorher noch einiger Abänderungen in der angeführten Anordnung des Apparats erwähnen, welche die practische Ausführung erheischt. Der Einfachheit der Rechnung halber thut man zunächst gut, alle Platten von derselben Glastafel zu nehmen, so daß sie alle denselben Brechungscoëfficient haben (also $m = m_1 = m_2$), sodann den Einfallswinkel i auf die Platten S und S_1 gleich dem Polarisations-Winkel zu machen. Letzteres ist auch noch aus folgendem Grunde vorthellhaft. Die Farbenringe im Krystall treten um so deutlicher hervor und die Beur-

theilung des Zeitmoments, wo sie verschwinden, wird daher um so schärfer seyn, je vollständiger das auf denselben fallende Licht polarisirt ist. Fällt das Licht auf die Platten S und S_1 unterm Polarisations-Winkel auf, so sind allerdings die von J_1 herkommenden Strahlen nach der doppelten Reflexion vollständig polarisirt; dieß ist dagegen nicht der Fall mit dem von J her durch S durchgegangenen Licht, indem von den $\frac{7}{8}$ Theilen des einfallenden natürlichen Lichts, die durchgehen, bloß etwa $\frac{1}{8}$ polarisirt wäre; es würden daher doch die Farbenringe in dem vielen natürlichen (ungefärbten) Licht undeutlich verschwimmen. Um dieß zu vermeiden, suchte man auch das durchgehende Licht möglichst vollständig zu polarisiren und stellte zu dem Ende hin statt der einen Glasplatte S eine Glassäule d. h. eine Schicht von etwa zehn parallelen Platten auf. Die Anwendung der Glassäule hat außerdem noch den Vortheil, daß eine größere Portion des von J_1 über S_1 kommenden Lichts nach M hin reflectirt wird. Endlich hat man jetzt auch statt der einen Glasplatte D eine drehbare Glassäule anzuwenden, weil bei einer Platte der geringen polarisirten Lichtmenge halber, die sie zu liefern im Stande ist, einerseits die Grenzen, innerhalb welcher die Verschiedenheit von J^2 und J_1^2 liegen darf, zu enge würden, und man andererseits allzu große Drehungen vornehmen müßte, damit merkliche Veränderungen im Farbenbild vor sich gehen. Die Glassäule S enthalte n_1 Platten, die Säule D dagegen n , so werden die von diesen Säulen polarisirten Lichtmengen auch Functionen von n und n_1 seyn. Die Bedingungsgleichung für den Neutralisationswinkel φ wird daher nach diesen Abänderungen folgende Gestalt annehmen:

$$F(J^2, \varphi, m, n_1, n) = F_1(J_1^2, m, n_1) + f(J^2, \varphi, m, n, n_1)$$

da sich der Winkel i als Polarisationswinkel durch das Brechungsverhältniß m ausdrücken läßt. Bei der Bestimmung der Functionen F , F_1 und f , die wir zunächst vorzunehmen haben, setze ich die von Hrn. Prof. Neumann in der schon oben erwähnten Vorlesung entwickelten

Formeln für die von einzelnen Glasplatten und von Glas-säulen reflectirten und durch sie durchgegangenen Lichtintensitäten als gegeben voraus¹⁾. Bezeichnen wir das von einer Schicht von n Glasplatten reflectirte Licht mit R^2_n und das durch dieselbe durchgehende mit D^2_n , so hat man, falls das einfallende Licht L^2 nach der Einfalls-Ebene oder senkrecht dazu polarisirt ist:

$$R^2_n = L^2 \frac{2nr^2}{1 + (2n-1)r^2}, \quad D^2_n = L^2 \frac{1-r^2}{1 + (2n-1)r^2}.$$

Die reflectirte Amplitude r ist durch die Fresnel'schen Formeln gegeben. Für Licht, das nach der Einfalls-Ebene polarisirt ist, hat man nämlich:

$$r = \frac{\sin(\varphi - \varphi_1)}{\sin(\varphi + \varphi_1)} = \sigma.$$

Fällt dagegen senkrecht zur Einfalls-Ebene polarisirtes Licht ein, so ist

$$r = \frac{\tan(\varphi - \varphi_1)}{\tan(\varphi + \varphi_1)} = \tau.$$

Ist der Einfallswinkel φ gleich dem Polarisationswinkel, so gehen gemäß den Definitionen des letzteren

$$\varphi + \varphi_1 = 90^\circ \quad \tan \varphi = m$$

die beiden Ausdrücke über in

$$\sigma = \frac{1-m_2}{1+m_2} \quad \tau = 0.$$

Hat man Licht, das unter irgend einem Azimut α polarisirt ist, so zerlegt man dasselbe nach der Einfalls-Ebene und senkrecht dazu:

$$K^2 = K^2 \cos^2 \alpha + K^2 \sin^2 \alpha,$$

berechnet nach obigen Formeln jede Portion für sich und setzt dann schliesslich die Componenten wieder zu einer

1) Eine der Neumann'schen ganz entsprechende Ableitung dieser Formeln für eine Platte findet sich in einer Abhandlung von Clausius (Crelle's Journal Bd. 36). Von diesen Ausdrücken für eine Platte ausgehend, lassen sich leicht diejenigen für zwei Platten, hierauf die für drei und so fort berechnen; es ist indessen schon aus der Vergleichung der Formeln für 1, 2 und 3 Platten das allgemeine Gesetz für n Platten zu erkennen.

resultirenden Intensität zusammen. Ist endlich das einfallende Licht natürliches J^2 , so bringt man die Betrachtung an den in einem unendlich kleinen Zeitintervall nach irgend einem Azimut α polarisirten Antheil: $J^2 \frac{d\alpha}{2\pi}$, behandelt diesen, wie eben gezeigt wurde, und integrirt dann schliesslich nach α von 0 bis 2π . Die beiden Componenten: $J^2 \frac{d\alpha}{2\pi} \cos^2 \alpha$ und $J^2 \frac{d\alpha}{2\pi} \sin^2 \alpha$ verwandeln sich bei der Integration in $\frac{J^2}{2}$, d. h. also, wir können uns das natürliche Licht einfach aus zwei gleichen senkrecht zu einander polarisirten Lichtmengen bestehend vorstellen, und dies erklärt uns hinwieder, warum zwei gleiche senkrecht zu einander polarisirte Lichtquantitäten sich wie natürliches Licht verhalten. Wir denken uns somit von den bei unserem Apparat einfallenden natürlichen Lichtintensitäten J^2 und J_1^2 je die eine Hälfte nach einer Vertical-, die andere nach einer Horizontal-Ebene polarisirt, so dass wir unmittelbar nach obigen Formeln den Durchgang dieser Lichtportionen berechnen können. Das von J_1 herkommende Licht fällt zunächst auf die eine Glasplatte S_1 . Da die Einfallsebene hier eine Horizontalebene ist, so erhalten wir im reflectirten von dem horizontal polarisirten Antheil des einfallenden:

$$h_1^2 = \frac{J_1^2}{2} \cdot \frac{2\sigma^2}{1+\sigma^2},$$

und das vertical polarisirte einfallende Licht gibt im reflectirten die Portion:

$$v_1^2 = \frac{J_1^2}{2} \cdot \frac{2\tau^2}{1+\tau^2}.$$

Nun ist aber der Einfallswinkel bei S_1 gleich dem Polarisationswinkel, daher die beiden vorigen Ausdrücke übergehen in:

$$h_1^2 = \frac{J_1^2}{2} \cdot \frac{2\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2}{1+\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2}, \quad v_1^2 = 0.$$

Das reflectirte Licht ist folglich vollständig nach einer Horizontalebene polarisirt; es trifft dasselbe wieder unterm Polarisationswinkel auf die Glassäule S von n_1 Platten und da die Einfallsebene hier ebenfalls eine Horizontalebene ist, so können wir sofort den Ausdruck für das nach M hin reflectirte Licht aufschreiben; es ist:

$$h_2^2 = h_1^2 \frac{2n_1 \left(\frac{1-m^2}{1+m^2} \right)^2}{1 + (2n_1 - 1) \left(\frac{1-m^2}{1+m^2} \right)^2}$$

oder falls wir für h_1^2 seinen Werth setzen:

$$h_2^2 = \frac{J_1^2}{2} \frac{2 \left(\frac{1-m_2}{1+m_2} \right)^2}{1 + \left(\frac{1-m_2}{1+m_2} \right)^2} \cdot \frac{2n_1 \left(\frac{1-m^2}{1+m^2} \right)^2}{1 + (2n_1 - 1) \left(\frac{1-m^2}{1+m^2} \right)^2} = F.$$

Dies ist das ganze, wie wir sehen, vollständig nach einer Horizontalebene polarisirte Licht, welches von J_1 her nach M gelangt.

Das von der Lichtquelle J kommende Licht fällt zuerst auf die drehbare Glassäule D mit n Platten; die Einfallsebene ist vertical, wir haben somit im durchgehenden Licht für die horizontal und vertical polarisirten Antheile:

$$h_1^2 = \frac{J^2}{2} \cdot \frac{1-\tau^2}{1+(2n-1)\tau^2}, \quad v_1^2 = \frac{1-\sigma^2}{1+(2n-1)\sigma^2}$$

Von diesen beiden Componenten gehen durch die zweite Glassäule S , wo die Einfallsebene horizontal und der Einfallswinkel gleich dem Polarisationswinkel ist, folgende Portionen durch:

$$h_u^2 = h_1^2 \frac{1 - \left(\frac{1-m^2}{1+m^2} \right)^2}{1 + (2n_1 - 1) \left(\frac{1-m^2}{1+m^2} \right)^2}, \quad v_u^2 = v_1^2 \cdot 1.$$

