**ALCUNE APPLICAZIONI DELLA TEORIA DELLE EQUAZIONI FUNZIONALI
ALLA FISICA-MATEMATICA.**

del Prof. GIUSEPPE LAURICELLA.

CAPITOLO II.

Integrale di Gauss e sue estensioni.

1. Ferme restando le condizioni poste per la superficie σ al § 1 del Capitolo precedente, diremo *faccia positiva* della superficie σ quella rivolta verso il campo S, cioè quella che guarda la direzione positiva della normale n , diremo *faccia negativa* della superficie σ quella rivolta verso il campo S', cioè quella che guarda la direzione negativa della normale n .

Ciò premesso, ovunque si trovi nello spazio il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ si costruisca la sfera di raggio 1 col centro in P e si consideri un punto generico Q della superficie ω di questa sfera e la semiretta che, partendo da P, passi per Q. Supponiamo che questa semiretta tagli la superficie σ in p punti (dai quali intendiamo escludere i punti di contatto della semiretta con σ) e indichiamo con $r_1, r_2, \dots, r_p$ i raggi vettori che partono da P e arrivano ai detti p punti. Supponiamo ancora di avere scelto il punto Q in modo che in ognuno di questi p punti di intersezione la superficie σ abbia il piano tangente. Si consideri una porzione $\delta\omega$ del piano tangente ad ω in Q, avente questo punto nel suo interno, e si considerino ancora le porzioni $\delta\sigma_1, \delta\sigma_2, \dots, \delta\sigma_p$ dei piani tangenti alla superficie σ nei p punti di intersezione, interni al cono avente per vertice il punto P e per direttrice il contorno di $\delta\omega$.

Si avrà :

$$(1) \quad \delta\omega = \pm \frac{d}{dn} \frac{1}{r_i} \delta\sigma_i + D \cdot \epsilon_i \cdot \delta\sigma_i ,$$

dove D è una quantità fissa ed ε_i è dello stesso ordine di piccolezza della massima dimensione di $\delta\sigma_i$. In questa formola si prenderà il segno $+$ o il segno $-$, in modo che l'espressione

$$\pm \frac{d}{dn} \frac{1}{r_i} = \mp \frac{1}{r_i^2} \left(\cos \widehat{r_i x} \cdot \cos \widehat{n x} + \cos \widehat{r_i y} \cdot \cos \widehat{n y} + \right. \\ \left. + \cos \widehat{r_i z} \cdot \cos \widehat{n z} \right) = \mp \frac{\cos \widehat{r_i n}}{r_i^2}$$

risulti sempre positiva; di modo che in ognuno dei p punti di intersezione si prenderà il segno $+$ o il segno $-$, secondo che in esso punto la superficie σ volge al punto P la sua faccia positiva o la negativa; ossia, se si conviene di chiamare *punti di entrata* rispetto al punto P quei punti nei quali la superficie σ volge a P la sua faccia negativa, *punti di uscita* quelli nei quali la superficie σ volge a P la sua faccia positiva, si prenderà nella formola (1) il segno $+$ o il segno $-$, secondo che il corrispondente punto di intersezione è di uscita o di entrata.

Supponiamo che i detti p punti di intersezione siano formati di p' punti di uscita e di p'' punti di entrata; allora sarà:

$$(2) \quad \sum_i^p \frac{d}{dn} \frac{1}{r_i} \delta\sigma_i = (p' - p'') \delta\omega + D \sum_i^p \pm \varepsilon_i \cdot \delta\sigma_i.$$

