**5. Eine neue Form der Gesetze
der Lichtbewegung in absorbirenden Krystallen
und ihre Anwendung auf die Theorie der Total-
reflexion an durchsichtigen Krystallen;
von E. Ketteler.**

In meinen beiden letzten Abhandlungen¹⁾ glaube ich gezeigt zu haben, dass meine eigenen langjährigen Arbeiten auf dem Gebiete der Optik den Forderungen der heutigen electromagnetischen Lichttheorie ganz und voll genügen, und dass ihnen daher der Charakter einer zwar unbewussten, aber consequenten Durchführung Maxwell'scher Gedanken nicht abgesprochen werden kann.

In einem kurzen Nachtrag zur letzten Arbeit ist es dann noch möglich geworden, den Gesetzen der Fortpflanzung und Absorption des Lichtes in anisotropen Medien eine Gestalt zu geben, welche eine viel bequemere Anwendung gestattet als die früheren Formeln. Dieser Nachtrag soll im Folgenden erweitert, und sollen von den neuen Gleichungen einige Anwendungen mitgetheilt werden. Dahin gehört insbesondere der absorptionsähnliche Vorgang, welcher unter gewissen Umständen mit der Totalreflexion an durchsichtigen Krystallen verknüpft ist.

Endlich möchte ich Bedeutung und Inhalt der beiden Bedingungsgleichungen (5) und (6)²⁾ näher begründen und ihr gegenseitiges Verhältniss eingehend erörtern.

1) Ketteler, Wied. Ann. 55. p. 525 u. 540. 1895.

Berichtigung. Da die Hauptgleichungen (18) der absorbirenden Krystalle (p. 547) sich als eine verallgemeinerte Zusammenfassung der Gleichungssysteme (26) auf p. 535 und (34) auf p. 538 darstellen, so ist selbstverständlich in ersteren $\tan \theta$ durch den mehrdeutigen Factor:

$$\mathfrak{F}_e = \frac{\mathfrak{A}_e}{\mathfrak{A}}$$

zu ersetzen. Für Strahlwellen wird dann $\mathfrak{F}_e^* = \tan \theta$, dagegen für Normalwellen $\mathfrak{F}_e^* = \sin \theta$. Entsprechend tritt dann auch in Gleichungen (27) auf p. 548 und (27b) auf p. 552 $\sin \theta$ an die Stelle von $\tan \theta$.

2) 1. c. p. 528 u. 543.

2. *Die Fortpflanzung und Absorption des Lichtes in Krystallen von nur einer Molecülart.* Die allgemeinsten Gesetze derselben, so lange wenigstens die Krystalle allseitig von einem isotropen Medium umgeben sind, lassen sich folgendermaassen entwickeln.

Ausser den zusammengehörigen Grundgleichungen, wegen deren Bedeutung als solcher ich auf meine letzte Arbeit verweise, nämlich:

$$(1) \quad v^2 - \kappa^2 = 1 + pD, \quad 2v\kappa \cos r = qD,$$

sind daselbst die beiden weiteren Beziehungen aufgestellt worden:

$$(2) \quad \frac{u^2}{D_1 - D} + \frac{v^2}{D_2 - D} + \frac{w^2}{D_3 - D} = 0,$$

entsprechend der Strahlenfläche der durchsichtigen Medien, und:

$$(3) \quad \frac{n_1^2 u^2}{D_1 - D} + \frac{n_2^2 v^2}{D_2 - D} + \frac{n_3^2 w^2}{D_3 - D} = 0,$$

entsprechend der Normalenfläche dieser Medien. Darin haben die Hülfsco sinus u, v, w die Bedeutung:

$$(4) \quad u = \sqrt{\frac{v^2 u^2 + \kappa^2 u'^2}{v^2 + \kappa^2}}, \quad v = \sqrt{\frac{v^2 v^2 + \kappa^2 v'^2}{v^2 + \kappa^2}}, \quad w = \sqrt{\frac{v^2 w^2 + \kappa^2 w'^2}{v^2 + \kappa^2}}$$

und steht abkürzungsweise n^2 statt des Ausdruckes:

$$(5) \quad n^2 = \sqrt{(1 + pD)^2 + (qD)^2}.$$

In allen diesen Formeln ist v der Refractions- und κ der Extinctionscoefficient, p und q sind bekannte Functionen der Wellenlänge, der Wellenlänge des Absorptionsmaximums und der Reibungsconstante, und D ist eine von der Orientirung abhängige Variable. Die Fortpflanzungsrichtung ist durch die, auf die Krystallaxen bezogenen Cosinus u, v, w , die Extinctionsrichtung (Einfallslot) durch u', v', w' gegeben, und entspricht demnach der Brechungswinkel r dem Ausdruck:

$$(6) \quad \cos r = uu' + vv' + ww'.$$

Dies vorausgesetzt, lassen sich bei Einführung der Ausdrücke (4) in die Gleichungen (2) und (3) diese letzteren auf die Form bringen:

$$(7) \quad \begin{cases} v^2 \Phi + \kappa^2 \Psi = 0, \\ \Phi = \frac{u^2}{D_1 - D} + \frac{v^2}{D_2 - D} + \frac{w^2}{D_3 - D}, \quad \Psi = \frac{u'^2}{D_1 - D} + \frac{v'^2}{D_2 - D} + \frac{w'^2}{D_3 - D}, \end{cases}$$

sowie:

$$(8) \quad \begin{cases} v^2 X + \kappa^2 X' = 0, \\ X = \frac{n_1^2 u^2}{D_1 - D} + \frac{n_2^2 v^2}{D_2 - D} + \frac{n_3^2 w^2}{D_3 - D}, \quad X' = \frac{n_1^2 u'^2}{D_1 - D} + \frac{n_2^2 v'^2}{D_2 - D} + \frac{n_3^2 w'^2}{D_3 - D}. \end{cases}$$

Andererseits zieht man aus den Gleichungen (1) die Werthe:

$$(9) \quad \begin{cases} 2v^2 = \sqrt{(1 + pD)^2 + \left(\frac{q}{\cos r} D\right)^2} + (1 + pD) \\ 2\kappa^2 = \sqrt{(1 + pD)^2 + \left(\frac{q}{\cos r} D\right)^2} - (1 + pD). \end{cases}$$

Deren Substitution in (7) und (8) ergibt:

$$(I) \left[(1 + pD)^2 + \left(\frac{q}{\cos r} D\right)^2 \right] (\Phi + \Phi')^2 - (1 + pD)^2 (\Phi - \Phi')^2 = 0$$

$$(II) \left[(1 + pD)^2 + \left(\frac{q}{\cos r} D\right)^2 \right] (X + X')^2 - (1 + pD)^2 (X - X')^2 = 0.$$

Diese Gleichungen gestatten, die Variable D als Function von $p, q; u, v, w; u', v', w'$, d. h. für jede gegebene Farbe und jede gegebene Krystallrichtung bei jeder gegebenen Lothrichtung zu berechnen. Ist aber D bekannt, so geben die Gleichungen (9) die zugehörigen Werthe von v und κ .

