V. Krystallberechnung im triklinen System

illustriert am Anorthit.

Von

L. Borgström und V. Goldschmidt in Heidelberg.

(Hierzu Taf. I und 13 Textfiguren.)

Die zweikreisige Krystallmessung mit Bestimmung der Positionswinkel φ, ρ der Flächen ist in mehreren Aufsätzen behandelt worden, die auch die Methode der Berechnung angeben.

Gdt.¹⁾: diese Zeitschr. 1893, 21, 240.

- kryst. Winkeltabellen 1897, 384.

Außerdem sind ausgeführte Beispiele und Schemata publiciert für:

das tetragonale System (Phosgenit) Gdt., diese Zeitschr. 1893, 21, 324,

- hexagonale - (Vanadinit) - - - 1900, 32, 569,

- monokline - (Lorandit) - - - 1898, 30, 294,

- (Colemanit) Eakle, Univ. Calif. Publ. 1902, 3, 42.

Vieles zu dieser Art der Krystallberechnung Nötige wurde bereits vor der zweikreisigen Messung publiciert, so:

Gdt.: Index d. Krystallf. 1886, 1. Einleitung.

- Üb. Projection u. graph. Krystallberechnung. Berlin 1887.

Im triklinen System ist die Krystallberechnung, speciell die Berechnung der Elemente, etwas complicierter, als in den anderen Systemen. Das hat folgende Gründe:

1. Es sind hier fünf unabhängige Elemente zu bestimmen, im monoklinen System nur drei, im rhombischen zwei, im tetragonalen und hexagonalen je ein Element und im regulären gar keins.

1) In dieser Schrift hat sich gerade in bezug auf das triklone System ein Fehler eingeschlichen, der in den Winkeltabellen S. 384 berichtigt wurde.

2. Die höheren Systeme geben durch die symmetrische Anordnung der gleichwertigen Flächen (Gesamtform) einen Ausgleich durch Bildung des Mittels, der dem triklinen System versagt ist. Denn hier bringt jede Fläche höchstens ihre Gegenfläche mit. Deshalb ist hier ein anderer Weg des Ausgleichs nötig, der etwas umständlicher ist, aber immer noch einfach.

3. Triklone Krystalle sind meist flächenarm. Man ist daher genötigt, alles Brauchbare vorsichtig und kritisch zusammen zu fassen, während man bei den höheren Systemen eine reichere Auswahl von Daten hat, aus denen ein Mittel gebildet werden kann.

4. Einen wesentlichen Anteil an der Berechnung nimmt die sorgfältige Einrichtung (Polarstellung) des Krystalls am Goniometer. Sie umschließt einen instrumentalen Ausgleich zur Bestimmung des Pols und damit aller Poldistanzen. Hierbei steht das triklone System hinter den anderen zurück, indem ihm die Ringe von Flächen gleicher Poldistanz fehlen, ebenso die Meridianzonen. Oft ist nur die Prismenzone für die Polarstellung zu brauchen. Manchmal läßt sich die an triklinen Krystallen häufige Zwillingsbildung zur Hilfe heranziehen.

Unter diesen erschwerenden Umständen bewährt die zweikreisige Messung ihre Überlegenheit über die einkreisige. Sie bietet die Möglichkeit, alles gut Ausgebildete zur Berechnung der Elemente heranzuziehen. Bei der einkreisigen Messung dagegen können infolge des complicierten und ungleichen Rechnungs- und Ausgleichsverfahrens stets nur wenige ausgewählte Stücke zur Elementberechnung benutzt werden.

Die Berechnung der Symbole, sowie die Discussion der Zwillingsbildungen hat im triklinen System ebensowenig Schwierigkeit, wie in den anderen Systemen. Sie geschieht graphisch im gnomonischen Bild.

Die Krystallberechnung besteht aus zwei Teilen:

1. graphische Berechnung,
2. arithmetische Berechnung.

Die graphische Berechnung geht jedes Mal voraus. Die Symbole der Flächen werden ausschließlich graphisch bestimmt, ausnahmsweise durch Rechnung controliert. Die Elemente werden ebenfalls graphisch bestimmt. Dieser graphischen Bestimmung wird durch die Berechnung in Zahlen eine höhere Feinheit gegeben, da wo dies nötig ist und es die Ausbildung des Krystalls gestattet.

Dieser letztere Teil der Krystallberechnung, die ausgespitzte Berechnung der Elemente, macht den wesentlichen Teil der vorliegenden Publication aus.