Setzen wir hier für h_1^2 und v_1^2 ihre Werthe, so erhalten wir für das von J nach M gelangende Licht:

$$h_u^2 = \frac{J^2}{2} \cdot \frac{1-\tau^2}{1+(2n-1)\tau^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-m^2}{1+m^2} \right)^2}{1 + (2n_1 - 1) \left(\frac{1-m^2}{1+m^2} \right)^2} = f$$

$$v''^2 = \frac{J^2}{2} \cdot \frac{1 - \sigma^2}{1 + (2n - 1)\sigma^2} = F.$$

Die Functionen f , F und F_1 sind folglich bestimmt und wir haben jetzt als Bedingungsleichung des Neutralisationspunktes:

$$v''^2 = h_2^2 + h''^2$$

und hieraus ergibt sich schliesslich für das gesuchte Verhältniss der Intensitäten J^2 und J_1^2 :

$$J_1^2 = J^2 (a s^2 - b t^2) = J^2, F(\varphi) \quad . \quad . \quad 1$$

wo wir der Kürze halber gesetzt haben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 + 2n_1 \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2} \right)^2 + (2n_1 - 1) \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2} \right)^4}{4n_1 \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2} \right)^4} &= a, \quad \frac{1 - \sigma^2}{1 + (2n - 1)\sigma^2} = s^2 \\ \frac{1 - \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2} \right)^2}{4n_1 \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2} \right)^4} &= b, \quad \frac{1 - \tau^2}{1 + (2n - 1)\tau^2} = t^2 \end{aligned} \right\} 2$$

und wo der in σ und τ steckende Winkel φ den abzulesenden Einfallswinkel des Lichts auf die drehbare Glas säule D für die Stellung bezeichnet, in welcher dem Auge in M die Farbenringe verschwinden. Variabel ist in dem Factor von J^2 blofs dieser Winkel φ , denn der Brechungswinkel φ_1 läfst sich ja durch φ und m ausdrücken, daher die Bezeichnung mit: $F(\varphi)$. — Der ganzen Deduktion gemäfs gilt aber obige Formel nur, falls blofs natürliches Licht von J und J_1 herkömmt. Indessen sind wir im Stande, das Verhältniss der Intensitäten auch in jedem andern Falle d. h. bei vollständig oder theilweise polarisirtem Licht aus dem Neutralisationswinkel abzuleiten.

b. Theorie des Photometers für polarisirtes Licht und Combinationen von natürlichem und polarisirtem Licht und Theorie des Polarimeters.

Es soll hier der allgemeine Fall behandelt werden, wo von beiden Lichtquellen theilweise polarisirtes Licht ausgeht. J^2 sey das natürliche Licht der einen Quelle und P^2 die im Azimut β zur Verticalebene polarisirte Intensität.

J_1^2 , P_1^2 und β_1 sollen die betreffenden Größen bei der andern Lichtquelle darstellen. Zu bestimmen sind also die Azimute β und β_1 und die Verhältnisse $\frac{J^2}{J_1^2}$, $\frac{P^2}{J^2}$, $\frac{P_1^2}{J^2}$, also 5 Größen, wir müssen somit auch 5 Gleichungen resp. 5 Beobachtungen haben. Angenommen es gelten hier dieselben Principien wie oben und man könne ebenso die Neutralisation beobachten, so würde die Gleichsetzung der Gesamt-Horizontal- und Vertical-Componente für den Neutralisationswinkel die Bedingungsgleichung geben:

$$(\alpha) \quad J_1^2 + 2P_1^2 \sin^2 \beta_1 = J^2 (a s^2 - b t^2) + 2P^2 (a s^2 \cos^2 \beta - b t^2 \sin^2 \beta).$$

Um die erforderliche Anzahl Gleichungen zu erhalten, ist es nöthig, das *Polarimeter* anzuwenden. Unser vorliegende Apparat kann leicht und schnell in dasselbe verwandelt werden. Nehmen wir nämlich die Glassäule S ganz weg, so gelangt nach M bloß Licht von J her. Dieses Licht, d. h. das natürliche J^2 und das im Azimut β zur Verticalebene polarisirte P^2 geht dabei durch die drehbare Glassäule D durch und wir können nach dem Früheren sofort die horizontal und vertical-polarisirten Componenten, welche nach M hin gelangen, angeben, sie sind:

$$H^2 = \left(\frac{J^2}{2} + P^2 \sin^2 \beta \right) t^2, \quad V^2 = \left(\frac{J^2}{2} + P^2 \cos^2 \beta \right) s^2.$$

Das Verhältniß dieser beiden Componenten wird sich auch wieder bei Drehung der Glassäule ändern und wir werden es daher meistentheils dahin bringen können, daß sie gleich werden. Man sollte nun glauben, daß in diesem Falle ganz wie früher eine Neutralisation stattfindet, die Farben in der Krystallplatte verschwinden und die Beobachtung des Neutralisationswinkels uns die Bedingungsgleichung gebe:

$$(\beta) \quad J^2 (s^2 - t^2) = 2P^2 (t^2 \sin^2 \beta - s^2 \cos^2 \beta).$$

Die Interferenz-Farben beim vorliegenden Apparat werden durch eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene Kalkspathplatte erzeugt, so daß man das bekannte Ringsystem mit weißem oder schwarzem Kreuz sieht. Man

richtete nun das Instrument gegen den Himmel, liefs künstlich erzeugtes theilweise polarisirtes Licht auf dasselbe einfallen, die Beobachtung ergab, dafs ein Verschwinden der Farbenringe nur dann eintrat, falls das einfallende Licht nach der Einfallsebene polarisirt war, nie dagegen falls seine Polarisationssebene mit der Einfallsebene auf die drehbare Glassäule *D* einen Winkel bildete. Es zeigte sich vielmehr in letzterem Falle bei Drehung der Säule *D* aus der verticalen Stellung gegen die horizontale hin ganz dieselbe Erscheinung, als ob man die ursprüngliche Polarisationssebene nach und nach in eine horizontale übergehen lasse. Um diefs Phänomen weiter zu verfolgen, wurden statt der Kalkspathplatte Gypsplättchen, dann auch gekreuzte, unter 45° gegen die Axe geschnittene, Bergkrystallplatten angewandt. Die Farben der erstern und das Fransensystem der letztern verschwanden bekanntlich, falls eine der Polarisationssebenen mit der Mittellinie des Gypses oder dem Hauptschnitt des Bergkrystalls zusammenfällt. War das Licht nach der Einfallsebene theilweise polarisirt, so verschwanden die Farben bei einem bestimmten Einfallswinkel und zwar ganz unabhängig von der Lage des Hauptschnitts. Farblos wurde aber das Gesichtsfeld jetzt auch, wenn das einfallende Licht in irgend einem Azimut polarisirt war, nur variierte in dem Falle der Neutralisationswinkel mit der Stellung des Hauptschnittes gegen die Einfallsebene. Im Uebrigen verhielt sich die Erscheinung so, als ob die durch die Glassäule durchgegangenen Componenten sich zu einem Strahl zusammensetzten, der in einen neuen Azimut polarisirt sey und als ob das Azimut dieser neuen Polarisationssebene mit wachsendem Einfallswinkel sich immer mehr 90° näherte. Angenommen diefs sey wirklich der Fall und der Hauptschnitt der Krystallplatte bilde 45° mit der Einfallsebene, so werden die Farben verschwinden, falls die beiden durch die Glassäule durchgehenden, nach der Einfallsebene und senkrecht dazu polarisirten Amplituden *V* und *H* einen im Azimut 45° polarisirten Strahl geben; diefs tritt ein, falls:

$$\frac{V}{H} = \tan 45^\circ = 1$$

oder auch:

$$V^2 = H^2.$$

Die Quadrate der Amplituden V und H verhalten sich aber innerhalb desselben Mediums wie die Intensitäten; es würde uns folglich diese Betrachtung ganz dieselbe Bedingungsgleichung β geben, wie oben die unmittelbare Gleichsetzung der componirenden Intensitäten. Während wir aber hier wirklich eine Neutralisation beobachten können, ging dieß dort mit der Kalkspathplatte nicht an. Es muß folglich unser erstes Princip, daß zwei gleiche Quantitäten senkrecht zu einander polarisirten Lichts sich schlechtweg verhalten wie natürliches, nicht allgemein gültig seyn. Um das vollständige Gesetz zu erhalten, das uns die vorstehenden Erscheinungen ganz erklärt, müssen wir zurückgehen zur Entstehung der Farben in Krystallplatten durch Interferenz. Wir betrachten zu dem Ende hin den Durchgang des einfallenden Lichts durch die Glassäule D , den Krystall- und den analysirenden Polarisator. Der polarisirte Antheil des einfallenden Lichts sey im Azimut β polarisirt und seine Amplitude P ; es habe ferner derselbe, um den ganz allgemeinen Fall zu betrachten gegenüber dem natürlichen Antheil eine Verzögerung erlitten, deren Phase Δ sey. Die Amplitude des natürlichen Lichts sey J , also diejenige des im Azimut α polarisirten Theils desselben $J \frac{d\alpha}{2\pi}$; wir verfolgen bloß den Durchgang dieses Theils und nehmen dann schließlic die Summe nach α von 0 bis 2π . Zerlegen wir nun dieß in variabeln Azimut α und das im festen Azimut β polarisirte Licht nach der Einfallsebene und senkrecht dazu, so können wir sofort die durch die Glassäule durchgehenden Amplituden hinschreiben; s und t sollen die hiebei auftretenden Factoren darstellen, entsprechend denen bei den Intensitäten oben. Diese durchgegangenen Amplituden fallen weiter auf die Krystallplatte, deren Hauptschnitt mit der Einfallsebene den Winkel i bilde; man zerlegt sie nach demselben und

senkrecht dazu und erhält so je den gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahl, welche den Krystall mit ungleicher Geschwindigkeit durchlaufen. Von den vier austretenden Amplituden nehmen wir endlich noch die Componenten nach der analysirenden Polarisationssebene, die mit der Einfallsebene zusammenfallen soll; alsdann haben wir 4 Strahlen mit gemeinschaftlicher Polarisationssebene, die folglich interferiren können. Sie sind:

$$\begin{aligned} & \sin i J \frac{d\alpha}{2\pi} (s \cos \alpha \cos i + t \sin \alpha \sin i) \sin(\tau - \mathcal{A}_0) \\ & \sin i P (s \cos \beta \cos i + t \sin \beta \sin i) \sin(\tau - \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}) \\ & \cos i J \frac{d\alpha}{2\pi} (s \cos \alpha \sin i - t \sin \alpha \sin i) \sin(\tau - \mathcal{A}_0) \\ & \cos i P (s \cos \beta \sin i - t \sin \beta \cos i) \sin(\tau - \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}) \end{aligned}$$

wo

$$\tau = \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) 2\pi$$

falls x den Weg von der Lichtquelle bis zum Auge darstellt und wo $\mathcal{A}_0$ und $\mathcal{A}$ die Phasen der Verzögerung bezeichnen, welche die gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahlen beim Durchgang durch den Krystall erfahren. Von diesen 4 Strahlen setzt man nun je die beiden ersten und beiden letztern nach der gewöhnlichen Regel zu zwei resultirenden von der Form:

$$A_1 \sin(\tau - \mathcal{A}_0 - D_1) \text{ und } A_2 \sin(\tau - \mathcal{A}_0 - D_2)$$

zusammen; und diese zwei Strahlen geben dann als resultirende Intensität:

$$R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[\mathcal{A}_0 + D_1 - (\mathcal{A}_0 + D_2)].$$