Ich darf daher die Gleichungen (I) und (II) wohl zu den Hauptgleichungen der Krystalloptik zählen; die erstere bezieht sich auf die Strahlrichtung, die zweite auf die Normalrichtung.

3. Fortsetzung. Man kann übrigens vorstehenden Gleichungen durch Einführung eines sogenannten Einfallswinkels i eine nicht unwesentlich verschiedene Form geben. Setzt man nämlich in Gleichungen (1):

$$v \cos r = \mu, \quad v \sin r = n_0 \sin i, \quad \mu = \sqrt{v^2 - n_0^2 \sin^2 i},$$

unter n_0 den Brechungsindex des umgebenden Mediums verstanden, so lassen sich dieselben schreiben:

$$\mu^2 - \kappa^2 = 1 + pD - n_0^2 \sin^2 i, \quad 2\mu\kappa = qD.$$

Daraus folgt dann:

$$(10) \quad \begin{cases} 2\mu^2 = \sqrt{(1 + pD - n_0^2 \sin^2 i)^2 + (qD)^2} + (1 + pD - n_0^2 \sin^2 i) \\ 2\kappa^2 = \sqrt{(1 + pD - n_0^2 \sin^2 i)^2 + (qD)^2} - (1 + pD - n_0^2 \sin^2 i) \\ 2v^2 = \sqrt{(1 + pD - n_0^2 \sin^2 i)^2 + (qD)^2} + (1 + pD + n_0^2 \sin^2 i). \end{cases}$$

Ist also vermöge Gleichungen (I) und (II) die Variable D bekannt, so berechnen sich mittels (10) die dem Einfallswinkel i entsprechenden Werthe von μ , κ , v .

Selbstverständlich kann man die beiden letzten dieser Ausdrücke auch in die Relationen (7) und (8) einführen, man erhält dann:

$$\begin{aligned} \text{(Ib)} \quad & \begin{cases} [(1 + pD - n_0^2 \sin^2 i)^2 + (qD)^2](\Phi + \Phi')^2 \\ \quad - [(1 + pD)(\Phi - \Phi') + n_0^2 \sin^2 i (\Phi + \Phi')]^2 = 0, \end{cases} \\ \text{(IIb)} \quad & \begin{cases} [(1 + pD - n_0^2 \sin^2 i)^2 + (qD)^2](X + X')^2 \\ \quad - [1 + pD)(X - X') + n_0^2 \sin^2 i (X + X')]^2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen erscheint sonach D zugleich als Function der inneren Attribute $p, q; u, v, w; u', v', w'$ und der beiden äusseren n_0, i . Man bedient sich derselben mit Vortheil nur für den speciellen Fall, dass in den Gleichungen (I) oder (II) der dort vorkommende Bruch die unbestimmte Form erhält:

$$\frac{q}{\cos r} = \frac{0}{0}.$$

Dieser Specialfall, welcher in der Theorie der Totalreflexion an durchsichtigen Krystallen zu charakteristischer Bedeutung gelangt, soll weiter unten ausführlicher besprochen werden.

Beschränkt man sich schliesslich auf einaxige Krystalle, setzt z. B. in allen obigen Formeln $D_3 = D_2$, $n_3 = n_2$, so vereinfachen sich zunächst die Gleichungen (7) und (8) auf die gemeinsame, schon im Nachtrag zu meiner letzten Arbeit mitgetheilte Form:

$$(11) \quad v^2(\alpha - \beta D) + \kappa^2(\alpha' - \beta' D) = 0,$$

in welcher die Coefficienten $\alpha, \beta; \alpha', \beta'$, je nachdem sie auf eine Strahlrichtung oder eine Normalrichtung bezogen werden, die Bedeutung haben ($v_s = v_n = 0$):

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha_s = D_2 u^2 + D_1 w^2, & \beta_s = 1, \\ \alpha'_s = D_2 u'^2 + D_1 w'^2, & \beta'_s = 1, \end{cases}$$

für erstere und:

$$(13) \quad \begin{cases} \alpha_n = n_1^2 D_2 u^2 + n_2^2 D_1 w^2, & \beta_n = n_1^2 u^2 + n_2^2 w^2, \\ \alpha'_n = n_1^2 D_2 u'^2 + n_2^2 D_1 w'^2, & \beta'_n = n_1^2 u'^2 + n_2^2 w'^2 \end{cases}$$

für letztere.

Unter Benutzung der Ausdrücke (9) erhält man jetzt statt Gleichungen (I) und (II) die beiden gemeinsame neue Form:

$$(III) \quad \begin{cases} \left[(1 + pD)^2 + \left(\frac{q}{\cos r} D \right)^2 \right] [(\alpha + \alpha') - (\beta + \beta') D]^2 \\ - (1 + pD)^2 [(\alpha - \alpha') - (\beta - \beta') D]^2 = 0. \end{cases}$$

Die Ausdrücke (10) dagegen liefern statt (Ib), (IIb) eine Gleichung, die in der einfacheren Gestalt:

$$(IV) \quad \begin{cases} \left[\sqrt{(1 + pD - n_0^2 \sin^2 i)^2 + (qD)^2} + n_0^2 \sin^2 i \right] [(\alpha + \alpha') - (\beta + \beta') D] \\ + (1 + pD) [(\alpha - \alpha') - (\beta - \beta') D] = 0 \end{cases}$$

weiterhin verwandt werden soll.

4. *Einige Anwendungen der Hauptgleichungen.* a) *Die Berechnung der Variablen D.* In aller Strenge erhält man dieselbe durch Auflösung der biquadratischen Gleichung (III). Es genügt indess bei mässig starker Absorption, Doppelbrechung und Refraction, sie in der Form:

$$(14) \quad \begin{cases} D^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta'} \right) D + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{Q^2}{4\beta\beta'} [(\alpha + \alpha') - (\beta + \beta') D]^2 = 0, \\ Q = \frac{qD}{[1 + pD] \cos r} \end{cases}$$

näherungsweise quadratisch aufzulösen. Den ersten Näherungswert erhält man dann für $Q_1 = 0$, den zweiten, dritten u. s. w. durch Einsetzen des vorhergehenden in das letzte Glied. In dieser Weise ergibt sich:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\alpha}{\beta}, \\ D_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta'} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha'}{\beta'} \right) \sqrt{1 - Q_2^2 \frac{\beta'}{\beta}}, \\ D_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta'} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha'}{\beta'} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{4} Q_2^2 \frac{\beta'}{\beta} \left[\left(\frac{\beta}{\beta'} - 1 \right) - \left(\frac{\beta}{\beta'} + 1 \right) \sqrt{1 - Q_2^2 \frac{\beta'}{\beta}} \right]^2} \dots, \end{aligned}$$

in welchen Ausdrücken zu setzen ist:

$$Q_2 = \frac{q\alpha}{(\beta + p\alpha) \cos r}.$$

Den diesen D entsprechenden Quotienten κ/ν findet man in erster Näherung $= 0$, dagegen in zweiter und dritter Näherung nahezu übereinstimmend:

$$\frac{\kappa}{\nu} = \frac{1}{2} Q_2.$$

Im Uebrigen verweise ich auf die im früheren Nachtrag gemachten Bemerkungen.