Bei vorzüglich ausgebildeten Krystallen wird durch Rechnung eine höhere Genauigkeit als auf graphischem Weg erzielt, so zwar, daß die dritte Decimale der Längenelemente $p_0 q_0$ gesichert ist und Schwankungen sich nur in der vierten Decimale zeigen. Dann stimmen auch die Winkel-

elemente $\lambda\mu\nu$ auf 1 Minute, während die graphische Bestimmung sie nur auf etwa 10' genau ergibt.

Bei mittelguter Ausbildung sind graphische Bestimmung und Zahlenberechnung etwa gleichwertig. Bei schlechter Ausbildung ist sogar die graphische Bestimmung unter Umständen die genauere, da sie einen vielseitigeren Ausgleich bei guter Übersicht gestattet. Immer hat sie den Vorzug, daß sie sehr rasch und leicht auszuführen und daß grobe Fehler, wie sie die Rechnung bringen kann, nicht eintreten.

Bestimmung der Positionswinkel $\varphi\varrho$. Bei dem rechnenden Verfahren hat man zunächst für jede Fläche die Positionswinkel $\varphi\varrho$ zu bestimmen. ϱ ist die Poldistanz der Fläche, d. h. die Neigung einer Fläche gegen eine andere, die senkrecht steht auf der Axe des Verticalkreises. Wir nennen sie die Polfläche. Der Polfläche entspricht (beim Reflectieren) am Horizontalkreis eine Ablesung h_0 . Für eine andere beliebige Fläche sei diese Ablesung h . Dann ist

$$\varrho = h - h_0.$$

φ ist der Meridianwinkel der Fläche, d. h. der Winkel des Meridians der Fläche mit dem Nullmeridian. Dem Nullmeridian entspreche am Verticalkreis die Ablesung v_0 , einer beliebigen Fläche die Ablesung v . Dann ist

$$\varphi = v - v_0.$$

In diesen Formeln für $\varphi\varrho$ haben h und v für jede Fläche andere Zahlen. $h_0 v_0$ dagegen sind für alle Flächen der ganzen Messung constant. Sie haben Einfluß auf sämtliche $\varphi\varrho$. Man muß daher auf ihre Bestimmung die größte Sorgfalt verwenden.

Bestimmung von h_0 . h_0 ist die Ablesung am Horizontalkreis (H) wenn die Polfläche reflectiert, d. h. eine Fläche parallel dem Verticalkreis (V).

Ausführung¹⁾. Man bringt eine gut spiegelnde Fläche durch Drehen von H und V zum Spiegeln und liest an H ab. Die Ablesung sei h_1 . Nun dreht man V um ca. 180° (Umschlagen) und stellt den Reflex derselben Fläche durch Drehen von H und geringes Drehen von V wieder ein. Die Ablesung sei jetzt h_2 . Dann ist:

$$h_0 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2).$$

Man gibt dann der Fläche eine andere Neigung und bestimmt h_0 aufs neue. Beide Bestimmungen dürfen nicht um 1 Minute differieren.

Wird Collimator gegen Fernrohr nicht verstellt, so ändert sich h_0 nicht. Es empfiehlt sich jedoch vor Beginn der Messung jedes neuen Krystalls,

1) Vgl. diese Zeitschr. 1893, 21, 215.

resp. bei Beginn der Messung an einem neuen Tag, zu prüfen, ob die Polstellung noch richtig ist.

Polarstellen des Krystalls¹⁾, das ist das orientierte Aufsetzen des Krystalls am Goniometer. Um bequem und gleichmäßig auf Grund der Messung rechnen zu können, justiert man den Krystall am Goniometer so, daß die Prismenkanten parallel sind der Axe des Vertikalkreises oder, was dasselbe ist, daß die Polfläche des Krystalls parallel ist der Ebene des Vertikalkreises. Diese Art des Polarstellens nennen wir die normale. Bei normalem Polarstellen haben alle Flächen der Prismenzone die Poldistanz $\varrho = 90^\circ$, die Ablesung am Horizontalkreis $= h_0 + 90^\circ$.

Um einen Krystall normal polarstellen zu können, muß man also wissen, welche Zone als Prismenzone anzusehen ist. Bei triklinen Krystallen kann jede Zone als Prismenzone gelten. Bei bekannten Krystallarten ist aber eine wichtige Zone durch Übereinkommen als Prismenzone gewählt. Wo die Wahl bei verschiedenen Autoren verschieden ist, wollen wir uns der Aufstellung unserer Winkeltabellen (Berlin 1897) anschließen. Bei bisher nicht beschriebenen Krystallarten steht die Wahl der Prismenzone frei. Man wählt dazu dann am besten die stärkst entwickelte Zone.