Führen wir hiernach die Rechnung durch und nehmen schliesslich nach α die Summe von 0 bis 2π , so erhalten wir:

$$\begin{aligned} R_2 = & \frac{J^2}{2} [s^2 \sin^2 2i + t^2 \cos^2 2i] + P^2 [s \sin 2i \cos \beta \\ & - t \cos 2i \sin \beta]^2 - \frac{\sin 2i}{2} \left\{ \sin 2i [J^2 (s^2 - t^2)] \right. \\ & + 2P^2 (s^2 \cos^2 \beta - t^2 \sin^2 \beta) \\ & \left. - P^2 s t \cos 2i \sin 2\beta \right\} \sin^2 \frac{\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}}{2} \end{aligned}$$

Eigentlich würden alle Glieder noch einen constanten Factor erhalten, herrührend von der Veränderung der Amplituden beim Ein- und Austritt im Krystall und Analyser; da es uns aber nicht auf die absolute Intensität des durchgegangenen Lichts ankömmt; sondern blofs auf die Bedingung des Verschwindens der Farbenringe, so haben wir denselben bei der Rechnung weggelassen. Vorstehender Ausdruck zeigt zunächst, dafs ein Unterschied im Ursprung des polarisirten und natürlichen Lichts, wie wir ihn angenommen ohne Einfluss ist auf die resultirende Intensität, indem die Verzögerung Δ ganz herausgefallen ist; ferner ergibt sich, dafs die Farben nur von dem letzten mit dem $\sin$. der Verzögerungsphase: $\Delta_0 - \Delta$, behafteten Gliede abhängen können, denn nur dieses ist periodisch. Damit also das Gesichtsfeld farblos werde, mufs der eine oder andere der beiden Factoren von $\sin^2 \cdot \frac{\Delta_0 - \Delta}{2}$ verschwinden.

Der erste Factor $\sin 2i$ gleich Null gesetzt giebt uns die schon oben erwähnte Bedingung, dafs der Hauptschnitt mit der Einfallsebene resp. mit der analysirenden Polarisationsebene zusammenfalle. Setzen wir dagegen den zweiten Factor gleich Null, so erhalten wir das gesuchte Gesetz. Damit beim Polarimeter allgemein eine Neutralisation eintrete, mufs folgende Relation zwischen den Amplituden bestehen:

$$\sin 2i [J^2(s^2 - t^2) + 2P^2(s^2 \cos^2 \beta - t^2 \sin^2 \beta)] \\ = P^2 \cdot s \cdot t \cdot \cos 2i \cdot \sin^2 \beta \quad . \quad . \quad A$$

Diese Bedingungsgleichung enthält die Erklärung aller oben angeführten Erscheinungen. Wir sehen, dafs das Verhältnifs der Quadrate der Amplituden resp. also der Intensitäten, welches eine Neutralisation bedingt, allgemein abhängig ist vom Winkel i , welchen der Hauptschnitt des Krystalls mit der Einfallsebene bildet. Bei einer senkrecht zur optischen Axe geschliffenen Kalkspathplatte, wo dieses i für jede betrachtete Stelle des Farbenbildes ein anderes ist, wird daher auch kein vollständiges Verschwinden der Farben stattfinden können. Haben wir aber gekreuzte

Bergkrystallplatten oder Gypsblättchen, wo i für jeden Punkt denselben Werth hat, so wird es einen Einfallswinkel φ , d. h. ein dadurch bestimmtes Verhältniß der Amplituden s und t geben, wo obige Gleichung erfüllt wird. Der einfachste Fall ist derjenige, wo $i = 45^\circ$ ist, da hat man nämlich:

$$J_2(s^2 - t^2) = 2P^2(t^2 \sin^2 \beta - s^2 \cos^2 \beta) \quad . \quad . \quad 3$$

t^2 und s^2 sind die Quadrate der beim Durchgang durch die Glassäule auftretenden Amplituden-Factoren, da aber hier bloß ihr Verhältniß vorkommt, so können wir sie als gleichbedeutend ansehen mit den früher angegebenen Intensitäten-Factoren s^2 und t^2 ; vorstehende Bedingungsgleichung ist somit identisch mit β oben. Die Gleichung β (oder 3) hat also nicht die allgemeine Gültigkeit, wie wir dort annahmen, sondern ist bloß in dem speciellen Falle richtig, wo die Krystallplatte nicht senkrecht zur optischen Axe geschnitten ist und wo dann ihr Hauptschnitt unter 45° gegen die Einfallsebene und analysirende Polarisationsebene geneigt ist. Dafs wir endlich auch mit der Kalkspathplatte eine Neutralisation zu beobachten im Stande sind, falls die ursprüngliche Polarisationsebene mit der Einfallsebene zusammenfällt, findet ebenfalls seine Erklärung durch obige Formel. Setzt man nämlich in A, $\beta = 0$, so geht sie über in:

$$J^2(t^2 - s^2) = 2P^2s^2.$$

Die Farben verschwinden also in dem Falle unabhängig vom Winkel i des Hauptschnitts und wir haben zur Bestimmung des Verhältnisses des natürlichen und polarisirten Lichts die einfache Relation:

$$P^2 = \frac{J^2}{2} \left[\frac{t^2}{s} - 1 \right] = J^2 \cdot f(\varphi) \quad . \quad . \quad 4.$$

(Für $\beta = 90^\circ$ kann, wie leicht ersichtlich, keine Neutralisation eintreten.)

Aus dem Vorigen ergeben sich nun folgende Regeln für die Messungen mittelst des Polarimeters: Ist dasselbe um die Sehaxe JM drehbar, so bestimme man mittelst eines

Polariskops die Polarisationssebene des einfallenden Lichts und drehe dann den Apparat bis die Einfallsebene auf D mit derselben zusammenfällt. Aus dem in dieser Stellung beobachteten Neutralisationswinkel ist das Verhältniß der Intensitäten nach No. 4 leicht zu berechnen. Die Neutralisation kann in diesem Falle auch mittelst des Kalkspaths beobachtet werden. — Falls aber eine Drehung des Apparats um JM nicht möglich ist, so hat man Krystallplatten mit constantem i anzuwenden. Man stellt dieselbe zweckmäßig so, daß ihr Hauptschnitt unter 45° gegen die Einfallsebene geneigt ist und beobachtet dann bei beliebiger Stellung des Apparats den Neutralisationswinkel und zugleich mittelst eines Polariskops das Azimut β . (Auf letzteres werden wir weiter unten zu sprechen kommen). Das Verhältniß der Intensitäten ist jetzt aus Gleichung 3 abzuleiten.

Nachdem zur Lösung unsers Problems von S. 244 in der angegebenen Weise die Azimute β und β_1 , sowie die Verhältnisse $\frac{P^2}{J^2}$ und $\frac{P_1^2}{J_1^2}$ ermittelt sind, gehen wir zur letzten Beobachtung mit dem Photometer über, um auch das Verhältniß $\frac{J^2}{J_1^2}$ zu bestimmen. Aus der vorigen Betrachtung folgt, daß die oben für eine solche Beobachtung aufgestellte Gleichung α nicht gültig seyn wird und daß wir auch hier zur Entstehung der Interferenz-Farben zurückzugehen haben, falls wir die richtige Formel erhalten wollen. Berechnen wir ganz analog, wie vorhin, den Durchgang der componirenden Amplituden beider Lichtquellen durch den Apparat, Krystallplatte und Analyser inbegriffen und bilden schließlic durch Zusammensetzung der Strahlen wieder den Ausdruck für die resultirende Intensität, so erhalten wir folgende Bedingungsgleichung für das Verschwinden des periodischen, die Farben erzeugenden Gliedes:

$$\begin{aligned} & \sin 2i [J^2 (as^2 - bt^2) + 2P^2 (as^2 \cos^2 \beta - bt^2 \sin^2 \beta) \\ & \quad - J_1^2 - 2P_1^2 \sin^2 \beta_1 + 4akk_1 t P P_1 \sin \beta \sin \beta_1] \\ & = a \cos 2i [P P_1 4k_1 s \cos \beta \sin \beta_1 + 2P^2 k s t \sin 2\beta] \dots B \end{aligned}$$

k stellt den Factor dar, den die verticalen von J herkommenden Amplituden beim Durchgang durch die Glassäule S erhalten, und k_1 den durch die Reflexion S_1 und S für die horizontalen Amplituden von J_1 her bedingten Coëfficienten. Statt $\frac{1}{k_1^2}$ und $\left(\frac{k}{k_1}\right)^2$ haben wir bereits die entsprechenden Intensitätsfactoren von früher a und b gesetzt. Die übrigen Gröſsen haben dieselbe Bedeutung wie oben. Aus B ist bereits ersichtlich, daſs auch hier das Verschwinden der Farben allgemein vom Winkel i des Hauptschnitts mit der Einfallsebene abhängt, im Uebrigen aber ist die Bedingungsgleichung in obiger Gestalt zur Berechnung des Verhältnisses der Intensitäten J^2 und J_1^2 aus dem beobachteten Neutralisationswinkel nicht brauchbar, da die Amplituden P und P_1 uns nicht bekannt sind. Sie wird es nur in folgenden vier speciellen Fällen.

1. Wenn die Polarisationsebenen sowohl des von J als von J_1 stammenden Lichts der Einfallsebene auf die drehbare Glassäule D parallel sind, also $\beta = \beta_1$, so geht B über in:

$$J^2(as^2 - bt^2) + 2P^2as^2 = J_1^2 \quad . \quad . \quad 5$$

2. Ist das von J_1 kommende Licht wie vorhin nach der Einfallsebene, dagegen dasjenige von J senkrecht dazu polarisirt, so hat man:

$$J^2(as^2 - bt^2) - 2P^2bt^2 = J_1^2 \quad . \quad . \quad 6$$

Wir sehen, in diesen beiden Fällen ist das Verschwinden der Farben ganz unabhängig von i , die Neutralisation wird hier folglich auch mit dem Kalkspath zu beobachten seyn.