2. Supponiamo che il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ non sia su σ . Per calcolare l'*integrale di Gauss*:

$$(3) \quad \int_{\sigma} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma,$$

si può procedere nel seguente modo: Si consideri una superficie poliedrica circoscritta alla sfera di raggio 1 col centro in P ; si costruiscano i coni aventi per vertice comune il punto P e ognuno per direttrice il contorno di una faccia $\delta\omega$ del poliedro; si tirino le semirette che vanno dal punto P ai punti di contatto delle facce del poliedro con la sfera; si considerino

i piani tangenti a σ nei punti in cui queste semirette intersecano σ ¹⁾, senza essere tangenti a σ , e le porzioni $\delta\sigma_i$ di questi piani tangenti, interna ognuna al cono che contiene nel suo interno il relativo punto di contatto; si calcoli per ogni por-

zione $\delta\sigma_i$ l'espressione $\frac{d}{dn} \frac{1}{r_i} \delta\sigma_i$ e si faccia la somma di tutte le espressioni così ottenute; il limite di questa somma, quando le facce $\delta\omega$ del poliedro impiccoliscono indefinitamente, sarà uguale al valore dell'integrale (3).

Ora in virtù della formola (2) la detta somma si può esprimere nel seguente modo:

$$\sum_i \frac{d}{dn} \frac{1}{r_i} \delta\sigma_i = \sum (p' - p'') \delta\omega + D \sum_i \pm \epsilon_i \delta\sigma_i,$$

dove il secondo sommatorio si estende a tutte le facce $\delta\omega$ della superficie poliedrica circoscritta alla suddetta sfera; sicchè, facendo impiccolire indefinitamente le facce di questa superficie poliedrica, si avrà:

$$(4) \quad \int_{\sigma} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = \int_{\omega} (p' - p'') d\omega,$$

il secondo integrale essendo esteso a tutta la superficie ω della sfera di centro P e di raggio 1. I numeri p' e p'' , che compaiono sotto il secondo integrale, indicano rispettivamente i numeri dei punti di uscita e di entrata in cui la semiretta ρ , che parte da P e va al punto variabile di ω , incontra la superficie σ .

Nello stesso modo che si è ottenuta la formola (4), si otterranno le altre seguenti:

1) La superficie poliedrica, circoscritta alla superficie sferica ω , si può sempre sceglierla in modo che la superficie σ nei detti punti di intersezione ammetta un piano tangente determinato.

4. Passiamo ora a calcolare i valori degli integrali (4), (5) nelle diverse ipotesi che il punto P sia interno ad S, o ad S', oppure sia su σ .

Supposto dapprima che il punto P sia interno ad S, osserveremo che ogni semiretta, che si spicca da P, deve dapprima incontrare la superficie σ necessariamente in un punto di uscita e può in seguito incontrare la superficie σ in un numero pari di punti alternativamente di entrata e di uscita; sicchè in questo caso sarà in ogni punto di ω .

$$p' - p'' = 1 ;$$

e quindi dalle (4), (5) risulterà :

$$\int_{\sigma} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = \int_{\omega} d\omega , \quad \int_{\sigma} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = \int_{\omega} \cos^2 \widehat{px} d\omega ,$$

$$\int_{\sigma} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = \int_{\omega} \cos \widehat{px} \cdot \cos \widehat{py} d\omega , \dots$$

Introducendo le coordinate polari col polo nel punto P, risulterà da queste formole per P interno al campo S :

$$(6) \quad \int_{\sigma} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = 4\pi , \quad \int_{\sigma} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = \frac{4}{3} \pi ,$$

$$\int_{\sigma} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = 0 , \dots$$

Si supponga ora il punto P interno al campo infinito S'. In questo caso ogni semiretta, che si spicca da P, o non incontra mai la superficie σ o l'incontra necessariamente in un numero pari di punti alternativamente di entrata e di uscita; sicchè si avrà in tutti i punti di ω :

$$p' - p'' = 0 ;$$

e quindi per P interno al campo infinito S' risulterà:

$$(6)' \int_{\sigma} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = \int_{\sigma} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = \int_{\sigma} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = \dots = 0.$$