5. b) *Die Theorie der Totalreflexion. Vorläufiges zur Orientierung.* Neben der Totalreflexion der isotropen Medien, welche ich in meinem Buche einmal als selbständige Erscheinung p. 167—183 und sodann als einen der Metallreflexion untergeordneten Grenzfall p. 232—240 ziemlich erschöpfend behandelt habe, findet man daselbst neun Seiten (p. 364—373), welche sich mit der Totalreflexion an Krystallen beschäftigen. Diesen letzteren Entwicklungen sind dann später noch zwei weitere Abhandlungen gefolgt.¹⁾ Ich habe in denselben das Gesetz des Grenzwinkels und der Neigung der Grenzlinie (bei deren Beobachtung im Kohlrausch'schen Totalreflectometer) *zum ersten Mal* entwickelt und auch die Polarisations- und Intensitätsverhältnisse des gespiegelten und streifend gebrochenen Lichtes in den Kreis der Betrachtung hineingezogen. Letztere insbesondere konnten unter Anlehnung an den Begriff der Strahlwelle für das ganze Intervall zwischen der Incidenz des Grenzwinkels und der streifenden Incidenz verfolgt werden. Da bisher der Normalbegriff, welcher allerdings hier mehr als anderswo entbehrlich ist, noch nicht allseitig in die Untersuchung aufgenommen werden konnte, so soll jetzt dieses Versäumniss nachgeholt werden. Auch sollen die früher ad hoc gebrauchten speciellen Formeln durch die allgemeinen Gleichungen (IV) ersetzt werden. Ich beschränke mich indess der Einfachheit wegen wieder auf einaxige Krystalle.

Nach den von mir festgestellten Gesetzen ist eine Totalreflexion als abstracter Grenzfall nur möglich in ideell durchsichtigen Medien, d. h. in Medien, für welche die Reibungsconstante mindestens unendlich klein ist, und zwar muss der *in das Innere des Krystalles gebrochene Strahl* der Trennungsfläche beider aneinander grenzender Medien *parallel* sein. *Der Brechungswinkel der zugehörigen Normalen ist dagegen gleichgültig.* So haben wir die Bedingungen:

$$(15) \quad q = 0, \quad \cos r_s = 0, \quad \cos r_n \cong 0.$$

1) Ketteler, Wied. Ann. 28. p. 230 u. 520. 1886.

Nun gelten in durchsichtigen wie absorbirenden Krystallen die mittels passender Figur¹⁾ leicht ableitbaren allgemeinen Beziehungen:

$$(16) \quad \begin{cases} \cos r_s = \cos r_n \cos \vartheta - \sin r_n \sin \vartheta \cos \theta \\ \cos \vartheta = \cos r_s \cos r_n + \sin r_s \sin r_n \cos \psi, \end{cases}$$

und aus letzterer wird mittels Eliminirung von $\cos r_s$:

$$(16b) \quad \sin r_s \cos \psi = \sin r_n \cos \vartheta + \cos r_n \sin \vartheta \cos \theta.$$

In diesen Gleichungen bedeutet ϑ den Winkel zwischen Strahl und Normale, θ den Flächenwinkel zwischen Hauptschnitt (Ebene von Strahl und Normale) und Brechungsebene der Normalen (Ebene von Normale und Loth oder Einfallsebene), endlich ψ den Flächenwinkel zwischen Brechungsebene der Normalen und Brechungsebene des Strahles (Ebene von Strahl und Loth).

Fortan sollen die beiden Einfallswinkel i_s und i_n , von welchen der erstere in der Ebene von Loth und Strahl, der letztere in der Ebene von Loth und Normale liegt, durch besondere Bezeichnung unterschieden werden. Zu dem Ende möge gesetzt werden:

$$(17) \quad \begin{cases} v_s \sin r_s = n_0 \sin i, & v_n \sin r_n = n_0 \sin e. \\ \mu_s = v_s \cos r_s = \sqrt{v_s^2 - n_0^2 \sin^2 i}, & \mu_n = v_n \cos r_n = \sqrt{v_n^2 - n_0^2 \sin^2 e}. \end{cases}$$

Der Zusammenhang von i und e ergibt sich unter Beachtung der Beziehung:

$$(18) \quad v_s = v_n \cos \vartheta$$

durch Multiplication der ersten der Gleichungen (16), bez. der Gleichung (16b) mit $v_s v_n$, bez. v_s . Dieselben gehen dadurch über in:

$$(19) \quad n_0^2 \sin i \sin e \cos \psi = v_s^2 - v_s \cos r_s v_n \cos r_n$$

$$(20) \quad n_0 \sin i \cos \psi = n_0 \sin e \cos^2 \vartheta + v_n \cos r_n \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \theta;$$

und mag es dahingestellt bleiben, ob letztere Beziehungen etwa für absorbirende Medien einer allgemeinen Verwendung fähig sind.

1) Vgl. z. B. die Figur im letzteitirten Aufsatz.

In alle diese Gleichungen führen wir jetzt, dem speciellen Vorgang bei der Totalreflexion entsprechend, die Bedingung ein:

$$(15b) \quad \mu_s = \nu_s \cos r_s = \nu_s (u_s u' + w_s w') = 0,$$

sofern nämlich die X - und Z -Axe des Coordinatensystems in die Ebene des benutzten Hauptschnittes hineinfallen möge, wodurch dann $v = 0$ wird.

Aus den Gleichungen (16) erhält man sodann die einfache Verknüpfung von θ und ψ :

$$(21) \quad \sin \psi = \sin \vartheta \sin \theta,$$

und Gleichung (19) vereinfacht sich auf:

$$(22) \quad n_0^2 \sin i \sin e \cos \psi = \nu_s^2 = \nu_n^2 \cos^2 \vartheta.$$

Endlich liefert die erste der Gleichungen (16):

$$(23) \quad \cot r_n = \tan \vartheta \cos \theta,$$

und daraus folgt in Rücksicht auf die zweite der Gleichungen (17) für den Grenzwinkel e' das Gesetz:

$$(24) \quad \frac{n_0 \sin e'}{\sin [\arccot(\tan \vartheta \cos \theta)]} = \nu_n; {}^1)$$

oder kürzer wegen der dritten der Gleichungen (17):

$$(24b) \quad n_0 \sin i' = \nu_s.$$

Dem so besprochenen allgemeinen Falle²⁾ subsumiren sich die beiden folgenden Einzelfälle.