Aufsuchen der Prismenzone. Vormessung. Will man einen Krystall einer bekannten triklinen Krystallart (z. B. Anorthit) orientiert aufsetzen, so hat man in weitaus den meisten Fällen nach der Prismenzone polar zu stellen, wir wollen deshalb diesen Fall näher besprechen. Selten dienen andere Flächen zur Orientierung. Es gelingt aber oft nicht, die Formen aus dem Anblick allein richtig zu deuten und die Prismenzone zu erraten. Glaubt man, man habe die Prismenzone richtig erkannt, so stellt man nach ihr den Krystall polar und mißt ihn. Bei der Discussion im gnomonischen Bild zeigt es sich dann, ob man die richtige Stellung getroffen hat. Ist dies nicht der Fall, so ist diese Messung als vorläufige anzusehen, aus der in der Regel auf graphischem Weg, d. h. durch Ausmessen der Winkel im gnomonischen Bild²⁾, die richtige Orientierung gewonnen wird.

Kann man die Prismenzone nicht erraten, so ist es nicht gut, durch wiederholtes Raten und partielles Messen Zeit zu verlieren. Man verfährt dann folgendermaßen: Man setzt den Krystall am Goniometer so auf, daß eine Fläche, die im Kreuzpunkt einiger scheinbar wichtiger Zonen liegt, zur Polfläche wird und mißt durch. Diese Messung gibt die Winkel von Fläche zu Fläche in allen Zonen, denen die Polfläche angehört. Durch Vergleich dieser Winkel mit einer Winkeltabelle kann man die gemessenen Zonen identifizieren und die Prismenzone erkennen. In der Regel ist die Prismenzone eine der gemessenen Zonen. Ist das einmal nicht der Fall, so

1) Vgl. diese Zeitschr. 1893, 21, 215; 1895, 24, 610. Winkeltab. 1897, 385.

2) Vgl. Üb. Proj. u. graph. Kryst.-Ber. Berlin 1887, 44.

erhält man durch Eintragen ins gnomonische Bild genügende Kenntnis, um die Hauptzonen zu bestimmen und dem Krystall die normale Aufstellung zu geben. Dann folgt die definitive Messung.

Es kommt uns der Umstand zu statten, daß es bei triklinen Krystallen nur wenige wichtige Zonen gibt und daß diese bei den meisten Individuen entwickelt sind. Unter diesen ist in der Regel die wichtigste als Prismenzone ausgewählt, so daß man bei den meisten Krystallen erwarten darf, sie zu finden.

Von **Winkeltabellen**, die man zum Vergleich heranzieht, kommen zwei Arten in Anwendung:

1. Einkreisige, d. h. Tabellen der Winkel von Fläche zu Fläche.
2. Zweikreisige.

Erstere sind bequem, wo vorhanden. Über die Anwendung der letzteren sind einige Bemerkungen nötig¹⁾. Sie enthalten nicht nur die Positionswinkel $\varphi\varphi$ für jede Fläche, sondern auch die Hilfswinkel $\xi_0\eta_0\xi\eta$. Hierdurch ist eine große Zahl von Winkeln von Fläche zu Fläche gegeben; auch für das triklone System, mehr noch für die anderen. Wir haben die Winkel in allen Zonen durch 0∞ , nämlich:

1. Die Winkel der Prismenzone in Column φ .
2. Die Winkel aller Querparallelzonen in Column η .

Dies dürfte für unseren Fall fast jedesmal ausreichen. Denn wenn durch unsere für die Vormessung polargestellte Fläche die Prismenzone nicht gehen sollte, so geht durch sie höchstwahrscheinlich eine der Querparallelzonen. Eine derselben muß ja jedesmal hindurch gehen, es fragt sich nur, ob sie entwickelt ist.

Ist gerade 0∞ als Polfläche eingestellt, so liefert die Messung als Poldistanz alle φ der Prismenzone und alle η der Winkeltabelle zugleich. Kann man daher die Fläche 0∞ als solche erkennen (z. B. als Spaltfläche), so empfiehlt es sich, bei der Vormessung nach dieser polar zu stellen. Ja es kann diese Polstellung als die definitive beibehalten werden; denn wir besitzen für diese Aufstellung die Winkel $\varphi''\varphi''$ sowie alle Hilfswinkel $\xi_0''\eta_0''\xi''\eta''$ in unserer Winkeltabelle; können sie vielmehr aus dieser durch eine einfache Subtraction anschreiben. Es ist nämlich¹⁾:

1) Vgl. G. d. t. Winkeltabellen 1897.