Supponiamo finalmente che il punto P sia su σ e che ivi la superficie ammetta un piano tangente determinato. In questo caso la superficie ω viene scomposta dal detto piano tangente in due parti uguali ω' , ω'' ; una parte ω' sarà incontrata dalla direzione positiva della normale in P, l'altra parte ω sarà incontrata dalla direzione negativa di detta normale. Ogni semiretta, che parte da P e incontra ω' , dovrà incontrare la superficie σ necessariamente in un punto di uscita e potrà in seguito incontrare σ in un numero pari di punti alternativamente di entrata e di uscita; sicchè nei punti di ω' si avrà:

$$p' - p'' = 1.$$

Ogni semiretta, che parte da P e incontra ω'' , o non incontra mai la superficie σ , o, se l'incontra, l'incontrerà in un numero pari di punti successivamente di entrata e di uscita; sicchè nei punti di ω'' sarà:

$$p' - p'' = 0.$$

Adunque avremo:

$$\int_{\sigma} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = \int_{\omega'} d\omega, \quad \int_{\sigma} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = \int_{\omega'} \cos^2 \widehat{px} d\omega,$$

$$\int_{\sigma} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = \int_{\omega'} \cos \widehat{px} \cdot \cos \widehat{py} d\omega, \dots;$$

ed introducendo le coordinate polari col polo nel punto P, risulterà :

$$(6)^* \quad \int_{\sigma} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = 2\pi, \quad \int_{\sigma} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = \frac{2}{3} \pi,$$

$$\int_{\sigma} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma = 0, \dots$$

In modo perfettamente analogo si può operare nei casi in cui P è un punto conico o un punto di linea diedrale.

5. Indichiamo con t il massimo numero dei punti in cui una retta qualsiasi dello spazio incontra la superficie σ . Sarà sempre :

$$p' + p'' \leq t;$$

e quindi, ovunque si trovi il punto P, si avrà :

$$\int_{\sigma} \left| \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right| d\sigma = \int_{\omega} (p' + p'') d\omega < 4\pi t, \quad \int_{\sigma} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \left| \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right| d\sigma < \int_{\omega} (p' + p'') d\omega < 4\pi t,$$

$$\int_{\sigma} \left| \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right| d\sigma < 4\pi t, \dots$$

Doppio strato e sue estensioni.

6. Sia h una funzione finita e continua dei punti della superficie σ e sia P' un punto generico di σ , nel qua e però esista un piano tangente determinato. Indichiamo con h' il valore della funzione h nel punto P' e con r' i raggi vettori che partono da P'. Data ad arbitrio una quantità positiva ϵ , si può staccare da σ una porzione σ' di superficie tale che contenga il punto P' nel suo interno e che per qualunque suo punto si abbia :

$$|h - h'| < \epsilon.$$

Allora si potrà scrivere :

$$\left| \int_{\sigma'} (h-h') \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma \right| \leq \int_{\sigma'} |h-h'| \cdot \left| \frac{d \frac{1}{r}}{dn} \right| d\sigma < 4\pi.t.\varepsilon ,$$

$$\left| \int_{\sigma'} (h-h') \frac{d \frac{1}{r'}}{dn} d\sigma \right| < 4\pi.t.\varepsilon .$$

È chiaro ancora che si può considerare un intorno del punto P' nello spazio (ad esempio una sfera col centro in P'), tale che per qualunque suo punto P risulti :

$$\left| \int_{\sigma-\sigma'} (h-h') \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \int_{\sigma-\sigma'} (h-h') \frac{d \frac{1}{r'}}{dn} d\sigma \right| < \varepsilon$$

Riassumendo, si avrà per tutti i punti P di detto intorno:

$$\left| \int_{\sigma} (h-h') \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \int_{\sigma} (h-h') \frac{d \frac{1}{r'}}{dn} d\sigma \right| < \varepsilon + 4\pi.t.\varepsilon + 4\pi.t.\varepsilon = (1+8\pi.t)\varepsilon$$

Risulta quindi :

$$(7) \quad \lim_{P=P'} \int_{\sigma} (h-h') \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma = \int_{\sigma} (h-h') \frac{d \frac{1}{r'}}{dn} d\sigma ,$$

qualunque sia la direzione secondo cui il punto P dello spazio si avvicina al punto P' di σ .