(1.) Der Hauptschnitt (Ebene von Strahl und Normale) fällt mit der Einfallsebene zusammen und steht senkrecht auf der Trennungsfläche. Dann wird:

$$v_s = v_n = v' = 0, \quad u_s u' + w_s w' = 0.$$

1) Näherungsweise lässt sich dafür schreiben:

$$\frac{n_0 \sin e'}{\sin (90 - \vartheta \cos \theta)} = \nu_n.$$

2) Die Abhängigkeit des Grenzwinkels von der Orientirung der optischen Axe eines einaxigen Krystalles zur Einfallsebene wird dargestellt durch die Gleichung:

$$\sin^2 e' = \frac{n_1^2}{n_0^2} \frac{n_2^2 - (n_2^2 - n_1^2) \cos^2 \mu}{n_2^2 - (n_2^2 - n_1^2) (\cos^2 \mu + \sin^2 \mu \cos^2 \chi')}.$$

Darin bedeutet μ den Winkel zwischen Axe und Loth, und χ' den Flächenwinkel zwischen der Ebene von Axe und Loth und der Einfallsebene. Vgl. Ketteler, Wied. Ann. 28. p. 523. 1886.

Ferner hat man:

$$\theta = \begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ \end{cases}, \psi = 0, r_s = r_n \pm \vartheta = 90^\circ$$

und:

$$(24c) \quad n_0 \sin e' = v_s.$$

(2.) Der Hauptschnitt stehe senkrecht auf der Einfallsebene und falle zusammen mit der Trennungsebene. Dann ist:

$$v_s = v_n = 0; u' = w' = 0, v' = 1.$$

Ferner hat man:

$$\theta = 90^\circ, \psi = \vartheta, r_s = r_n = 90^\circ$$

und folglich gleichzeitig:

$$\mu_s = v_s \cos r_s = 0, \mu_n = v_n \cos r_n = 0.$$

Endlich erhält man für den Grenzwinkel:

$$(24d) \quad n_0 \sin e' = v_n.^1)$$

6. *Anwendung der Hauptgleichungen.* Nach dieser vorgängigen Skizzirung der obwaltenden Verhältnisse sollen jetzt die allgemeinen Gleichungen (III) und (IV) auf sie angewandt werden.

Besprechen wir indess zuvor die Lösung, wie sie durch die Coexistenz der vier Gleichungen (1) in der Form:

$$(25) \quad \begin{cases} v_s^2 - \kappa^2 - 1 = pD_s, & v_n^2 - \kappa^2 - 1 = pD_n \\ 2v_s \kappa \cos r_s = qD_s, & 2v_n \kappa \cos r_n = qD_n \end{cases}$$

vorgezeichnet ist. Subtrahirt man die beiden oberen, so entsteht in Berücksichtigung von Gleichung (18) die Bedingung:

$$(26) \quad p(D_n - D_s) = v_n^2 \sin^2 \vartheta.$$

Bezüglich der beiden unteren bleibt die doppelte Möglichkeit, dass entweder $q > 0$ oder $q = 0$ ist.

Für $q > 0$ lassen sich beide zusammenfassen in:

$$\frac{D_s}{v_s \cos r_s} = \frac{D_n}{v_n \cos r_n}.$$

1) Auch für die besprochenen beiden Specialfälle ist eine Zeichnung, welche die bezügliche Huygens'sche Construction zur Anschauung bringt, nützlich und übersichtlich. Wenn z. B. im ersten Specialfall bei gegebener Lage der Huygens'schen Ellipse für einen Grenzwinkel $+e'$ der Normalwinkel $r_n < 90^\circ$ wird, erhält man für einen Grenzwinkel $-e'$ einen Normalwinkel $r_n > 90^\circ$.

Für $q = 0$ dagegen hat man die doppelte Lösung: es ist entweder *erstens* $\kappa = 0$, oder es ist *zweitens* $\cos r_s = \cos r_n = 0$.

Diese letztere Doppellösung haben wir jetzt näher in's Auge zu fassen. Wir wollen uns indess bei dieser Untersuchung nicht bloss auf die Incidenz des Grenzwinkels beschränken, sondern den Einfallswinkel e continuirlich von 0° bis 90° ansteigen lassen. Es sind dann das Intervall von der senkrechten Incidenz bis zum Grenzwinkel und das Intervall vom Grenzwinkel bis zur streifenden Incidenz gesondert zu behandeln.

7. *Allgemeiner Fall.* Schliessen wir in den allgemeinen Fall den ersten Specialfall ein und verweilen zunächst bei den *Normalwellen*.

a) Für das Intervall zwischen senkrechter Incidenz und der Incidenz des Grenzwinkels hat $\cos r_n$ in Gleichung III einen endlichen Werth, während $q = 0$ ist. Beide Seiten lassen sich daher ohne Weiteres radiciren und durch $(1 + p D_n)$ dividiren. Es erhalten folglich D_n und $v_n^2 - 1 = p D_n$ wegen $n^2 = n^2$ die für ein gegebenes u, v, w constanten Werthe:

$$(27) \quad D_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{n_1^2 D_1 u^2 + n_2^2 D_2 w^2}{n_1^2 u^2 + n_2^2 w^2}, \quad \frac{1}{v_n^2} = \frac{u^2}{n_2^2} + \frac{w^2}{n_1^2},$$

und Gleichungen (9) zufolge ist $\kappa = 0$.

Für dieses Intervall haben die Schwingungscomponenten (unter Beschränkung auf die Aethertheilchen) die Form:

$$\xi_n = \mathfrak{A}_x \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_n (x \cos r_n + x \sin r_n)}{\lambda} \right) \dots$$

oder unter Zuziehung der Ausdrücke (17):

$$(28) \quad \xi_n = \mathfrak{A}_x \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sqrt{v_n^2 - n_0^2 \sin^2 e} + x n_0 \sin e}{\lambda} \right) \dots,$$

sofern sie auf ein durch Trennungsfläche und Loth gelegtes Coordinatensystem bezogen werden, dessen Z -Axe mit dem Loth zusammenfällt, und dessen X -Axe in der Einfallsebene liegt.

Den zugehörigen Werth des Grenzwinkels e' liefert Gleichung (24); für ihn tritt der „Strahl“ in die Trennungsfläche ein.

b) Für das Intervall zwischen der Incidenz des Grenzwinkels und der streifenden Incidenz ist eine weitere *Drehung*

der gebrochenen Wellebene nicht möglich, da ihr der Strahl nicht zu folgen vermag, wohl aber ist eine Aenderung der Geschwindigkeit möglich. Für den Grenzwinkel selbst lässt sich in Berücksichtigung von Gleichung (23) schreiben:

$$(28b) \quad \xi_n = \mathfrak{N}_x \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{(x \operatorname{tg} \vartheta \cos \theta + x) n_0 \sin e}{\lambda} \right) \dots,$$

und diese Ausdrücke werden ihre Gültigkeit bewahren, wenn e von e' bis 90° wächst. Da in denselben nur reelle Grössen vorkommen, so fehlt jede Ursache zu etwaiger Extinction.

Wenden wir uns nunmehr zu den *Strahlwellen*, so tritt zwar

a) für das Intervall zwischen senkrechter Incidenz und Grenzwinkel, diesen eingeschlossen, der Quotient $q/\cos r_s$ in Gleichung III in unbestimmter Form auf, indess nur scheinbar, sofern sich aus der dritten der Gleichungen (25) wegen $x = 0$ der bestimmte Werth $q/\cos r_s = 0$ ergibt.