3. Werden die Farben durch Bergkrystallplatten oder Gypsblättchen erzeugt, so stelle man deren Hauptschnitt unter 45° gegen die Einfallsebene und bringe dann den Apparat in eine solche Lage, daſs die Einfallsebene auf D zusammenfällt, entweder mit der Polarisationsebene des von J ausgehenden Lichts, in welchem Falle B übergeht in:

$$J^2(as^2 - bt^2) + 2P^2as^2 = J_1^2 + 2P_1^2\sin^2\beta_1 \quad . \quad 7.$$

4. Oder, falls es thunlicher ist, mit der Polarisations-ebene des Lichts von J_1 her, welche Anordnung die Bedingungsgleichung giebt:

$$J^2(as^2 - bt^2) + 2P^2(as^2 \sin^2 \beta - bt^2 \cos^2 \beta) = J_1^2 \quad . \quad . \quad 8.$$

Ist also theilweise polarisirtes Licht zu vergleichen, so müssen wir die Beobachtung stets so einzurichten suchen, dafs einer dieser vier Fälle erreicht wird.

Die allgemeine Bedingungsgleichung B kann uns endlich auch die Gleichungen zur Bestimmung des Verhältnisses der Intensitäten in allen den Fällen liefern, wo wir es mit Combinationen von natürlichem, theilweise und vollständig polarisirtem Lichte zu thun haben.

c. Beschreibung des ausgeführten Apparates und Bestimmung des Brechungsverhältnisses.

Zunächst habe ich hier wohl auf diejenigen Punkte aufmerksam zu machen, welche bei der Construction besonders zu berücksichtigen sind. Die ganze Ableitung der unter a und b entwickelten Formeln setzt voraus, dafs bei der Refraction je die Summe des reflectirten und durchgehenden Lichts gleich dem einfallenden sey, d. h. dafs keine Absorption in den Glasplatten stattfindet; diefs wird um so eher der Fall seyn, je durchsichtiger und dünner die letztern sind. Es müssen ferner alle Platten von möglichst planen und parallelen Flächen begränzt werden, der Spiegel S_1 und die Glassäule S einander parallel und unterm Polarisationswinkel gegen die Richtung JM aufgestellt seyn, sowie die Säule D sich um eine Axe drehen, welche senkrecht zur Richtung JM ist und in der Ebene durch diese Richtung und das Loth der Platten S liegt. Dann wird auch gefordert, dafs von den beiden Lichtquellen in den parallelen Richtungen JM und $J_1 M_1$ gleich grofse Bündel unter sich paralleler Strahlen auf die Spiegel S_1 und D einfallen und, falls wir eine richtige Bestimmung des Verhältnisses der Intensitäten erhalten wollen, darf das Licht der beiden Quellen keine relative Veränderung erfahren, die wir nicht in Rechnung bringen können.

Endlich muß bei der Construction auch darauf gesehen werden, daß im Apparat die Mittel liegen, die nicht zu vermeidenden Fehler ihrer Größe nach zu bestimmen und darnach die Formeln zu corrigiren.

Diese Hauptbedingungen und einige untergeordnete, die sich aus dem Verlauf ergeben werden, suchte man durch folgende Einrichtung des Instruments zu erfüllen.

Eine mit drei Stellschrauben versehene Messingplatte von rechteckiger Gestalt ($7\frac{1}{2}$ Pariser Zoll lang, $4\frac{1}{4}$ Zoll breit und $\frac{1}{4}$ Zoll dick), oben und an den Rändern eben abgeschliffen, bildet die Grundlage der übrigen Theile (Fig. 4, *ABCD*). Die Stellung der letztern wurde durch zwei gerade Linien fixirt, welche genau parallel den Kanten *AD* und *BC* in passender Entfernung von einander auf der Platte schraffirt wurden; sie stellen unsere frühere Richtungen *JM* und *J₁M₁* dar. Die Glassäule *S* besteht aus 10 Glasplatten; sie sind in einem Rahmen von Messing so gefaßt, daß die Oeffnung des Glases $1\frac{1}{6}$ Zoll Breite und $2\frac{1}{2}$ Zoll Länge hat. Dieser Rahmen besitzt in der Mitte seiner längeren Seite einen etwas konisch abgedrehten Zapfen, der in eine entsprechende Oeffnung der Platte paßt und von unten mittelst einer Mutter festgeklemmt werden kann. Die Axe des Zapfens und der Oeffnung steht senkrecht gegen die Ebene der Platte in einem Punkte σ der Linie *JM* und die spiegelnden Glasflächen sind derselben parallel; bei einer Drehung der Säule um den Zapfen bleiben also die brechenden Flächen immer senkrecht zur Ebene der Platte. Der Rahmen ist endlich noch so beschaffen, daß die Mitte seiner Oeffnung etwa $\frac{3}{4}$ Zoll über der Ebene der Platte sich befindet. In derselben Höhe über letzterer ist die Drehungsaxe $\delta\delta$ der drehbaren Glassäule *D* angebracht. Die Spiegelplatten befinden sich hier ebenfalls in einem Messingrahmen, aber so, daß ihre Anzahl beliebig vermindert oder vermehrt werden kann (etwa von 2 bis 10 oder 12). Zu dem Ende hin ist der Rahmen an einer seiner schmalen Seiten aufgeschnitten und besitzt inwendig Federn, welche die aus dem Schlitz et-

was hervorragenden Platten festhalten. Die Oeffnung $efgh$ des Rahmens ist $1\frac{1}{5}$ Zoll breit und $3\frac{1}{4}$ Zoll lang; in der Mitte der längeren Seiten trägt derselbe die beiden Zapfen. Diese müssen möglichst concentrisch seyn (wurden daher erst abgedreht, nachdem sie bereits am Rahmen festgelöthet waren) und ihre gemeinschaftliche Axe, die Drehungsaxe, muß den spiegelnden Flächen der Glasplatten parallel seyn. Damit dieß stets zu erreichen sey, besitzt der Rahmen da, wo die Platten auf ihm aufliegen, vier kleine Schrauben, mittelst deren man die Lage der brechenden Ebenen zur Drehungsaxe corrigiren kann. Die Zapfenlager z und z_1 sind ferner genau gleich hoch über der Ebene der Platte und von dem Rande AB gleich entfernt, mithin die Drehungsaxe auch parallel der Ebene der Platte und senkrecht zur Richtung JM . An dem einen Zapfen sitzt die getheilte Kreisscheibe KK , die sich mit demselben dreht, während die Indices i am Zapfenlager z festgeschraubt sind. Die größeren Drehungen geschehen mittelst des Knopfes L , die feinere Einstellung erfolgt durch einen aufzuschiebenden Hebelarm HH . Um die Glassäule ganz umdrehen zu können, hat die Platte unter derselben einen Ausschnitt $abcd$. Auf der andern Richtung J_1M_1 befindet sich die einzelne Glasplatte S_1 , sie sitzt ebenfalls in einem Messingrahmen mit Zapfen, hat dieselbe Oeffnung wie S und ist um einen Punkt σ_1 der Linie J_1M_1 auch so drehbar, daß ihre reflectirende Fläche dabei stets senkrecht zur Ebene der Fußplatte steht. Die Mitte der Oeffnung liegt ebenfalls in gleicher Höhe mit derjenigen von S . Der Zapfen dieses Rahmens aber ist nicht unmittelbar in die Fußplatte $ABCD$ eingelassen, sondern in ein besonderes Stück, welches in einem Schlitz $\alpha\beta\gamma\delta$ derselben mittelst einer Schraube r in der Richtung J_1M_1 verschoben werden kann. Der Zapfen ist wieder von unten durch eine Mutter festzuklemmen. — Durch diese ganze Anordnung ist nun Folgendes erreicht. Die reflectirenden Flächen der Platten S und S_1 sind bei jeder Stellung gegen die Richtung JM möglichst senkrecht auf der Ebene der Fußplatte; ferner stehen die brechen-

den Flächen der Glassäule D bei jeder Drehung senkrecht auf einer Ebene durch das Loth der Platte und die Richtung JM . Diefs hat denn auch zur Folge, dafs für Strahlen, welche parallel der Fufsplatte in den Richtungen J_1M_1 und JM den Apparat durchlaufen, die Einfallsebenen bei den verschiedenen Spiegeln stets entweder parallel oder senkrecht zur Ebene der Fufsplatte sind. Für Strahlen von dieser Beschaffenheit haben wir oben unsere Rechnungen angestellt. — Damit aber wirklich blofs Licht in der Krystallplatte K zur Wirkung komme, welches sich in den Richtungen JM und J_1M_1 bewegt hat, sind an den beiden Enden kleine Messingplatten O und O_1 , N und N_1 aufgeschraubt und in diese Röhren so eingelassen, dafs erstlich die Axen je zweier gegenüber stehender zusammenfallen, und dann diese gemeinschaftlichen Axen parallel der Fläche der Fufsplatte in Ebenen durch das Loth der letztern und die Richtung JM resp. J_1M_1 liegen. Die Höhe endlich dieser Axen über der Platte entspricht der Mitte der Spiegelöffnungen. Die vordern Röhren, durch welche das Licht in den Apparat einfällt, haben einen Durchmesser von 1 Zoll und sind ungefähr 3 Zoll lang; die hintern bei N und N_1 haben blofs einen Durchmesser von $\frac{2}{3}$ Zoll und zwar aus folgendem Grunde. Unsere Formeln für das reflectirte und durchgehende Licht auf S. 239 setzen eigentlich eine unendliche Anzahl von Reflexionen im Innern der Glasplatten voraus, indem sie aus der Summation unbegrenzter, geometrischer Reihen fortschreitend nach Potenzen von r^2 entstanden sind. Für die begränzten Platten im Apparate ist aber die Zahl der Reflexion eine beschränkte; indessen zeigt eine nähere Betrachtung, dafs jene Reihen der Kleinheit von r^2 halber sehr stark convergiren und daher schon 5 bis 6 Reflexionen im Innern genügen; damit diefs auch noch bei den Randstrahlen, welche im Krystall interferiren, der Fall sey, verfügte man in obiger Weise über das Verhältnifs der beiderlei Röhren-Oeffnungen. Wie die Figur zeigt, ist die eine Röhre etwas mehr nach vorn gerückt als die andere; diefs hat den Zweck, dafs das Licht der