Ora si ha identicamente, ovunque si trovi il punto P dello spazio,

$$\int_{\sigma} h \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma = h' \int_{\sigma} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma + \int_{\sigma} (h-h') \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma ,$$

$$(13) \left\{ \begin{aligned} X''_{\sigma} &= \frac{3k}{2+k} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{d}{dn} \frac{1}{r}, & Y''_{\sigma} &= \frac{3k}{2+k} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d}{dn} \frac{1}{r}, \\ Z''_{\sigma} &= \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{d}{dn} \frac{1}{r}, \end{aligned} \right.$$

e dove si suppone che le funzioni u, v, w dei punti della superficie σ siano finite e continue.

Chiameremo il sistema (10), formato dalle funzioni U, V, W , un *sistema di pseudo-doppi strati elastici*.

Consideriamo sulla superficie σ un sistema di coordinate curvilinee α, β ; poniamo $P' \equiv (\alpha' \beta')$ ed ancora:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} X'_{\sigma}(\alpha, \beta; \alpha', \beta') &= \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r'}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{d}{dn} \frac{1}{r'}, \\ Y'_{\sigma}(\alpha, \beta; \alpha', \beta') &= \frac{3k}{2+k} \frac{\partial r'}{\partial x} \frac{\partial r'}{\partial y} \frac{d}{dn} \frac{1}{r'}, \dots; \\ X''_{\sigma}(\alpha, \beta; \alpha', \beta') &= \frac{3k}{2+k} \frac{\partial r'}{\partial y} \frac{\partial r'}{\partial x} \frac{d}{dn} \frac{1}{r'}, \dots; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

$$(15) \left\{ \begin{aligned} U(\alpha', \beta') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma}(\alpha, \beta; \alpha', \beta') u d\sigma, \\ V(\alpha', \beta') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_{\sigma}(\alpha, \beta; \alpha', \beta') u d\sigma, \dots \end{aligned} \right.$$

In virtù della supposta continuità delle funzioni u, v, w che compariscono nelle espressioni (10) ed in virtù ancora delle formole (8), (8)', (9), (9)', si avrà, se il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ si avvicina indefinitamente al punto $P' \equiv (\alpha' \beta')$ di σ , mantenendosi sempre nell'interno del campo finito S ,

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{P=P'} U(\xi, \eta, \zeta) = u(\alpha', \beta') + U(\alpha', \beta'), \\ \lim_{P=P'} V(\xi, \eta, \zeta) = v(\alpha', \beta') + V(\alpha', \beta'), \dots, \end{array} \right.$$

se il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ si avvicina indefinitamente al punto $P' \equiv (\alpha', \beta')$ di σ , mantenendosi sempre nell'interno del campo infinito S' ,

$$(16)' \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{P=P'} U(\xi, \eta, \zeta) = -u(\alpha', \beta') + U(\alpha', \beta'), \\ \lim_{P=P'} V(\xi, \eta, \zeta) = -v(\alpha', \beta') + V(\alpha', \beta'), \dots \end{array} \right.$$

Strati elastici e corrispondenti pseudo-tensioni.

8. Facciamo ora sulla superficie σ le seguenti ipotesi:

1° Ammetta un piano tangente determinato in ogni suo punto, variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2° Esista un numero fisso positivo α tale che, indicando con $\widehat{nn'}$ l'angolo formato dalle direzioni positive delle normali n, n' in due punti qualsiasi p, p' di σ e con r' il vettore $\overline{pp'}$, si abbia:

$$\widehat{nn'} < \alpha r'.$$

Le precedenti condizioni geometriche sono verificate certamente per le superficie a curvatura finita.