Demgemäss erhält man ($v_s^2 - 1 = pD_s$):

$$(29) \quad D_s = \alpha_s = D_2 u^2 + D_1 w^2, \quad v_s^2 = n_2^2 u^2 + n_1^2 w^2.$$

Für dieses Intervall haben die Schwingungscomponenten der (Aethertheilchen der) Strahlwellen, wofern sie zunächst auf ein Coordinatensystem bezogen werden, dessen Z -Axe mit dem Loth, und dessen X^1 -Axe mit der Strahlrichtung zusammenfällt, die Form:

$$(30) \quad \xi_s = \mathfrak{N}_x \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sqrt{v_s^2 - n_0^2 \sin^2 i} + x^1 n_0 \sin i}{\lambda} \right) \dots$$

Den Werth des Grenzwinkels, für welchen der Strahl seinen grösstmöglichen Brechungswinkel 90° erreicht, liefert die dritte der Gleichungen (17), nämlich:

$$v_s \cos r_s = \sqrt{v_s^2 - n_0^2 \sin^2 i} = 0.$$

b) Für das Intervall zwischen Grenzwinkel und streifen-der Incidenz ist wieder nur mehr eine Aenderung der Geschwindigkeit möglich. Und so werden denn die für den Grenzwinkel geltenden Schwingungsausdrücke ihre Gültigkeit bewahren, wenn i von i' bis 90° anwächst. Es muss also vorstehende Gleichung für das ganze Intervall erfüllt bleiben, d. h. *das bis dahin feste Brechungsverhältniss v_s wird nunmehr vom Einfallswinkel abhängig*, entsprechend dem Gesetze:

$$(31) \quad v_s = n_0 \sin i.$$

Von besonderem Interesse ist nun für dieses zweite Intervall der Zusammenhang zwischen den einander entsprechenden Einfallswinkeln i und e . Denselben liefert die Combinirung der Gleichungen (22) und (31); man findet so:

$$(32) \quad \sin i = \sin e \cos \psi.$$

Und wenn jetzt die Strahlwellen auf dasselbe Coordinatensystem bezogen werden wie oben die Normalwellen, so bekommen dieselben wegen $x = x' \cos \psi$ die definitive Form:

$$(30b) \quad \xi_s = \mathfrak{A}_x \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x n_0 \sin e}{\lambda} \right) \dots$$

Diese Ausdrücke repräsentiren einen Schwingungszustand parallel einer auf Einfallsebene und Trennungsfläche senkrechten Ebene, welcher mit der Geschwindigkeit ω , für welche $1/\omega = n_0 \sin e$, in der Richtung der X -Axe fortwandert. Ein zweites System von Ebenen, die auf Normale und Trennungsfläche senkrecht stehen, gibt der oben behandelte Ausdruck (28b) für ξ_n . Da sich nun beide Schaaren von Ebenen (längs der Trennungsfläche) in lauter Geraden schneiden, so reduciren sich also hier die sonst zweidimensionalen gebrochenen Wellenebenen auf diese Schnittlinien selber.

Im Uebrigen stehen Strahl- und Normalgeschwindigkeit in dem festen Verhältnisse $1/\nu_n = (1/\nu_s) \cos \vartheta$. Sofern nun die entsprechenden Brechungsindices mit zunehmender Incidenz in gleichem Verhältnisse wachsen, so wird die Huygens'sche Construction auch innerhalb des ganzen zweiten Intervalles für jeden Einfallswinkel e bestehen bleiben, aber vom Grenzwinkel ab schrumpft das bis dahin constante Huygens'sche Ellipsoid, sich selber parallel bleibend, soweit zusammen, bis schliesslich für $e = 90^\circ$ der Radius vector ω_s den Extremwerth erhält; $1/\omega_s = n_0 \cos \psi$.

Setzt man schliesslich in allen bisherigen Formeln $\psi = 0$, so geht man damit zu demjenigen Specialfall über, für welchen der Hauptschnitt des Krystalles mit der Einfallsebene zusammenfällt.

8. *Zweiter Specialfall.* Da für denselben nach obiger Characterisirung neben $q = 0$ gleichzeitig:

$$\cos r_s = \cos r_n = 0$$

ist, so wird die Gleichung (III) für gewisse Einfallswinkel un-

anwendbar, und tritt hier vielmehr die zweite der im § 6 angedeuteten Lösungen ein, welche, wie sich zeigen wird, mit einem endlich grossen Extinctionsindex κ verknüpft ist. Wir werden daher zur Untersuchung dieses Falles die Hauptgleichung (IV) heranziehen, und zwar unterscheiden wir bezüglich derselben wieder ein doppeltes Intervall.

Für das Intervall zwischen senkrechter Incidenz und der Incidenz des Grenzwinkels ist das Vorzeichen des Wurzel-*ausdrucks positiv* zu nehmen. Der erste Factor reducirt sich daher wegen $q = 0$ auf $(1 + pD)$, und so erhält man sowohl für Normal- wie für Strahlwellen die früheren constanten Werthe D_n und D_s der Gleichungen (27) und (29) als auch hier gültig zurück.

Für das Intervall zwischen der Incidenz des Grenzwinkels und der streifenden Incidenz ist das Vorzeichen der Wurzel *negativ* zu nehmen. Die Gleichung geht dadurch über in:

$$[2n_0^2 \sin^2 i - (1 + pD)] [(\alpha + \alpha') - (\beta + \beta') D] \\ \mp (1 + pD) [(\alpha - \alpha') - (\beta - \beta') D] = 0$$

oder auch kürzer in:

$$(33) \quad n_0^2 \sin^2 i (\alpha - \beta D) + [n_0^2 \sin^2 i - (1 + pD)] (\alpha' - \beta' D) = 0.$$

Man ersieht daraus, dass die einer gegebenen Fortpflanzungsrichtung entsprechende Grösse D für dieses Intervall vom Einfallswinkel abhängig wird.

Identificirt man letztere Gleichung mit Gleichung (11), so ergibt sich die weitere Folgerung:

$$(34) \quad v^2 = n_0^2 \sin^2 i, \quad \kappa^2 = n_0^2 \sin^2 i - (1 + pD),$$

ganz in Uebereinstimmung mit den Ausdrücken (10), aus denen man sie unmittelbar hätte ableiten können. *Es variiren also für dieses Intervall Refractions- und Extinctionscoefficient gleichfalls mit dem Incidenzwinkel.*¹⁾