Fig. 4.

$$\begin{array}{lll} \varphi'' = 90 - \xi_0 & \xi_0'' = 90 - \eta & \xi'' = 90 - \varrho \\ \varrho'' = 90 - \eta & \eta_0'' = \varphi & \eta'' = \xi. \end{array}$$

Es empfiehlt sich für jeden triklinen Krystall, über den man arbeitet, eine solche Tabelle auszurechnen. Das ist eine kleine Arbeit.

Die definitive Durchführung der Messung mit 0∞ als Polfläche empfiehlt sich besonders dann, wenn 0∞ gut ausgebildet, oder als Spaltfläche scharf herzustellen ist, die Prismenzone dagegen schlecht.

Das **Polarstellen des Krystalls** am Goniometer geschieht bei triklinen Krystallen fast immer nach der Prismenzone; ausnahmsweise nach nach 0∞ als Polfläche. Es muß mit der größten Sorgfalt geschehen unter Benutzung aller zur Verfügung stehenden Kennzeichen. Solche Kennzeichen sind: Verlauf der Reflexzüge, Kreuzen dieser Lichtzüge in einem Punkt, Erkennung nicht genau paralleler Krystallstücke, die auszuschalten sind u. a. Einige Übung und Erfahrung ermöglicht ein günstiges Polarstellen und hierin ein instrumentales Ausgleichsverfahren, das der zweikreisigen Messung eigenümlich und sehr wertvoll ist.

Wir wollen im folgenden neben der Ableitung ein **Beispiel** durchführen und wählen dazu einen gut ausgebildeten **Anorthit** vom Vesuv. Die Prismenzone ist gut ausgebildet. Sie sei erkannt oder durch Vor-messung gesichert, der Krystall nach der Prismenzone bestens polargestellt, die Messung durchgeführt und die Resultate der Messung in das Beobachtungsjournal eingetragen.

Tabelle I. (S. 69) gebe eine Abschrift aus dem Beobachtungsjournal. Darin seien jetzt die Columnen 1, 4, 5, 6 gefüllt, die Linien für die übrigen gezogen.

Vor der Messung wurde eine sorgfältige **Skizze** hergestellt. Am besten ein Kopfbild vom Aussehen von Fig. 4 Taf. I. Wenn nötig macht man noch mehrere Skizzen. In diesen Skizzen sind die Flächen willkürlich numeriert und die Nummern 1—18 in Col. 4 des Journals eingetragen. Im Projectionsbild (Taf. I Fig. 3) werden die gleichen Nummern den Flächenpunkten beigesetzt.

Die Polstellung des Instrumentes haben wir ausgemessen, d. h. den Wert h_0 gefunden (vgl. S. 65). Wir können daher die Werte $\varrho = h - h_0$ berechnen und damit Col. 8 füllen.

Es folgt nun die Herstellung des **gnomonischen Bildes**. Entweder aus den Winkeln $v\varrho$ (Col. 1, 5, 8) oder aus $\varphi\varrho$, wenn v_0 bereits bekannt und $\varphi = v = v_0$ berechnet ist (Col. 7). Das Auftragen geht besonders rasch und bequem mit Hilfe des gnomonischen Netzes¹⁾ und der Tangententabelle. Fig. 3 Taf. 1 zeigt das gnomonische Bild verkleinert. In der Zeichnung wählt man den Radius des Grundkreises = 5 cm.

¹⁾ Vgl. Jahrb. f. Min. 1903, Beil.-Bd. 17, 371.

Tabelle I.