Ciò premesso, fissiamo un punto generico P' sulla superficie σ ed indichiamo con n' la direzione positiva della normale a σ in questo punto. Consideriamo gli integrali:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X_{\sigma} u' d\sigma, \quad v_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X_{\sigma} v' d\sigma, \\ w_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X_{\sigma} w' d\sigma, \end{array} \right.$$

dove $u', v', w'; u'', \dots; u''', \dots$ sono le funzioni date dalle formole (5), (5)' del Capitolo precedente, e dove $X_{\sigma}, Y_{\sigma}, Z_{\sigma}$ sono fun-

zioni finite e continue qualsiasi dei punti della superficie σ . Chiameremo il sistema di funzioni (17) un *sistema di strati elastici*.

Avuto riguardo al fatto che le funzioni $u', v', w'; u'', \dots; u''', \dots$, quando il punto (ξ, η, ζ) si avvicina al punto (x, y, z) , si comportano come la funzione $\frac{1}{r}$, ne segue che *le funzioni $u_i(\xi, \eta, \zeta)$, $v_i(\xi, \eta, \zeta)$, $w_i(\xi, \eta, \zeta)$ sono finite e continue in tutti i punti $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ dello spazio, i punti della superficie σ inclusi*.

9. Si considerino le espressioni :

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} \cos \widehat{n'x} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \cos \widehat{n'y} + \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \cos \widehat{n'z} \right) + \\ &+ k \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \right) \cos \widehat{n'x} + \frac{k}{2+k} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} \cos \widehat{n'y} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \cos \widehat{n'z} - \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \cos \widehat{n'x} - \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \cos \widehat{n'x} \right), \\ V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} \cos \widehat{n'x} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \cos \widehat{n'y} + \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \cos \widehat{n'z} \right) + \\ &+ k \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \right) \cos \widehat{n'y} + \frac{k}{2+k} \left(\frac{\partial w_1}{\partial \eta} \cos \widehat{n'z} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \cos \widehat{n'x} - \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \cos \widehat{n'y} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \cos \widehat{n'y} \right), \\ W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' &= \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \cos \widehat{n'x} + \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \cos \widehat{n'y} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \cos \widehat{n'z} + \\ &+ k \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \right) \cos \widehat{n'z} + \frac{k}{2+k} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \cos \widehat{n'x} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \cos \widehat{n'y} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \cos \widehat{n'z} - \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \cos \widehat{n'z} \right), \end{aligned} \right.$$

nelle quali per il momento si suppone che il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ sia discosto dalla superficie σ . Se si eseguiscano i calcoli indicati ai secondi membri di queste formole e se si pone :

$$\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cos \widehat{nx} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cos \widehat{ny} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \cos \widehat{nz} ,$$

$$X'_1 = \frac{2}{2+k} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r} , \quad Y'_1 = \frac{3k}{2+k} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r} ,$$

$$Z'_1 = \frac{3k}{2+k} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r} ;$$

$$X''_1 = \frac{3k}{2+k} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r} , \quad Y''_1 = \frac{2}{2+k} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r} ,$$

$$Z''_1 = \frac{3k}{2+k} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r} ;$$

$$X'''_1 = \frac{3k}{2+k} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r} , \quad \dots , \quad \dots ,$$

è facile verificare che si ha :

$$(18)' \left\{ \begin{array}{l} U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_1 X_{\sigma} d\sigma , \quad V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_1 X_{\sigma} d\sigma , \\ W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_1 X_{\sigma} d\sigma . \end{array} \right.$$

Alle espressioni $U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)'$, $V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)'$, $W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)'$, si può dare la seguente interpretazione. Si consideri una superficie chiusa σ_1 passante per il punto P, la quale abbia tutti i suoi punti discosti da σ e nel punto P abbia la normale parallela alla direzione n' . Se il punto P appartiene ad S, le espressioni (18)' rappresentano i valori nel punto P delle componenti delle pseudo-tensioni nei punti di σ_1 , corrispondenti alla deformazione, avente per componenti le (17), di un mezzo elastico, il quale occupa il campo finito limitato da σ_1 ; se il punto P appartiene ad S', le espressioni (18)', cambiate di segno, rappresentano i valori nel punto P delle componenti delle pseudo-tensioni nei punti di σ_1 , corrispondenti alla deformazione,

avente per componenti le (17), di un mezzo elastico, il quale occupa il campo infinito limitato da σ_1 .