1) Es mag nützlich sein, anmerkungsweise anzuführen, dass der Gleichung (33) ausser der gleich zu besprechenden allgemeinen Lösung noch die beiden folgenden particulären Lösungen entsprechen. Entweder:

$$\alpha - \beta D = 0 \quad \text{und:} \quad n_0^2 \sin^2 i - (1 + pD) = 0$$

oder:

$$\alpha' - \beta' D = 0 \quad \text{und:} \quad n_0^2 \sin^2 i = 0.$$

Bis jetzt ist indess auf die der Strahl- bez. Normalrichtung zukommenden Einzelwerthe von $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'$; i noch keine Rücksicht genommen. Bei der Einführung derselben gemäss Ausdrücken (12) und (13) beachte man, dass wegen des rechten Winkels zwischen Propagation und Extinction (Gleichung 15b auf p. 63) geschrieben werden kann:

$$(35) \quad u'^2 = w^2, \quad w'^2 = u^2.$$

Beginnen wir diesmal mit den *Strahlwellen*, die ich schon früher l. c. behandelt habe. Für diese soll indess Gleichung (33) nicht in Beziehung auf D_s , sondern auf $x=1+pD_s$ aufgelöst werden. Man multiplicire dieselbe zu dem Ende mit p und setze abkürzungsweise:

$$(36) \quad \begin{cases} pD_1 = n_1^2 - 1, & pD_2 = n_2^2 - 1, & p\alpha' = N_s'^2 - 1, \\ & N_s'^2 = n_1^2 w'^2 + n_2^2 u'^2. \end{cases}$$

Alsdann erhält sie die Gestalt:

$$x^2 - (N_s'^2 + 2n_0^2 \sin^2 i)x + (n_1^2 + n_2^2)n_0^2 \sin^2 i = 0.$$

So kommt schliesslich:

$$(37) \quad \begin{cases} 1 + pD_s = \frac{1}{2}(N_s'^2 + 2n_0^2 \sin^2 i) \\ \quad + \sqrt{\frac{1}{4}(N_s'^2 + 2n_0^2 \sin^2 i)^2 - (n_1^2 + n_2^2)n_0^2 \sin^2 i}, \end{cases}$$

und darin ist der Wurzelausdruck positiv.

Nunmehr ergibt die zweite der Gleichungen (34) den zugehörigen Werth des Extinctionscoefficienten κ_s , und so repräsentiren denn die beiden folgenden Gleichungen:

$$(38) \quad \begin{cases} \nu_s^2 = n_0^2 \sin^2 i, \\ \kappa_s^2 = + \sqrt{\frac{1}{4}(N_s'^2 + 2n_0^2 \sin^2 i)^2 - (n_1^2 + n_2^2)n_0^2 \sin^2 i} - \frac{1}{2}N_s'^2 \end{cases}$$

die auf die Strahlwellen bezügliche vollständige Lösung des Problems; sie liefern den Refractions- und Extinctionscoefficienten für das ganze zweite Intervall. Um den Grenzwinkel selbst aus vorstehenden Ausdrücken zu berechnen, dazu genügt es, $\kappa_s = 0$ zu setzen. Man erhält dann die Bedingungsgleichung:

$$N_s'^2 + n_0^2 \sin^2 i - (n_1^2 + n_2^2) = 0,$$

und daraus:

$$(39) \quad n_0^2 \sin^2 i = n_1^2 w^2 + n_2^2 u^2 = \nu_s^2.$$

Auch jetzt noch drückt sich der Zusammenhang zwischen

i und e durch die frühere Beziehung (32) aus; nur ist darin wegen $\theta = 90^\circ$ der Flächenwinkel $\psi = \vartheta$ zu setzen. Sonach hat man diesmal:

$$(40) \quad \sin i = \sin e \cos \vartheta,$$

welcher Werth sich hier nicht bloss auf dem früheren Wege der Combination der Gleichungen (22) und (31), sondern auch mittels directer Benutzung der Gleichung (20) ergibt. — Die Gleichungen (34), (37), (38), (40) findet man bereits in meinem Buche entwickelt.

Was nun andererseits die *Normalwellen* betrifft, so führe man die Bestimmungsstücke derselben nach Ausdrücken (13) in Gleichung (33) ein und setze dabei zur Abkürzung:

$$(41) \quad \begin{cases} p D_1 = n_1^2 - 1, & p D_2 = n_2^2 - 1, & p \frac{\alpha'}{\beta'} = N_n'^2 - 1, \\ \frac{1}{N_n'^2} = \frac{u'^2}{n_1^2} + \frac{w'^2}{n_2^2}. \end{cases}$$

Dann erhält letztere die in Beziehung auf $x = 1 + p D_n$ aufzulösende Form:

$$x^2 - \left(\frac{n_1^2 n_2^2}{\beta'} + \frac{n_1^2 + n_2^2}{\beta'} n_0^2 \sin^2 e \right) x + \frac{2 n_1^2 n_2^2}{\beta'} n_0^2 \sin^2 e = 0.$$

Die Auflösung selber gibt:

$$(42) \quad \begin{cases} 1 + p D_n = \frac{1}{2} N_n'^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} \right) n_0^2 \sin^2 e \right] \right. \\ \left. + \sqrt{\left[1 + \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} \right) n_0^2 \sin^2 e \right]^2 - \frac{8 n_0^2 \sin^2 e}{N_n'^2}} \right\}. \end{cases}$$

Setzt man diesen Werth in die zweite der Gleichungen (34) ein, so liefert dieselbe den zu v_n gehörigen Extinctionsindex κ_n .

Für $\kappa_n = 0$ ergibt sich als Bedingung des Grenzwinkels:

$$(43) \quad \frac{1}{n_0^2 \sin^2 e'} = \frac{u^2}{n_1^2} + \frac{w^2}{n_2^2} = \frac{1}{n_n^2}.$$

Vergleicht man schliesslich für dieses zweite Intervall die zusammengehörigen Werthe von v_s und v_n , so fand sich:

$$v_s = n_0 \sin i = n_0 \sin e \cos \vartheta, \quad v_n = n_0 \sin e,$$

und daher:

$$(44) \quad v_s = v_n \cos \vartheta,$$

welch letzteres Verhältniss ja in der That bestehen muss.

Andererseits erhielt man für die beiderseitigen Extinctionscoefficienten:

$$(45) \quad \begin{cases} \kappa_s = \sqrt{n_0^2 \sin^2 e \cos^2 \vartheta - (1 + p D_s)} \\ \kappa_n = \sqrt{n_0^2 \sin^2 e - (1 + p D_n)}. \end{cases}$$

Ihre Gleichsetzung führt zur Bedingungsgleichung (26), die ihrerseits gleichfalls stets erfüllt ist. Es ist folglich:

$$(46) \quad \kappa_s = \kappa_n = \kappa.$$

Demnach reduciren sich für das zweite Intervall des in Rede stehenden Specialfalles die Schwingungsausdrücke für Strahl- und Normalwellen auf die identische Form:

$$(47) \quad \xi_s = \xi_n = \mathfrak{A}_x e^{-\frac{2\pi}{\lambda} \kappa z} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x n_0 \sin e}{\lambda} \right) - \chi_x \right], \dots,$$

sofern sie nämlich auf ein identisches Coordinatensystem bezogen werden.

Dieser Tripel repräsentirt eine Schwingungsbewegung längs eines Systems von geraden Linien, welche unter sich, der Trennungsfläche und der Strahlrichtung parallel sind. Dieselbe ist zugleich mit einem sich gleichmässig auf Aether- und Körpertheilchen erstreckenden und daher von der Orientirung abhängigen *absorptionsähnlichen Vorgang* verknüpft. Für die Incidenz des Grenzwinkels sind die Amplituden auf allen diesen Geraden von gleicher Grösse und die Schwingungen *linear*, für grössere Incidenzen nehmen dagegen die Amplituden mit zunehmender Entfernung von der Trennungsfläche ab, und die Schwingungen werden *elliptisch*.