beiden zu vergleichenden Lichtquellen innerhalb des Apparats gleiche Wege durchlaufe (es ist nämlich; $R_1 S_1 + S_1 S = RS$), folglich das reflectirte Bild der Oeffnung R_1 gleich groß sey, wie das direct gesehene der Oeffnung O . Damit beide Bilder sich vollständig decken, mit anderen Worten die Strahlenbündel beider Oeffnungen sich ihrer ganzen Ausdehnung nach compensiren können, müssen die Centren der Bilder zusammenfallen, der Spiegel S_1 also, nachdem er (sowie auch S) auf den Polarisationswinkel eingestellt worden ist, eine ganz bestimmte Lage auf der Linie $J_1 M_1$ haben. Zur genauen Ausführung dieser Einstellung wurde dieser Spiegel in der oben angedeuteten Weise verschiebbar gemacht. (Die Oeffnung bei N_1 ist nicht wesentlich, sondern dient bloß dazu, den Parallelismus der Axen der beiderlei Röhren zu prüfen.) Was die Einstellung auf den Polarisationswinkel anbelangt, so geschah dieselbe folgendermaßen: Alle Platten des Apparats sind aus derselben Glastafel geschnitten. Nachdem das Brechungsverhältniß dieses Glases bestimmt und daraus der Polarisationswinkel abgeleitet war, wurde ein Winkel angefertigt (Fig. 3, Taf. II), an dessen einer Seite senkrecht zu seiner Fläche eine Messingplatte befestigt war, während in die andere zwei Stahlstifte eingeschraubt waren. Durch Drehen der Stifte konnte man den Winkel, welchen eine Gerade durch ihre Spitzen mit der andern Seite des Winkels machte, ziemlich genau gleich dem berechneten Polarisations-Winkel machen. Die erwähnte seitliche Messingplatte, welche noch einen der Ebene des Winkels parallelen Falz besaß, wurde nun je an die Kanten BC und AD angelehnt und der Winkel längs derselben verschoben, bis die Spitzen der Stifte die beweglichen Spiegel S und S_1 berührten und durch Andrücken in die gehörige Richtung brachten. So wie diels geschehen, klemmte man die Spiegel von unten fest. — Um den Apparat in das Polarimeter zu verwandeln, muß die Glassäule S entweder senkrecht zur Richtung JM gedreht oder besser ganz herausgenommen werden; damit man nun nicht jedesmal den Winkel

anzusetzen brauche, befindet sich in F eine verschiebbare Marke, die, falls der Spiegel eingestellt ist, an denselben angedrückt und dann von unten festgeschraubt wird. Ein Punkt wurde bei der Construction des vorliegenden Apparats unberücksichtigt gelassen, der doch nicht ganz ohne Belang ist. Durch die beinahe 5 Linien dicke Glassäule S werden die von J kommenden Strahlen etwas nach S_1 zu verschoben, so daß das Centrum des von der Oeffnung R gesehenen Bildes nicht mehr mit dem Mittelpunkt der Oeffnung bei N , durch welche man beobachtet, zusammenfällt; es wäre deshalb wünschbar, daß das die Beobachtungsröhre tragende Messingstück N zwischen zwei Schienen senkrecht zur Richtung JM nach N_1 hin verschiebbar gemacht würde. Wirklich verschiebbar muß es seyn, weil bei Umwandlung des Apparats in das Polarimeter in Folge der Wegnahme der Säule S keine solche Verrückung der Strahlen nach der Seite hin stattfindet. Das aus demselben Grunde erfolgende Heben oder Senken des Bildes der Oeffnung R durch die Glassäule D ist viel weniger störend. — Um alles fremde Licht abzuhalten, wird von oben ein Kasten von Holz auf die Platte gesetzt, der an den Stellen O , O_1 , N , N_1 und da wo der getheilte Kreis sitzt, passende Ausschnitte hat. Auch an den Oeffnungen $abcd$ und $\alpha\beta\gamma\delta$ ist das Eindringen des Lichts von unten durch Blechkapseln verwehrt. Die unregelmäßige, störende Reflexion des Lichts im Innern des Kastens durch seine Wände, durch die Fußplatte u. s. f. wurde dadurch möglichst vermieden, daß man alle nach innen kommende Theile des Apparats matt schwarz machte. Fig. 7 zeigt eine perspectivische Seitenansicht des Apparats ohne aufgesetzten Holzkasten.

Die Farbenringe erzeugt bei vorliegendem Apparate, wie schon oben angegeben wurde, eine senkrecht zur optischen Axe geschliffene Kalkspathplatte. Es befindet sich dieselbe im Brennpunkt einer Linse (Fig. 6), so daß möglichst parallel der Axe JM sich bewegende Strahlen sie treffen. Das Ringsystem wird mittelst eines verkleinernden Fernrohrs beobachtet, vor dessen Ocular ein Turmalin oder

eine kleine Glassäule als Analyser befestigt ist. — Wir haben früher gesehen, daß in vielen Fällen die Beobachtung des Neutralisationswinkels mittelst eines Kalkspaths nicht möglich ist, sondern daß man dazu Krystallplatten mit constantem Hauptschnitt bedarf. Die Anwendung letzterer in allen Fällen möchte aber auch noch den Vortheil einer viel genaueren Bestimmung des Neutralisationswinkels gewähren. Gekreuzte Bergkrystallplatten unter 45° gegen die Axe geschnitten oder zu einer Platte vereinigte Quarzprismen von gleichem brechenden Winkel, in deren einem die optische Axe parallel, im andern senkrecht zur brechenden Kante ist, zeigen ein geradliniges Fransensystem, das bei passender Wahl der Dicke der Platten resp. des brechenden Winkels der Prismen sehr fein ist. Stellt man das Ganze so, daß dieses Fransensystem senkrecht zur Ebene der Fußplatte steht, und beobachtet dann dasselbe durch ein schwach vergrößerndes Fernrohr mit Fadenkreuz, so wird beim Neutralisationswinkel bloß ein Querstreifen im mittlern Theil des Fransensystems ausgelöscht, zu beiden Seiten sind die Farben complementär, und es läßt sich dann sehr genau dieser ausgelöschte Streifen je gerade auf die Mitte des Fadenkreuzes einstellen. — Die schon wiederholt gemachte Bemerkung, daß diese Farbenstreifen auch verschwinden, falls eine der beiden Polarisations Ebenen, die ursprüngliche oder analysirende mit dem Hauptschnitt zusammenfällt, erlaubt diese Combination zugleich als ein sehr scharfes Mittel zur Auffindung der Polarisations Ebene des einfallenden Lichtes zu gebrauchen und macht somit ein besonderes Polariskop entbehrlich.

Das Brechungsverhältniß der Platten im Apparat wurde nach der schon 1770 vom Duc de Chaulnes angegebenen Methode ermittelt. Ein Mikroskop wird auf einen bestimmten Gegenstand eingestellt, dann die Glasplatte, deren Brechungsverhältniß zu bestimmen ist, so zwischen Gegenstand und Objectiv gebracht, daß ihre Fläche senkrecht steht gegen die optische Axe des Mikroskops und nun gemessen, um wie viel man letzteres verschieben muß, damit man

den Gegenstand wieder deutlich sehe. Heissen wir diese Verschiebung v , und d die Dicke der Platte, so hat man für das Brechungsverhältniß m :

$$m = \frac{d}{d-v}.$$

Die Werthe von d und v sind in unserm Falle so klein, daß erst nach mehreren mißlungenen Versuchen gelang, eine Anordnung der Beobachtungen zu treffen, die brauchbare Resultate lieferte. Ein stark vergrößerndes Mikroskop ward an einem festen Ständer so angeschraubt, daß seine optische Axe vertical stand. Unterhalb des Objectivs befand sich ein Ring, dessen oberer Rand eben abgeschliffen und horizontal gestellt war; er wurde durch einen mittelst Mikrometerschraube an einer verticalen Stange verschiebbaren Arm gehalten und über seine Oeffnung war ein feiner Faden quer ausgespannt, den von unten ein Spiegel beleuchtete. Den Ring stellte man hierauf so, daß im Mikroskop ein scharfes Bild des Fadens zu sehen war (besser als ein Faden wäre wohl ein wirklich mikroskopisches Object), legte dann die Glasplatte auf den Ring und verschob letztern mittelst der Schraube, bis das Bild des Fadens sich wieder in derselben Deutlichkeit im Mikroskop zeigte. Um diese Verschiebung genau zu messen, war seitlich ein zweites weniger stark vergrößerndes Mikroskop mit Mikrometer aufgestellt, so daß noch Tausendstel einer Linie mit Leichtigkeit zu bestimmen waren. Nachdem die optische Axe dieses Mikroskops horizontal gestellt war, wurde dasselbe auf eine Marke am Arm des Ringes gerichtet und der bewegliche Faden des Mikrometers vor und nach der Verschiebung auf diese Marke eingestellt. Man erhielt so die Gröfse der Verschiebung in Revolutionen der Schraube ausgedrückt. — Zur Messung der Dicken der Glasplatten bediente man sich desselben Apparats: es wurde bloß statt des erstern Mikroskops oberhalb des Ringes ein verticaler Stift unbeweglich aufgestellt, dessen feine Spitze nach unten gerichtet war, und ferner auf dem Ringe eine Spiegelplatte befestigt. Behufs der Messung näherte man diese Platte

mittelst der Schraube am Arm des Ringes der Spitze darüber, bis letztere und ihr Spiegelbild sich beinahe berührten und stellte dann im seitlichen Mikroskop den beweglichen Faden gerade auf die Mitte zwischen beiden ein; hierauf senkte man die Spiegelplatte, legte die zu untersuchende Glasplatte darauf, bewegte den Arm wieder aufwärts bis der Stift und sein Bild in der neuen Platte beinahe zur Berührung kamen und brachte den Faden des Mikrometers auf die jetzige Gränze: die Anzahl der hiezu nöthigen Umdrehungen der Schraube gab unmittelbar die Dicke der zwischen gelegten Platte in derselben Einheit, wie oben die Verschiebungen; man konnte also unmittelbar mit diesen Zahlen das Brechungsverhältniß berechnen. Um indessen auch eine Vorstellung von der absoluten Gröfse der Dicken und Verschiebungen zu erhalten wurde noch eine dritte Beobachtungsreihe gemacht, nämlich an verschiedenen Stellen eines vertical stehenden Normal-Maafstabes die Gröfse einer halben Linie durch Revolutionen der Mikrometerschraube ausgemessen. Die obigen Bestimmungen geschahen an zwanzig aus einer Glastafel für den Apparat zugeschnittenen Platten und ergaben einzeln folgende Werthe für das Brechungsverhältniß m :

1,5206	1,5186	1,5225	1,5202
1,5226	1,5187	1,5186	1,5175
1,5225	1,5248	1,5183	1,5185
1,5190	1,5219	1,5157	1,5215
1,5216	1,5221	1,5185	1,5245.