10. Si ha identicamente :

$$(18)^* \left\{ \begin{aligned} U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma} X_{\sigma} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma (X'_{\sigma} + X'_1) X_{\sigma} d\sigma, \\ V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_{\sigma} X_{\sigma} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma (X''_{\sigma} + X''_1) X_{\sigma} d\sigma, \\ W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_{\sigma} X_{\sigma} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma (X'''_{\sigma} + X'''_1) X_{\sigma} d\sigma, \end{aligned} \right.$$

dove X'_{σ} , Y'_{σ} , Z'_{σ} ; X''_{σ} , ...; X'''_{σ} , rappresentano le espressioni date dalle formole (11), (12), (13).

Notiamo anzitutto che si ha :

$$\begin{aligned} X'_{\sigma} + X'_1 &= \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right\} \left(\frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{\delta}{\delta n'} \frac{1}{r} \right) = \\ &= \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{rn'} - \cos \widehat{rn}}{r^2}; \end{aligned}$$

ed ancora, se si considera un triedro avente gli spigoli paralleli alle direzioni n , n' , r , e si indica con B il rettilineo del diedro di questo triedro, che ha lo spigolo parallelo alla direzione n , si ha dalla trigonometria :

$$\begin{aligned} \frac{\cos \widehat{rn'} - \cos \widehat{rn}}{r} &= \frac{\widehat{nn'} \cdot \widehat{rn} \cdot \cos B - 2 \sin^2 \frac{\widehat{nn'}}{2} \cos \widehat{rn}}{r} = \\ &= \frac{\sin \frac{\widehat{nn'}}{2}}{\frac{r'}{2}} \left\{ \cos \frac{\widehat{nn'}}{2} \cdot \widehat{rn} \cdot \cos B - \sin \frac{\widehat{nn'}}{2} \cdot \cos \widehat{rn} \right\} \frac{r'}{r}, \end{aligned}$$

ove indichiamo con r' il vettore che parte dal punto P' e va al punto variabile $p \equiv (x, y, z)$ di σ . Se si considera un triedro

dro, avente due facce rispettivamente uguali a $\frac{\widehat{nn'}}{2}$, $\widehat{rn}$ e il diedro compreso uguale a B, risulta :

$$\cos \frac{\widehat{nn'}}{2} \cdot \sin \widehat{rn} \cdot \cos B - \sin \frac{\widehat{nn'}}{2} \cdot \cos \widehat{rn} = -\cos b \cdot \cos C,$$

dove indichiamo con b la faccia opposta al diedro B, con C il diedro opposto alla faccia uguale a $\frac{\widehat{nn'}}{2}$. E se supponiamo, per un momento, che il punto P sia sulla normale n' , si potrà scrivere ancora :

$$\frac{\cos \widehat{rn} - \cos \widehat{r'n'}}{r} = - \frac{\sin \frac{\widehat{nn'}}{2}}{\frac{r'}{2}} \cdot \frac{\sin \widehat{rn'}}{\sin \widehat{r'n'}} \cdot \cos b \cdot \cos C.$$

In virtù dell'ipotesi 2^a fatta al § 8 sulla natura della superficie σ , si ha, indipendentemente dalla posizione del punto P' su σ ,

$$\left| \frac{\sin \frac{\widehat{nn'}}{2}}{\frac{r'}{2}} \right| < \alpha;$$

ed ancora, indicato con M il limite superiore (indipendente da ξ, η, ζ) dei valori assoluti della espressione :

$$\left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right\} X_{\sigma}$$

e fissate una quantità positiva τ inferiore all'unità e una quantità ε positiva e piccola ad arbitrio, si può scegliere, indipendentemente dalla posizione del punto P' su σ , un segmento δ tale che nella porzione σ' di σ , i cui punti distano da n' non più di δ , si abbia :