Lässt man schliesslich den Winkel ϑ continuirlich abnehmen, so nähern sich Strahl und Normale immer mehr. Es gilt also auch für das isotrope Medium die Lösung des zweiten Specialfalles, die mit einem von Null verschiedenen Extinctionscoefficienten verbunden ist. Zu dem nämlichen isotropen Medium gelangt man beim Ausgehen vom allgemeinen Fall, sofern dann die Ausdrücke (28) und (30) beim Passiren des Grenzwinkels complexe Werthe erhalten.

9. *Schlussfolgerungen.* Aus sämmtlichen drei Abhandlungen, welche sich mit den gewöhnlich durchsichtigen, mit den absorbirenden und mit den totalreflectirenden anisotropen Medien

beschäftigten, ergab sich mit Nothwendigkeit der Schluss, *dass die beiden Bedingungsgleichungen:*

$$(A) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

oder in anderer Schreibart als Incompressibilitätsgleichung:

$$(a) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, ^1)$$

sowie:

$$(B) \quad n_1^2 \frac{\Delta X}{\Delta x} + n_2^2 \frac{\Delta Y}{\Delta y} + n_3^2 \frac{\Delta Z}{\Delta z} = 0,$$

oder in anderer Schreibart als Ausdruck des Huygens'schen Principis:

$$(b) \quad m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\Delta \xi}{\Delta x} + \frac{\Delta \eta}{\Delta y} + \frac{\Delta \zeta}{\Delta z} \right) - m' \left(\mathfrak{h}_1 \frac{\Delta \xi'}{\Delta x} + \mathfrak{h}_2 \frac{\Delta \eta'}{\Delta y} + \mathfrak{h}_3 \frac{\Delta \zeta'}{\Delta z} \right) = 0 ^2)$$

sich niemals widerstreiten, vielmehr stets miteinander verträglich sind und sich sogar gegenseitig ergänzen. Die erstere führte in Verbindung mit den Gleichungen (18) auf p. 547 zu den Attributen der Strahlrichtung, die letztere in Verbindung mit denselben Gleichungen zu denen der Normalrichtung. Auch liessen sich die Ausdrücke für die eine Richtung ohne Weiteres in die der anderen überführen. Gleichwohl konnte keine dieser beiden Bedingungen entbehrt werden, erst ihr Zusammenwirken ermöglichte die *vollständige* Lösung der bezüglichen Aufgaben.

Was nun das *correcte* Verhältniss der Gleichungen (a) und (b) betrifft, so sind darüber nur in der ersten Abhandlung einige Andeutungen gemacht worden. Diese sollen jetzt unter Wiederanknüpfung an durchsichtige Medien einigermassen vervollständigt werden. Wir integrieren Gleichung (a) mittels des Schwingungsausdruckes für Strahlwellen (Wellen von unendlich kleinem, nur die Aetherumgebung einer einzelnen Molecülreihe umfassenden Querschnitt):

$$\rho = \mathfrak{A}_e \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{n_s \delta_s}{\lambda} \right)$$

1) Vgl. Gl. (5) auf p. 528 u. 543. Die zweite der dort aufgeführten Gleichungen ist irrthümlich in die Arbeit hineingekommen und daher zu streichen. Vgl. Ketteler, Wied. Ann. **49**. p. 520. 1893.

2) Vgl. Gl. (6) auf p. 528 u. 543.

und erhalten so die Integralgleichung:

$$(a') \quad U_e u_s + V_e v_s + W_e w_s = 0.$$

Dagegen sind in Gleichung (b) die für beliebig ausgedehnte Wellen (Normalwellen) geltenden Ausdrücke zu substituieren:

$$\varrho' = \mathfrak{U}'_e \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{n_n \delta_n}{\lambda} \right)$$

für die Körpertheilchen und:

$$\varrho_n = \mathfrak{U}_e \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{n_n \delta_n}{\lambda} \right)$$

für die Aethertheilchen. In diesen letzten Ausdrücken ändern sich x , y , z sprungweise um Δx , Δy , Δz , sofern eben diese Incremente als Projectionen des Abstandes benachbarter Moleküle aufzufassen sind. Es ist daher auch die Bezeichnung in Gleichung (b) selber entsprechend gewählt.

So ergibt sich:

$$(b') \quad \left\{ \begin{array}{l} m \mathfrak{U}_e (U_e u_n + V_e v_n + W_e w_n) \frac{\partial^2 \sin \varphi}{\partial t^2} \\ - m' \mathfrak{U}'_e (\mathfrak{h}_1 U_e u_n + \mathfrak{h}_2 V_e v_n + \mathfrak{h}_3 W_e w_n) \sin \varphi = 0, \end{array} \right.$$

unter φ die Phase verstanden.

Man kann in gewissem Sinne die Schwingungen der Gleichungen (a) und (a') als freie, dagegen die Schwingungen des ersten Gliedes der Gleichungen (b) und (b') als erzwungene bezeichnen, sofern in ersteren die Nichtausdehnbarkeit des *stetigen* Aethers, in letzteren das Senkrechtstehen einer gegebenen *gemischten* Bewegungsquantität auf einer gewissen Richtung zum Ausdruck kommt. Es widersprechen daher auch Gleichungen (b) und (b') nicht dem Incompressibilitätsprincip, denn wenn die linke Seite der Gleichung (a') gleich Null ist, kann es unmöglich das erste Glied der auf eine andere Fortpflanzungsrichtung (die mit Schwingung und Strahl in gleicher Ebene liegende Normale) bezogenen Gleichung (b') sein. Erst wenn man in derselben $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_3$ setzt, kann der eingeklammerte Factor verschwinden, und werden dann die Richtungen u_n , v_n , w_n und u_s , v_s , w_s identisch.

Die hier vorgetragene Auffassung hat sich schon in einem früheren Aufsatz von mir vorbereitet.¹⁾ Dagegen gelangt

1) Ketteler, Wied. Ann. 49. p. 517. 1893.

neuerlich Hr. Drude¹⁾ zu einer anscheinend abweichenden Ansicht. Nach ihm soll „in Krystallen im allgemeinen nicht mehr die resultirende Strömung in Richtung der resultirenden Kraft fallen“ und daher soll „bei Krystallen *nicht mehr* wie bei isotropen Körpern die Gleichung (A), sondern *nur mehr die stets gültige* Gleichung (B) anwendbar sein“. Nun meine ich, wenn man in der Electricitätslehre niemals Anstand nimmt, den Stromröhren nach Bedürfniss einen endlich weiten oder unendlich engen Querschnitt zu geben, sollte man doch auch in der electromagnetischen Optik von den veralteten, jede Dispersion ausschliessenden Vorstellungen Fresnel's und Neumann's nicht länger ausgehen. Ich selbst habe übrigens schon 1873 den Begriff einer unendlich dünnen Lichtröhre (von Aether umgebenen Molecülreihe) auch für die analytische Behandlung gewisser Aberrationserscheinungen, also eines ziemlich heterogenen Gegenstandes, mit Erfolg verwerthen können.²⁾

Wie noch bemerkt werden mag, ist die hier mitgetheilte dritte Abhandlung gerade durch Hrn. Drude's Aeusserung veranlasst worden; sie stimmt freilich in ihren Resultaten mit den vorhergehenden überein.