Das Mittel aus allen Werthen ist: $m = 1,520425$, wofür wir bei der Rechnung annehmen:

$$m = 1,520426$$

da diefs gerade die tang von $56^{\circ},40'$ darstellt. Das Brechungsverhältniß ist richtig bis auf die zweite Dezimale, denn die größten Abweichungen der einzelnen Werthe von diesem Mittel sind:

$$+ 0,004725 \text{ und } - 0,004375.$$

Die Umsetzung der Revolutionen der Schraube in Pa-

riser Linien ergab als durchschnittlichen Werth der Dicken der Platten und der Verschiebungen:

$$d = 0{,}''494 \quad c = 0{,}''169.$$

Der Controle halber wurde auch an zwei Platten der drehbaren Glassäule der Polarisationswinkel bestimmt. Nachdem die betreffende Platte gehörig gereinigt und dann auf der einen Seite geschwärzt worden war, brachte man sie allein in den Rahmen der drehbaren Glassäule. In die vor letzterer befindliche Oeffnung RO schob man sodann ein längeres, am Anfang und Ende mit Diaphragmen versehenes Messingrohr, so dafs blofs ein kleines Strahlenbündel längs der Axe dieser Röhre von einer sonst ganz verdeckten Lichtquelle auf die Platte fallen konnte; das reflectirte Licht wurde mittelst eines achromatisirten Kalkspathprismas untersucht. Um auch hier den doppelten Polarisationswinkel messen zu können, ward der Apparat so gestellt, dafs die Drehungsaxe d vertical stand, somit, nachdem die Blechkapsel unter der drehbaren Glassäule weggenommen war, von beiden Seiten beobachtet werden konnte. Als Mittel aus mehreren Einstellungen ergab sich für die eine Platte:

$$p = 56^{\circ} 38' 10''$$

und für die andere:

$$p = 56^{\circ} 42' 45''$$

Das Mittel aus beiden stimmt sehr gut mit dem oben aus dem Brechungsverhältnifs abgeleiteten *Polarisationswinkel*:

$$p = 56^{\circ} 40'.$$

Das Brechungsverhältnifs der Glasplatten läfst sich übrigens auch direct mittelst unseres Apparats bestimmen, indem derselbe sehr leicht in das neulich von Bernard construirte Refractometer (Pogg. Ann. Bd. 97) umzuwandeln ist; man braucht nämlich blofs die Glassäule S herauszunehmen, vor N ein Fernrohr mit Fadenkreuz und vor K eine feine Scale auf Glas aufzustellen und die zu untersuchenden Platten in den Rahmen der drehbaren Glassäule D zu bringen. Im Uebrigen verweise ich auf die citirte Abhandlung.

d. Ueber die Fehler des Apparats und seine Leistungsfähigkeit.

Für natürliches Licht hat man zur Bestimmung des Verhältnisses der Intensitäten die Formel:

$$J_1^2 = J^2 \cdot F(\varphi).$$

$F(\varphi)$ wurde oben unter der Voraussetzung berechnet, daß der Apparat vollkommen seiner Idee entspreche; da dieses nicht der Fall ist, so erheischen die Fehler eine Correction dieser Function. Wir unterscheiden die von der Construction herrührenden Fehler in constante und variable. Zu den ersteren gehören diejenigen, welche herrühren von mangelndem Parallelismus aus beiderlei Röhrenaxen JM und J_1M_1 , dann von der ungenauen Einstellung der Spiegel S und S_1 auf den Polarisationswinkel, endlich von dem Umstand, daß diese Spiegel nicht vollkommen senkrecht auf der Ebene der Fußplatte stehen. Diese sich immerfort gleich bleibenden Fehler lassen sich, falls sie klein sind, in einen constanten Factor zusammenfassen, mit dem wir die Function $F(\varphi)$ zu multipliciren haben. Bei vorliegendem Apparat habe ich mich durch geeignete Messungen davon überzeugt, daß diese Fehler wirklich unbedeutend sind. Diejenigen Fehler dagegen, welche von der unrichtigen Stellung der Glassäule D herkommen, variiren beim Drehen derselben, wir haben sie daher etwas näher ins Auge zu fassen. Wäre die Drehungsaxe zwar senkrecht zur Richtung JM , dagegen nicht parallel der Ebene der Platte, sondern gegen diese um einen Winkel ϑ geneigt, so hätte dieß, da wir ja die Glasplatten stets parallel zur Drehungsaxe stellen können, bloß zur Folge, daß die Einfallsebene jetzt nicht senkrecht zur Fußplatte stände, sondern um den Winkel ϑ von dieser Stellung abweichen würde. Hierbei machen wir allerdings die Voraussetzung, daß die getheilte Kreisscheibe, an welcher der Einfallswinkel φ abgelesen wird, senkrecht stehe auf der Drehungsaxe, was bei der Construction in der That möglichst vollkommen zu erreichen ist. Diese Abweichung ϑ bleibt nun aber bei einer Drehung der Glassäule D unverändert, und wir können deshalb auch ihren Einfluß (falls ϑ eine kleine

Gröfse) in den schon erwähnten constanten Factor hineinziehen. Nehmen wir dagegen an, die Drehungsaxe sey zwar parallel der Ebene der Platte, aber nicht senkrecht gegen die Richtung JM , so tritt eine vom Einfallswinkel abhängige Aenderung der Einfallsebene ein; zugleich ist der Einfallswinkel nicht mehr der auf der Kreisscheibe abgelesene, sondern dieser letztere bedarf einer Correction. Eine Zeichnung auf der Kugeloberfläche ergiebt sofort die Relation:

$$\cos \varphi = \cos \varphi' \cdot \cos u = \cos \varphi' \left(1 - 2 \sin^2 \frac{u}{2}\right),$$

wo φ den wahren und φ' den abgelesenen Einfallswinkel, u die Abweichung der Drehungsaxe von der richtigen Stellung bezeichnet. Bei vorliegendem Apparat ist u , wie sich aus Reflexionsbeobachtungen ergab, ungefähr gleich 5 Minuten. Wir haben daher:

$$\cos \varphi = \cos \varphi' (1 - 0,00000106).$$

Da wir den Werth von $F(\varphi)$ blofs auf 3 Decimalen genau haben wollen, wie wir weiter unten sehen werden, und die Factoren von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ in unsern Formeln höchstens gleich 10 sind, so dürfen wir statt φ' überall schlechtweg φ setzen. Die Abweichung der Einfallsebene auf die Glassäule D von ihrer normalen Lage würde uns statt $F(\varphi)$ folgenden Ausdruck für das Verhältnifs der Intensitäten geben:

$$J_1^2 = J^2 \left\{ \frac{(a^2 - b^2) \sin^2 \varphi - (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi \sin^2 u}{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 u} \right\},$$

oder falls wir $\cos^2 \varphi \sin^2 u$ neben $\sin^2 \varphi$ vernachlässigen:

$$J_1^2 = J^2 [F(\varphi) - (a^2 - b^2) \cotg^2 \varphi \sin^2 u].$$

Beobachtet werden Einfallswinkel von 60° bis 8° (näher an 0° ist die Einstellung zu unsicher). Für den ungünstigsten Fall nun, wo $\varphi = 8^\circ$, erhält das letzte Glied ungefähr den Werth: 0,00024, den wir daher neben dem entsprechenden Werth von $F(\varphi)$: 2,11596 vernachlässigen dürfen. Der Fehler, den wir hiebei begen, wird für gröfsere Einfallswinkel bedeutend kleiner, da $\cotg^2 \varphi$ viel rascher abnimmt als der erste Factor zu.

Es bleibt jetzt bloß noch die Absorption des Lichts zu berücksichtigen und zwar sowohl diejenige in den Platten S und S_1 als in der drehbaren Glassäule D . Der Fehler, welcher von ersterer herrührt, ist zwar auch ein constanter, allein es muß noch ermittelt werden, ob er als bloßer Factor der Function $F(\varphi)$ auftrete oder in anderer Weise in dieselbe eingehe. Wir treffen die gewöhnliche Voraussetzung, daß der Einfluß der Absorption auf die Intensität sich darstellen lasse durch eine Exponentialfunction des vom Lichtstrahl im absorbirenden Medium durchlaufenen Weges, nämlich durch:

$$a^x,$$

wo x dieser Weg und a der sogenannte *Absorptionscoefficient* ist, d. h. der Coefficient, welcher die Schwächung der Intensität angiebt, wenn der Strahl die Längeneinheit des absorbirenden Mediums durchlaufen hat. Eine strenge Berechnung der durch eine Schicht von Glasplatten durchgehenden und davon reflectirten Intensitäten mit Berücksichtigung der Absorption in vorstehender Weise führt zu höchst complicirten, nicht zu übersehenden Formeln. Setzt man dagegen:

$$a^x = (1 + b)^x$$

entwickelt dieses Binom und vernachlässigt dabei die höhern Potenzen von bx , ebenso $r^2 bx$ (wo r die reflectirte Amplitude), so gelangt man zu folgenden Ausdrücken:

$$R_n^2 = L^2 \frac{2nr^2}{1 + (2n-1)r^2} \left[1 + \frac{n \cdot x b}{(1-r^2)^{(2n-1)} \cdot (1+r^2)(1+3r^2) \dots [1+(2n-3)r^2]} \right]$$

$$D_n^2 = L^2 \frac{1-r^2}{1+(2n-1)r^2} [1 + n \cdot x b],$$

wo x den Weg des Lichts im Innern der einzelnen Glasplatte darstellt, also gegeben ist durch:

$$x = \frac{d}{\cos \varphi_1}$$

falls d die Dicke der Platte und φ_1 der zum variablen Einfallswinkel φ gehörige Brechungswinkel. Es muß übr-

gens noch ausdrücklich bemerkt werden, daß obige Formeln nur eine schwache Annäherung gewähren und nur in solchen Fällen anwendbar sind, wo wir es mit sehr dünnen und durchsichtigen Platten in geringer Anzahl zu thun haben. Die Durchführung der Rechnung von Seite 241 und 242 mit vorstehenden Ausdrücken bringt offenbar in der Gleichung 1 bloß die Abänderung hervor, daß die Function $F(\varphi)$ einen Factor von folgender Gestalt erhält:

$$A + B \cdot nx.$$

Die Erfahrung zeigte indessen, daß bei vorliegendem Apparat diese Form des Correctionscoefficienten zur Darstellung der Beobachtungen nicht genügte, wohl aber, falls man noch ein Glied mit der zweiten Potenz der Variablen n und x hinzunahm: $C(nx)^2$. A , B , C sind constante Größen. Berücksichtigend diesen von der Absorption herstammenden Coefficienten und den durch die übrigen Fehlerquellen bedingten constanten Factor erhalten wir schliesslich folgende Gleichung zur Bestimmung des wahren Verhältnisses der Intensitäten:

$$1'. \quad J^2 = J_1^2 F(\varphi) \left[\alpha + \beta \frac{n}{\cos \varphi_1} + \gamma \left(\frac{n}{\cos \varphi_1} \right)^2 \right]$$