$$|\sin \widehat{r'n'}| \geq \tau, \quad \frac{\alpha M}{\tau} \int_{\sigma'} \frac{d\sigma}{r^3} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Di qui risulta intanto:

$$\left| \int_{\sigma} \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{r\bar{n}'} - \cos \widehat{r\bar{n}}}{r^2} X_{\sigma} d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left| \int_{\sigma'} \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r'}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{r'\bar{n}'} - \cos \widehat{r'\bar{n}}}{r'^2} X_{\sigma} d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dipendentemente poi dalla scelta di δ e indipendentemente dalla posizione di P' su σ , si può fissare un segmento δ' tale che per $\overline{PP'} < \delta'$ sia:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\sigma-\sigma'} \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{r\bar{n}'} - \cos \widehat{r\bar{n}}}{r^2} X_{\sigma} d\sigma - \right. \\ & \left. - \int_{\sigma-\sigma'} \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r'}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{r'\bar{n}'} - \cos \widehat{r'\bar{n}}}{r'^2} X_{\sigma} d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Si può dunque scrivere per P su n' e per $\overline{PP'} < \delta'$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\sigma} \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{r\bar{n}'} - \cos \widehat{r\bar{n}}}{r^2} X_{\sigma} d\sigma - \right. \\ & \left. - \int_{\sigma} \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r'}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{r'\bar{n}'} - \cos \widehat{r'\bar{n}}}{r'^2} X_{\sigma} d\sigma \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

In modo analogo si dimostra che, data una quantità positiva ε comunque piccola, si può trovare, indipendentemente dalla posizione di P' su σ , un segmento δ'' tale che, indicando con r'' i vettori che partono da un punto P'' qualsiasi di σ e con n'' la normale in P'' , si abbia, per tutti i punti P'' che distano da P' non più di δ'' ,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\sigma} \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r''}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{r''\bar{n}'} - \cos \widehat{r''\bar{n}}}{r''^2} X_{\sigma} d\sigma - \right. \\ & \left. - \int_{\sigma} \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r'}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{r'\bar{n}'} - \cos \widehat{r'\bar{n}}}{r'^2} X_{\sigma} d\sigma \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Questa formula e la precedente, unite al fatto che la quantità δ' può essere fissata indipendentemente dalla posizione di P' su σ , ci portano a concludere che si ha:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} & \lim_{P=P'} \int_{\sigma} \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r'}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{r'n'} - \cos \widehat{r'n}}{r'^3} X_{\sigma} d\sigma = \\ & = \int_{\sigma} \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r'}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{r'n'} - \cos \widehat{r'n}}{r'^3} X_{\sigma} d\sigma, \end{aligned} \right.$$

qualunque sia la direzione secondo cui il punto P si avvicina al punto P' di σ .

11. Osserviamo che l'espressione

$$\frac{2}{2+k} \frac{\delta}{\delta n'} \frac{1}{r'} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r'}{\partial x} \right)^2 \frac{\delta}{\delta n'} \frac{1}{r'} = \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r'}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{r'n'}}{r'^3}$$

si può ottenere dall'espressione $X'_{\sigma}(x, \beta; \alpha', \beta')$, data dalla prima delle (14), scambiando α e β rispettivamente con α' e β' ; sicchè la (19) può scriversi:

$$(19)' \quad \lim_{P=P'} \int_{\sigma} (X'_{\sigma} + X'_{\sigma'}) X_{\sigma} d\sigma = \int_{\sigma} \{ X'_{\sigma}(x, \beta; \alpha', \beta') + X'_{\sigma}(\alpha', \beta'; x, \beta) \} X_{\sigma} d\sigma$$