Zusatz. Zur weiteren Erläuterung meiner Bedenken gegen die vorstehenden Sätze mögen zunächst die beiden folgenden Definitionen in grösstmöglicher Schärfe wiederholt werden.

Unter einer „Normalwelle“ oder „normalen Gesamtwelle“ verstehe ich eine (kleine) *ideelle* Ebene von endlicher Ausdehnung, welche an der Stirn eines Bündels sich fortpflanzender „Strahlen“ mit deren Geschwindigkeit vorrückt, und welche mit der Strahlrichtung irgendwelchen Winkel (ϑ) bildet.

Unter einer „Strahlwelle“ dagegen verstehe ich eine unendlich kleine *physische* Ebene senkrecht zum „Strahle“, welche sich mit der Geschwindigkeit des Strahles ebenfalls an dessen Stirn verschiebt.

1) Drude, Physik des Aethers. Stuttgart 1894. p. 505.

2) Ketteler, Astronomische Undulationstheorie. Bonn 1873. p. 182 u. 218 (Nr. 14).

Als minimale Flächenausdehnung der Normalwelle mag für irgend einen Punkt der sogenannten Elementarwellenfläche die Berührungsellipse der Krümmungskreise, als maximale Flächenausdehnung der Strahlwelle dagegen eine Ellipse betrachtet werden, deren Durchmesser ein kleines Vielfaches der Amplitude eines einzigen, elliptisch schwingenden Molecüls sind.

Nun ist offenbar die Fortpflanzung von unendlich kleinen Wellebenen um ein einziges, im Inneren eines Krystalles gelegenes, spontan bewegtes Molecül, von welchem dann solche Wellebenen nach allen Richtungen ausgehen werden, eine einfachere Erscheinung als die um beliebig viele Molecüle, welche sich in einem gewissen gemeinschaftlichen Schwingungszustande befinden; es ist also auch die Fortpflanzung von Strahlwellen an sich einfacher als die von Normalwellen.¹⁾ Nichtsdestoweniger hat die ältere Optik den umgekehrten Weg eingeschlagen und auch mit Nothwendigkeit einschlagen müssen, sofern sie mit einem homogenen anisotropen Aether operirte und auf das Mitschwingen der Molecüle, an welche eben der Begriff der Strahlwelle anknüpft, verzichten musste. Fresnel und Neumann kannten keine anderen Wellen als Normalwellen mit Schwingungen in der (als mathematische Ebene gedachten) Wellebene.²⁾

Als dann zunächst durch die Verdienste von Boussinesq und Sellmeier und sodann durch weitere Verfolgung der

1) Wohl jeder Docent wird sich der didaktischen Schwierigkeiten bewusst sein, welche die übliche Ableitung der Wellenfläche aus der Voraussetzung beliebig ausgedehnter ebener Wellen mit sich bringt. Oft wird wohl dabei auch die Frage vermieden, ob denn die Wellenfläche eine reelle physische Fläche oder eine bloss mathematische Abstraction ist.

2) Freilich hat 1876 schon Kirchhoff (Abhandl. der Berl. Akad. p. 55. — Vgl. auch Ketteler, Theor. Optik, p. 289), sich mit dem platten Umhüllungsverfahren nicht begnügend, die tiefere Wesenheit des Strahles durch eine geistreiche mechanische Betrachtung begründet. Ihm zufolge gelangt man zum Strahlbegriff mittels der Erwägung, dass der Erfahrung zufolge die Lichtbewegung auf der einen Seite einer Ebene bestehen kann, während auf der anderen Ruhe stattfindet, falls nämlich die Ebene dem Strahle parallel ist. Es muss also die Arbeit des Druckes, die auf die Elemente einer beliebigen, parallel dem Strahle genommenen Ebene von der einen Seite her ausgeübt wird, in jedem Augenblick verschwinden.

anormalen Dispersion die Berechtigung selbständiger Molecülschwingungen anerkannt wurde, erst da konnte die Frage aufgeworfen werden, ob denn auch die Molecüle parallel der sogenannten Wellebene oder in anderer Richtung ihre Schwingungen ausführen. Wird diese Frage in letzterem Sinne bejaht, so hört sofort die Wellebene auf, eine mathematische Ebene zu sein. Sofern nämlich selbst in durchsichtigen Medien die Aethertheilchen in der nächsten Umgebung der massigen Molecüle unmöglich geradlinige, sondern krummlinige Bahnen beschreiben, so ist es doch wahrscheinlich, wenn nicht sicher, dass ihre *mittlere* Schwingung geradlinig und der der Molecüle parallel ist. In *diesem* Sinn wird dann die Wellebene zu einem Aggregat unendlich vieler und unendlich kleiner Treppenflächen.

Das *Incompressibilitätsprincip* regulirt dann die Schwingungen jedes einzelnen Strahles für alle sich in dieser Richtung succedirende transversale Strahlwellen, und nichts steht im Wege, die allgemeinen Bewegungsgleichungen für diese Art der Fortpflanzung zu integrieren. Man erhält so direct die Geschwindigkeitsfläche der Strahlen.

Das *Huygens'sche Princip* endlich, welches verlangt, dass auch die gesammte von aussen zugeführte Bewegungsquantität sich nach Ebenen gleicher Phase anordne, vereinigt die einzelnen Strahlwellen zu einer gemeinsamen Normalwelle. Diese Bedingung muss natürlich, völlig unabhängig von der molecularen Constitution, von jedem wellenfähigen Medium erfüllt werden, besteht sie ja doch ausschliesslich in der Statuirung der Solidarität der Schwingungen aller einzelnen Elemente desselben.

Die mathematische Formulirung des Huygens'schen Principis kann daher eine doppelte sein. *Geometrisch* folgt aus der Huygens'schen Construction die ebenso allgemeine wie einfache Gleichung:

$$n_n = \frac{n_s}{\cos \vartheta} = \frac{\sin e}{\sin r_n},$$

welche, nicht an die Schwingungsrichtung geknüpft, für alle denkbaren anisotropen Medien bestehen muss. *Analytisch* führt

andererseits Gleichung (b) für die normale Gesamtwelle zu den gleichen Gesetzen der Fortpflanzung wie Gleichung (a), und so wird denn begreiflich, dass dieselbe eine *zweite* Bedingung ist, welcher die Bewegungsgleichungen zu genügen haben. Auf dem einen oder anderen dieser Wege gelangt man zur Geschwindigkeitsfläche der Wellennormalen.

Münster i. W., im Juli 1895.