Zu dem Aufsatz des Herrn Dr. Schultz in Nr. 3041-42.

Von Paul Harzer.

Ohne sonst auf den genannten Aufsatz eingehen zu wollen, bemerke ich, dass die dort angegebene Bewegung des Perihels falsch ist.

Bringt man die Störungfunction unter den dort gemachten Annahmen, aber ohne Vernachlässigung der Excentricität in die Form

$$\Omega = \frac{\beta a^2}{3r^3} (1 - 3\zeta^2) = \frac{\beta a^2}{3r^3} (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 (v - \sigma)) = \frac{\beta a^2}{3} \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

wobei ζ den Sinus der Declination bezeichnet, so wird mit Benutzung bekannter Bezeichnungen:

$$P = r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} = -\frac{\beta a^2}{r^2} (1 - 3\zeta^2); \quad Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)} \frac{\partial \Omega}{\partial v} = -\frac{\beta a^2}{a(1-\eta^2)r} \frac{d\zeta^2}{dv}$$

$$R = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)} \left[\frac{x}{r} \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial x} - z \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) + \frac{y}{r} \left(y \frac{\partial \Omega}{\partial x} - z \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) \right] = -\frac{2\beta a^2}{a(1-\eta^2)r} \zeta(1-\zeta^2)$$

und mit Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung in β werden die Differentialgleichungen für die $r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\rho}$ bestimmende Grösse ρ und für ζ die folgenden:

$$\frac{d\rho}{dv} = 2Q + \frac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2}; \quad \frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho = -P - r - Q \frac{d\rho}{dv} - 2 \frac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2} \frac{d\rho}{dv}; \quad \frac{d^2\zeta}{dv^2} + \zeta = R - Q \frac{d\zeta}{dv}.$$

Setzt man $\rho = \eta \cos(v - \varpi)$, $\zeta = x \sin(v - \sigma)$, $x = \sin i$, so sind zur Bestimmung der säcularen Bewegungen auf der rechten Seite der Gleichungen für ρ und ζ nur die Glieder von der Form $a \cos(v - A)$ mitzunehmen und es wird so ohne Vernachlässigung in Bezug auf die Excentricität und die Neigung:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + 2 \frac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2} \frac{d\rho}{dv} + \left(1 - \frac{2\beta(1-\frac{3}{2}x^2)}{(1-\eta^2)^2} \right) \rho = 0; \quad \frac{d^2\zeta}{dv^2} + \left(1 + \frac{2\beta(1-x^2)}{(1-\eta^2)^2} \right) \zeta = 0.$$

Die säcularen Aenderungen von ϖ und σ sind also mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von β

$$\frac{d\varpi}{dv} = \frac{\beta(1-\frac{3}{2}x^2)}{(1-\eta^2)^2}; \quad \frac{d\sigma}{dv} = -\frac{\beta(1-x^2)}{(1-\eta^2)^2}.$$

Für die Länge des Knotens θ und die Länge des Perihels $\pi = \varpi + \theta - \sigma$ erhält man also, da

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{1}{1-x^2} \frac{d\sigma}{dv} \text{ ist:}$$

$$\frac{d\pi}{dv} = \frac{\beta(1-8\sin^2 \frac{1}{2}i + 10\sin^4 \frac{1}{2}i)}{(1-\eta^2)^2}; \quad \frac{d\theta}{dv} = -\frac{\beta(1-2\sin^2 \frac{1}{2}i)}{(1-\eta^2)^2}.$$

Die vorstehenden Formeln stimmen mit den von Hansen (Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen I, p. 459 sqq.) abgeleiteten überein, wenn man beachtet, dass dort die Schiefe der Ekliptik gleich Null zu setzen ist und die Excentricität und die vierten und höheren Potenzen der Neigungen dort vernachlässigt sind.

Hansen's γ ist dann mit unserem $\frac{d\varpi}{dv}$ (nicht etwa mit $\frac{d\pi}{dv}$) und sein $-(\alpha + \eta)$ ist mit $\frac{d\theta}{dv}$ identisch.

Die von Herrn Dr. Schultz angegebene Knotenbewegung ist die richtige; dass aber die Perihelbewegung falsch ist, zeigt schon die Anwendung auf den Fall, dass i so klein ist, dass man auf die zweiten Potenzen keine Rücksicht zu nehmen braucht. Dann wird die von ihm angegebene Perihelbewegung in AR. identisch mit der in der Bahn und zwar gleich $\frac{1}{3}\beta$ in unserer Bezeichnungsweise, während sie in diesem Falle in Wirklichkeit 3 mal so gross ist.

Gotha 1891 Juni 13.

Paul Harzer.