Tenendo conto della (19)' e delle formole analoghe, che qui non scriviamo, risulta:

$$\lim_{P=P'} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma (X'_{\sigma} + X'_{\sigma'}) X_{\sigma} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \{ X'_{\sigma}(x, \beta; \alpha', \beta') + X'_{\sigma}(\alpha', \beta'; x, \beta) \} X_{\sigma} d\sigma,$$

$$\lim_{P=P'} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma (X''_{\sigma} + X''_{\sigma'}) X_{\sigma} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \{ X''_{\sigma}(x, \beta; \alpha', \beta') + X''_{\sigma}(\alpha', \beta'; x, \beta) \} X_{\sigma} d\sigma,$$

$$\lim_{P=P'} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma (X'''_{\sigma} + X'''_{\sigma'}) X_{\sigma} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \{ X'''_{\sigma}(x, \beta; \alpha', \beta') + X'''_{\sigma}(\alpha', \beta'; x, \beta) \} X_{\sigma} d\sigma,$$

qualunque sia la direzione secondo cui il punto P si avvicina al punto P' di σ ; ed allora, indicando con $X_{\sigma}(\alpha', \beta')$, $Y_{\sigma}(\alpha', \beta')$,

$Z'_\sigma(\alpha', \beta')$ i valori nel punto $P' \equiv (\alpha', \beta')$ delle funzioni X_σ , Y_σ , Z_σ , e ponendo :

$$U^{(1)}(\alpha', \beta')' = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) X_\sigma(\alpha, \beta) d\sigma,$$

$$V^{(1)}(\alpha', \beta')' = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) X_\sigma(\alpha, \beta) d\sigma,$$

$$W^{(1)}(\alpha', \beta')' = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) X_\sigma(\alpha, \beta) d\sigma,$$

in virtù delle formole (16), (16)' e delle (18)*, si avrà, se il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ si avvicina indefinitamente al punto $P'(\alpha', \beta')$ di σ in una direzione qualsiasi, mantenendosi però sempre nell'interno del campo finito S ,

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{P=P'} U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = -X_\sigma(\alpha', \beta') + U^{(1)}(\alpha', \beta')', \\ \lim_{P=P'} V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = -Y_\sigma(\alpha', \beta') + V^{(1)}(\alpha', \beta')', \\ \lim_{P=P'} W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = -Z_\sigma(\alpha', \beta') + W^{(1)}(\alpha', \beta')'; \end{array} \right.$$

se il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ si avvicina indefinitamente al punto $P' \equiv (\alpha', \beta')$ di σ in una direzione qualsiasi, mantenendosi però sempre nell'interno del campo infinito S' ,

$$(20)' \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{P=P'} U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = X_\sigma(\alpha', \beta') + U^{(1)}(\alpha', \beta')', \\ \lim_{P=P'} V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = Y_\sigma(\alpha', \beta') + V^{(1)}(\alpha', \beta')', \\ \lim_{P=P'} W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = Z_\sigma(\alpha', \beta') + W^{(1)}(\alpha', \beta')'. \end{array} \right.$$

In armonia alla interpretazione data alla fine del § 9 alle espressioni $U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)'$, $V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)'$, $W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)'$, le espressioni (20) si possono considerare come le componenti delle pseudo-tensioni nei punti di σ , corrispondenti alla deformazione, avente

per componenti le (17), di un mezzo elastico il quale occupa il campo finito S ; le espressioni (20)' si possono considerare come le componenti delle pseudo-tensioni nei punti di σ , corrispondenti alla deformazione, avente per componenti le (17), di un mezzo elastico il quale occupa il campo infinito S' .

Per $k=0$ le formole (20), (20)' si riducono rispettivamente alle note formole di discontinuità delle derivate normali degli strati:

$$(21) \quad \lim_{P \rightarrow P'} \frac{\partial}{\partial n'} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} \right\} = -X_{\sigma}(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X_{\sigma} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r'} d\sigma$$

per P variabile nel campo finito S ,

$$(21)' \quad \lim_{P \rightarrow P'} \frac{\partial}{\partial n'} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} \right\} = X_{\sigma}(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X_{\sigma} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r'} d\sigma$$

per P variabile nel campo infinito S' .