α , β , γ sind aus Beobachtungen abzuleitende Constanten. Diese Bestimmung geschah auf folgende Weise. Ein 4 Fuß ins Quadrat haltender Rahmen wurde mit einem Bogen weissen Papiers überspannt und dieser auf einem freien Platze vertical so aufgestellt, daß die Papierwand senkrecht auf einer Verticalebene durch die Sonne stand. Das Photometer ward sodann zwischen der Sonne und der von ihr beleuchteten Wand in einer Entfernung von 20 bis 30' von letzterer gebracht und seine Sehaxe senkrecht gegen die Mitte der Papierwand gerichtet. Die Beobachtungen des Neutralisationswinkels erfolgten zu einer Zeit, wo die Sonne bloß 10 bis 20° über dem Horizont stand. Unter solchen Umständen durfte das von der Wand auf den Apparat einfallende dispergirte Licht als vollkommen natürliches und an jeder Stelle gleich starkes betrachtet werden. Da nun die Wege, welche das Licht von der Wand durch

die eine und andere Oeffnung des Apparats bis zum Auge zu durchlaufen hat, sich genau messen lassen, so können wir in diesem Falle das wirkliche Verhältniß der Intensitäten angeben. Nennen wir dasselbe K , so liefert uns die Beobachtung des Neutralisationswinkels folgende Gleichung:

$$\alpha + \beta \frac{n}{\cos \varphi_1} + \gamma \left(\frac{n}{\cos \varphi_1} \right)^2 = \frac{K}{F(\varphi)}.$$

Die Anzahl n der Glasplatten in der drehbaren Säule D läßt sich beliebig vermehren oder vermindern; beobachtet man daher die verschiedenen Neutralisationswinkel, indem man $n = 10, = 9, = 8$ u. s. f. macht, so erhalten wir eine Reihe von Gleichungen, wie die vorstehende, in denen Alles aufser α , β und γ bekannt ist und aus welchen wir folglich diese Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate ermitteln können. Es könnte hier noch ein Zweifel darüber entstehen, ob die Werthe der so bestimmten Constanten auch dann gelten, falls, wie beim gewöhnlichen Gebrauch des Instruments, n constant bleibt und bloß φ variirt. Um dieß zu entscheiden, brachte man bei derselben Aufstellung wie vorhin einen Satz von zwei, drei und mehr Glasplatten einmal vor die eine, das andere Mal vor die andere Oeffnung des Apparats und zwar stets senkrecht zur Richtung JM . Die nach der Formel 1', mit den gefundenen Werthen von α , β , γ aus dem abgelesenen Neutralisationswinkeln berechneten Verhältnisse der Intensitäten mußten offenbar je für die auf die beiderlei Oeffnungen einfallenden Lichtstärken dieselbe Schwächung ergeben, falls anders jene Constanten auch hier, wo bloß φ varirte, Gültigkeit haben sollten. Dieß war denn auch bei den gemachten Beobachtungen der Fall, somit dieser Zweifel beseitigt.

Eine ähnliche für das Polarimeter angestellte Betrachtung zeigte, daß da der Einfluß der Absorption und der anderen Fehler ganz verschwindet, also unmittelbar unsere frühern Formeln gelten.

Was endlich die Beobachtungsfehler und die darauf sich stützende Leistungsfähigkeit des Apparats anbelangt,

so kommt es hierbei darauf an; inwiefern wir bei wiederholten Einstellungen der Glassäule D auf den Punkt, wo für unser Auge die Farben verschwinden, immer denselben abzulesenden Einfallswinkel φ erhalten. Aus dem so ermittelten Beobachtungsfehler läßt sich dann leicht die Genauigkeit für das berechnete Verhältniß der Intensitäten ableiten. Denken wir uns nämlich die Werthe der Function $F(\varphi)$, welche dieses Verhältniß angiebt, als Ordinaten einer Curve aufgetragen, deren Abscissen je die entsprechenden φ sind, so giebt uns der Differentialquotient von $F(\varphi)$ nach φ_1 multiplicirt mit $d\varphi_1$ das Stück, um welches sich die Ordinate der Tangente an einen Punkt φ der Curve beim Wachsen dieser Abscisse um $d\varphi$ ändert; da aber die Tangente für eine kleine Aenderung von φ noch mit der Curve als zusammenfallend anzusehen ist, so wird auch das obige Differenzial unmittelbar die Aenderung des Werthes der Function $F(\varphi)$ für eine kleine Variation $d\varphi$ des Einfallswinkels i. e. für den Beobachtungsfehler $d\varphi$ darstellen. Führen wir die angedeutete Differenziation nach φ und nach der davon abhängigen Variabeln φ_1 durch und drücken dann $d\varphi_1$ gemäß der Relation:

$$\sin \varphi_1 = m \cdot \sin \varphi$$

durch $d\varphi$ aus, so finden wir schließlich:

$$\frac{d \cdot F(\varphi)}{d\varphi} d\varphi = -d\varphi \frac{2 \tan \varphi_1}{n \cdot \sigma} \left\{ \frac{a}{\sigma} \left[\frac{2n\sigma^2}{1 + (2n-1)\sigma^2} \right]^2 + \frac{b}{\tau \cdot \cos^2(\varphi + \varphi_1)} \left[\frac{2n\tau^2}{1 + (2n-1)\tau^2} \right]^2 \right\}$$

Bei vorliegendem Apparat, wo die Farben durch einen Kalkspath erzeugt wurden, war es mir nach einiger Uebung möglich, die Glassäule bei wiederholten Beobachtungen bis auf $6'$ einzustellen, falls φ ungefähr 40° und $n=8$ war. Setzen wir in vorstehender Formel $d\varphi = \text{arc } 6'$, so finden wir:

$$dF(\varphi) = -0,00532.$$

Eine einmalige Einstellung giebt uns folglich das Verhältniß der Intensitäten bis auf $\frac{1}{200}$ genau. Es versteht sich wohl von selbst, daß man, um von der fehlerhaften

Stellung des Index frei zu werden, immer den doppelten Einfallswinkel beobachtet. Bei allen nachfolgenden Bestimmungen gewann man den Einfallswinkel φ , mit welchem die Rechnung angestellt wurde, stets so, daß man 8 Einstellungen, je zwei in einem Quadranten, machte. Zwei unter gleichen Umständen auf solche Weise erhaltene Einfallswinkel gaben für das Verhältniß der Intensitäten stets Werthe, die bloß um Einheiten in der dritten Decimale von einander abwichen. — Die Beobachtung des Neutralisationswinkels mit gekreuzten Bergkrystallplatten scheint mir um so viel sicherer zu seyn, daß ich zuversichtlich glaube, der Mittelwerth aus vier Einstellungen (je eine in einem Quadranten), würde das gesuchte Verhältniß mit einer vollständigen Genauigkeit von 3 Decimalen liefern. — Bei dem obigen Beobachtungsfehler $6'$ wurde ausdrücklich der Einfallswinkel angegeben, weil derselbe mit letzterm etwas variirt, bei Einfallswinkeln über 40° wird nämlich die Genauigkeit der Einstellung größer, bei solchen unter 40° nach und nach geringer; dieß hat indessen auf die angeführte Sicherheit der Bestimmung des Intensitätsverhältnisses keinen Einfluß, da sich dieser Erfahrung entsprechend unsere theoretische Function $F(\varphi)$ bei größern Einfallswinkeln rascher ändert als bei kleinern. Setzen wir z. B. in obiger Formel $\varphi = 50^\circ$ und $d\varphi$ wieder gleich $\text{arc } 6'$, so kommt:

$$dF(\varphi) = -0,00579$$

und falls wir $\varphi = 20^\circ$ annehmen;

$$dF(\varphi) = -0,00193.$$

Streng genommen müßte eigentlich auch der Correctionscoefficient in obiges Differenzial aufgenommen werden, da in ihm ebenfalls die Variable φ vorkommt; er wurde weggelassen, weil er für solch kleine Aenderungen von φ als constant zu betrachten ist.

Ganz analog läßt sich endlich die Genauigkeit der mit dem Polarimeter erhaltenen Resultate bestimmen. Wir brauchen bloß den Factor von J , nachdem wir die betreffenden Gleichungen auf die Form:

$$P^2 = J^2 \cdot f(\varphi)$$

gebracht haben, nach φ zu differenziren, um die Aenderung des Verhältnisses: $\frac{P^2}{J^2}$ für eine kleine Variation $d\varphi$ des Einfallswinkels zu erfahren. Es ergab sich so, daß die hier auftretenden Beobachtungsfehler ganz dieselbe Sicherheit der Resultate gewähren, wie beim Photometer.

- e. Bestimmung der Lichtabsorption durch das Wasser und des polarisirten Himmelslichts in einem Vertikalkreise durch die Sonne.

