Ueber eine Aufgabe der elementaren Arithmetik.

Von

PAUL WOLFSKEHL in Darmstadt.

Im Novemberhefte 1899 des *Intermédiaire des Mathématiciens* wird unter No. 1656 die Frage gestellt, welche Zahlen N die Eigenschaft besitzen, dass die $\varphi(N)$ Zahlen, die relativ prim zu N und $< N$ sind, sämtlich Primzahlen sind. Auf die Beantwortung dieser Frage bezieht sich das folgende.

1.

Wir denken uns alle Primzahlen der Grösse nach geordnet und durch $p_1, p_2, p_3, \dots$ bezeichnet, also $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ u. s. w. Nun sei p_i die kleinste Primzahl, die *nicht* in N aufgeht, dann ist p_i^2 die kleinste zusammengesetzte Zahl, die relativ prim zu N ist. Denn jede zusammengesetzte Zahl besteht mindestens aus zwei gleichen oder ungleichen Primfactoren, welche, da die Zahl zu N relativ prim sein soll, in N nicht aufgehen dürfen, also $\geq p_i$ sein müssen. Die Zahl wird also $\geq p_i^2$ sein.

Je nachdem nun $p_i^2 > N$ oder $< N$ ist, wird N die verlangte Eigenschaft besitzen oder nicht. Ist nämlich $p_i^2 > N$, so ist jede Zahl, die $< N$ und relativ prim zu N ist, eine Primzahl. Denn wäre sie zusammengesetzt, so würde dies dem obigen widersprechen, weil sie $< p_i^2$ ist, während dies doch die kleinste zu N relativ prime zusammengesetzte Zahl ist. Ist aber $p_i^2 < N$, dann hat schon deshalb N nicht die verlangte Eigenschaft, weil eben die zu N relativ prime und zusammengesetzte Zahl $p_i^2 < N$ ist.

2.

Tchebichef hat gezeigt*), dass wenn $a > \frac{7}{2}$ ist, immer zwischen a und $2a - 2$ mindestens eine Primzahl liegt. Also liegt erst recht zwischen

*) Journal de Mathématiques, T. XVII, Année 1852, p. 382.

p_i und $2p_i$ eine Primzahl, d. h. p_{i+1} ist $< 2p_i$. Hieraus folgt aber $p_{i+1}^2 < 4p_i^2$. Wenn also $4 < p_i$ ist, so ist

$$(1) \quad p_{i+1}^2 < p_i^3.$$

Angenommen nun, es sei

$$(2) \quad p_i^2 < p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{i-1},$$

so folgt hieraus $p_i^3 < p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{i-1} \cdot p_i$ oder mit Rücksicht auf (1)

$$p_{i+1}^2 < p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_i.$$

Wenn also die Ungleichheit (2) für irgend einen Werth p_i gilt, so gilt sie auch für jeden grössern. Da nun aber $11^2 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, so gilt die Ungleichheit (2) für jede Primzahl $p_i > 7$.

3.

Da p_i die kleinste in N nicht enthaltene Primzahl ist, so enthält N jede der Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \cdots p_{i-1}$ mindestens einmal. Es ist also $N \geq p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{i-1}$ und wenn $p_i > 7$ ist, nach dem unter No. 2 gesagten $N > p_i^2$. Wir haben somit das Resultat:

Ist die kleinste nicht in N aufgehende Primzahl > 7 , dann hat die Zahl N niemals die verlangte Eigenschaft.

4.

Um also die Zahlen N mit der verlangten Eigenschaft zu erhalten, haben wir nur die Werthe von $p_i = 2, 3, 5, 7$ zu berücksichtigen. Bei jedem dieser Werthe von p_i nehmen wir die Zahlen, welche $< p_i^2$ und durch alle Primzahlen, die $< p_i$ sind, theilbar sind. Diesen und nur diesen kommt die verlangte Eigenschaft zu. Es sind dies die Zahlen 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30.