Für die erstere Bestimmung wählte man den Fall, wo natürliches Licht auf beide Oeffnungen des Apparats einfällt, also die Gleichung 1' giebt:

$$J^2 = J_1^2 \cdot F(\varphi) \cdot C.$$

Bei den letztern Bestimmungen mittelst des Polarimeters liefs man stets die Einfallsebene auf D mit der ursprünglichen Polarisationssebene zusammenfallen. Das Verhältniß der Intensitäten berechnet sich dann nach Gleichung 4:

$$P^2 = J^2 \cdot f(\varphi).$$

Da es nun viel zu mühsam wäre, bei größern Beobachtungsreihen der Art die Werthe der Functionen $F(\varphi)$ und $f(\varphi)$ für jedes einzelne φ zu berechnen und wir zu dem auch diese Werthe gemäß dem Vorigen blofs bis auf 3 Decimalen genau zu wissen brauchen, so suchte ich dieselbe auf eine einfachere Weise bis zu dieser Annäherung darzustellen. Nach einem mißlungenen Versuch, zu den von vier zu vier Graden berechneten Werthen dieser Functionen schnell zum Ziel führende Interpolationsformeln aufzufinden, kehrte ich dazu zurück, diese Werthe von zwei zu zwei Graden zu berechnen und dazwischen die Functionen als proportional mit φ ab- oder zunehmend zu betrachten. Dieses Verfahren giebt uns die Functionen bis auf Einheiten in der dritten Decimale genau, was ja für den vorliegenden Apparat ausreicht. Es möchte wohl nicht unpassend seyn, einen Theil dieser Tafeln hier mitzutheilen; wenn dieselben auch nur für den speciellen Apparat Gültigkeit haben, so können sie doch dazu dienen, allgemein

eine Anschauung über die Aenderung der Werthe der Functionen mit den Einfallswinkeln zu gewähren.

φ	$F(\varphi)$	$f(\varphi)$	
8°	2,11596	0,01136	
30	1,60281	0,20696	Anzahl der Platten in der drehbaren Glassäule: $n = 8$.
32	1,52287	0,24525	
34	1,43691	0,28924	
36	1,34498	0,33983	
38	1,24715	0,39801	
40	1,14356	0,46497	
42	1,03460	0,54194	
44	0,92074	0,63030	
46	0,80286	0,73132	
48	0,68220	0,84610	
50	0,56052	0,97524	
60	0,05023	1,74416	

Für die Coëfficienten α , β und γ , die in dem Correctionsfactor C auftreten, fand man nach der Seite 265 angeführten Methode folgende Zahlenwerthe:

$$\alpha = 1,07549.$$

$\text{Log } \beta = 0,53659 - 3$ $\text{Log } \gamma = 0,12496 - 3$,
wo aber β und γ negative Vorzeichen haben. Mittelst dieser Coëfficienten lassen sich die Beobachtungen, aus denen sie abgeleitet sind mit einer Genauigkeit von 3 Decimalen wieder berechnen.

Sollten die zu bestimmenden Verhältnisse über die obigen durch 8° und 60° definirten Gränzen hinausgehen, so schwäche man beim Photometer das stärkere Licht auf bekannte, bereits mittelst des Apparats bestimmte Weise (etwa durch eine Schicht Glasplatten, die man senkrecht zur Axe vor die betreffende Röhren-Oeffnung setzt) und beim Polarimeter vermehre man die Anzahl der Platten in der drehbaren Glassäule.

Die Ermittlung der Absorption des Wassers geschah nun auf folgende Weise. Von drei innen matt schwarzen, an den Enden durch Glasplatten senkrecht zur Axe verschlossenen Zinkröhren von ungefähr 2 Zoll Durchmesser und 4, 6 und 12 Zoll Länge wurden je zwei so vor die

beiden Oeffnungen R und R_1 des Apparats gebracht, daß ihre Axe mit den Richtungen JM und J_1M_1 zusammenfielen. Die Glasplatten an den Enden der Röhren waren sämtlich aus der gleichen Tafel geschnitten, also ihre Brechungsverhältnisse dieselben. Man ließ sodann natürliches Licht einfallen und beobachtete den Neutralisationswinkel einmal bei leeren Röhren, hierauf, nachdem dieselben durch seitliche Oeffnungen mit destillirtem, kurz vorher filtrirtem Wasser gefüllt waren. Heißen wir die einfallenden Intensitäten J^2 und J_1^2 , so giebt der Neutralisationswinkel für den ersten Fall die Relation:

$$K.J_1^2 = \gamma.K.J^2.\alpha,$$

wo K der durch die Reflexion an den verschleißenden Glasplatten bedingte Coëfficient (offenbar gleich bei beiden Röhren), und γ ein Factor herrührend von einem allfälligen Unterschied der beiden Röhren; α stellt das aus dem Neutralisationswinkel berechnete Verhältniß der durch die Röhren durchgegangenen Intensitäten dar. Die zweite Beobachtung liefert folgende Gleichung:

$$K_1.J_1^2.a'' = \gamma.K_1.J^2.a''.\beta.$$

K_1 bezeichnet den Verlust an Intensität, den das Licht an der vorderen und hintern Glasplatte der vorgesetzten Röhren beim Uebergang aus Luft in Glas und aus Glas in Wasser und umgekehrt erfährt. Die Factoren a'' und a_q geben die Schwächung der betreffenden Lichtintensitäten beim Durchgang durch p und q Zoll Wasser an, falls a der Absorptionscoëfficient des Wassers nach unserer früheren Definition; β endlich ist wieder das aus dem Neutralisationswinkel berechnete Verhältniß der Intensitäten. Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir für die gesuchte Größe:

$$a = \sqrt[p-q]{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Die angestellten Beobachtungen ergaben auf solche Weise:

Combination der Röhren.	Absorptionscoefficient a .
1 Zoll und 6 Zoll	0,9888
1 " " 12 "	0,9882
6 " " 12 "	0,9876

also im Mittel: $a = 0,9882$. Eine zweite analoge Beobachtungsreihe gab als Mittel: $a = 0,9885$. Der *Absorptionscoefficient des Wassers bezogen auf 1 Pariser Zoll als Einheit des Weges* wäre hiernach:

$$a = 0,98835$$

und zwar genau bis zu und mit der dritten Decimale. Das hiebei angewandte Filterpapier war *mittelfeines*; für Wasser, das durch feinstes Papier filtrirt worden, ergab sich: $a = 0,9939$, und für grobes Filterpapier fiel der Absorptionscoefficient herab auf: 0,9833.

Mittelst des Polarimeters wurde am 29. September vergangenen Jahres Nachmittags bei vollkommen reinem Himmel das theilweise polarisirte Himmelslicht in einem Verticalkreise durch die Sonne untersucht. Um hiebei die Einfallsebene des Lichts auf die Glassäule D stets mit der Verticalebene durch die Sonne zusammenfallend machen zu können, wurde der Apparat auf einem dergestalt eingerichteten Gestell befestigt, dafs die Grundplatte um eine horizontale und verticale Axe drehbar war. Die Beschaffenheit des Beobachtungsortes gestattete es leider nicht, die Sonne bis zu ihrem Untergange zu verfolgen, es war daher nicht möglich, ihr selbst sowie dem antisolaren Punkt sich auf mehr als 20 bis 30" zu nähern: anderseits machte die beschränkte Drehbarkeit des Apparats es unmöglich, die Himmelsstellen im Intervall von 50 bis 85" Distanz von der Sonne zu untersuchen. Folgendes sind die mit der Function $f(\varphi)$ aus den beobachteten Neutralisationswinkeln berechneten Verhältnisse der Intensität des natürlichen und polarisirten Lichts je an den betreffenden Stellen des Himmels in einem Verticalkreise durch die Sonne:

Entfernung von der Sonne nach Norden.	Verhältniß: $\frac{P^2}{J^2}$
20°	0,0289
30	0,0946
40	0,1910
50	0,3791
...	
85	1,8186
90	1,9439
100	1,7516
110	1,2233
120	0,7076
130	0,3878
140	0,1866
150	0,0726.

Wie wir sehen erreicht das polarisirte Licht in der Gegend von 90° ein Maximum; da ist der polarisirte Antheil fast doppelt so groß als das natürliche Licht. Der Veranschaulichung halber ist diesen Zahlen gemäß die Curve (Fig. 8) verzeichnet und zwar die Entfernung von der Sonne als Abscissen, die Verhältnisse $\frac{P^2}{J^2}$ als Ordinaten, letztere verhundertfacht aufgetragen. Die punktierten Theile der Curve sollen deren muthmaßlichen Verlauf für diejenigen Stellen andeuten, wo keine messenden Beobachtungen ausgeführt werden konnten. Von 150 bis 180° und von 20 bis 0° beruht die verzeichnete Curve auf qualitativen Beobachtungen von Brewster und Babinet, die ich selbst am Ostseestrand bei untergehender Sonne zu wiederholen Gelegenheit hatte. Die Sonne und der antisolare Punkt oder doch eine Stelle in seiner Nähe sind nämlich neutral, d. h. haben nur natürliches Licht; zudem werden aber beide noch von neutralen Kreisen umgeben, welche je nach dem Stande der Sonne 7 bis 15° von ihnen abstehen. Innerhalb dieser Kreise, gegen die Sonne (oder dem antisolaren Punkt) zu, ist das Himmelslicht senkrecht gegen eine Ebene durch die Sonne, die beobachtete Stelle

und das Auge des Beobachters polarisirt, während außerhalb (zwischen den beiden neutralen Kreisen) die Polarisationsebene mit jener Ebene zusammenfällt. Das Maximum der Intensität des polarisirten Lichts innerhalb der neutralen Kreise schätzte ich, der Deutlichkeit der Farben nach, ungefähr gleich derjenigen außerhalb in 20° Abstand von der Sonne. — Die obigen Daten erhalten übrigens erst dann ihre wahre Bedeutung, falls wir zugleich das Verhältniß der Intensitäten des natürlichen Lichts an den verschiedenen Stellen des Verticalkreises unter sich, wo möglich auch ihr Verhältniß zur Stärke des directen Sonnenlichts kennen würden. Durch zweckmäfsig vor den Oeffnungen R und R_1 angebrachte Spiegel werden sich aber diese Verhältnisse leicht mittelst des ins Photometer umgewandelten Instruments bestimmen lassen. In dieser Hinsicht habe ich indessen noch keine Beobachtung angestellt.

Meine weitem experimentellen Untersuchungen mittelst des Apparats sollen sich daher zunächst dem vorstehenden Punkt, dann auch der Lichtabsorption durch Salzlösungen zuwenden. Erstere werden ein um so größeres Interesse gewähren als den über die Vertheilung des Lichts am Himmel von Lambert (in seiner Photometrie) und in neuerer Zeit von Clausius (*Crelle's Journal* Bd. 34 und 36) aufgestellten Theorie bis jetzt eine experimentelle Bestätigung fehlt.