 Beispiel: Anorthit vom Vesuv. Berechnung von $x^v y^v$; $x' y'$. $h_0 = 800$; $v_0 = 1160' 6''$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Nr.	Buchstab.	Symbol	Reflex	gemessen		$v = v_0$	$h = h_0$	$\log \sin v$ $\log \lg v$ $\log \cos v$	$\lg \sin v \lg v$ $\lg \cos v \lg v$	$x^v = \sin v \lg v$ $y^v = \cos v \lg v$	$\lg \sin \varphi$ $\lg \lg \varphi$ $\lg \cos \varphi$	$\lg \sin \varphi \lg \varphi$ $\lg \cos \varphi \lg \varphi$	$x' = \sin \varphi \lg \varphi$ $y' = \cos \varphi \lg \varphi$
1	M	00	ausgez.	1160 8'	1700 0'	00 2'	900 0'	.	.	.	.	.	.
2	f	003	>	145 35	170 0	29 29	90 0	.	.	.	.	.	.
3	l	8	>	174 9	170 0	58 3	90 0	.	.	.	.	.	.
4	T	000	gut	233 41	169 58	147 35	89 58	.	.	.	.	.	.
5	x	003	>	265 14	169 58	149 5	89 58	.	.	.	.	.	.
6	M	000	ausgez.	296 7	196 57	179 59	89 57	.	.	.	.	.	.
7	n	02	ausgez.	270 41	128 32	154 35	48 32	999997 005370 807650	005367 813020 1,4135	1,4135 0,0135 *	963266 005370 995579	968636 000949 995579	0,4857 1,0221 *
8	P	0	>	196 38	106 14	80 32	26 14	945674 969266 998144	914940 967410 0,4722	0,4441 0,4722 *	999404 969266 921610	968670 890876 921610	0,4862 0,0811 0,4853
9	e	02	>	138 23	132 0	22 17	52 0	982226 010719 987367	992945 998086 0,9569	0,8500 0,9569 *	957885 010719 996629	968604 007348 996629	0,4854 1,4844 *
10	r	06	gut	124 44	153 45	8 8	73 45	991738 053540 975017	045278 028557 1,9300	2,8365 1,9300 *	915069 053540 999561	968609 053101 999561	0,4854 3,9963 *
11	p	11	ausgez.	76 46	117 0	39 20	37 0	998831 987711 935968	986542 923679 0,1725	0,7335 0,1725 *	980197 987711 988844	967908 976555 988844	0,4776 0,5828 0,4766
12	o	1	>	338 36	115 12	137 30	35 12	956215 984845 996898	941060 981743 0,6568	0,2574 0,6568 *	982968 984845 986763	967813 971608 986763	0,4766 0,5201 0,4770
13	x	10	gut	29 48	105 33	86 18	25 33	969633 967947 993840	937580 961787 0,4148	0,2376 0,4148 *	999909 967947 880978	967856 848925 999909	0,4770 0,308 0,4770
14	q	30	schw.	42 59	89 16	73 7	9 16	983365 920691 986425	904056 907116 0,1178	0,0979 0,1178 *	×	×	×
15	y	20	ausgez.	25 23	135 12	90 43	55 12	963213 015800 995594	979013 014391 1,3000	0,6168 1,3000 *	999997 015800 809718	015797 825518 999997	1,4387 0,0180 1,4387
16	w	24	gut	82 46	149 5	33 20	69 5	999653 041771 910006	044424 951777 0,3294	2,5956 0,3294 *	973997 041771 992194	015768 033965 992194	1,4377 2,1860 1,4377
17	v	24	deutl.	329 2	149 15	147 4	69 15	971142 042151 993322	013292 035473 2,2633	1,3581 2,2633 *	×	×	×
18	t	20	schw.	201 21	147 34	85 15	67 34	956118 038421 996912	994539 035333 2,2559	0,8818 2,2559 *	×	×	×

× × Nur die als gut und ausgezeichnet bezeichneten Flächen wurden zur Elementbestimmung verwendet.

 * * Die Zeichen + — wurden aus den v resp. φ bestimmt. Im I. Quadr. ist xy ++, im II. + —, im III. — —, im IV. — +.

Im gnomonischen Bild kann man leicht und sicher das Krystallsystem erkennen¹⁾. Die Symbole der vorhandenen Formen bestimmen auch die Elemente, lassen sich darin ausmessen, teils direct, teils durch eine einfache Construction. So bekommt man die Längenelemente bei genügend guter Ausbildung $p_0 q_0$ auf zwei Decimalen richtig, die Winkелеlemente $\lambda \mu \nu$ auf etwa $10'$ richtig.

Graphische Bestimmung des Krystallsystems. Es sei das gnomonische Bild hergestellt Taf. I, Fig. 3, die Flächenpunkte eingetragen und mit den Nummern (1—18) des Beobachtungsjournals versehen. Als Maßeinheit sei, wie gewöhnlich, der Radius des Grundkreises $H = 5$ cm gewählt. Man zieht jetzt mit Lineal und Dreieck die Zonenlinien und vollzieht dabei einen **graphischen Ausgleich**. Man beachtet, daß die Punkte einer Zone auf einer Geraden liegen sollten, was sie je nach Güte der Ausbildung mehr oder minder genau tun, und prüft den Parallelismus der Zonen durch Verschieben des Dreiecks am Lineal. Bei höheren Systemen prüft man auch ob Zonenlinien auf einander senkrecht stehen, mit Hilfe des verschiebbaren Dreiecks. Im triklinen System gibt es solche Verbände nicht, außer bei einigen Zwillingen.

Der graphische Ausgleich soll mit möglichster Sorgfalt gemacht werden, unter Bevorzugung der guten Flächen vor den schlechten. Auch die Prismenrichtungen sollen dabei nicht vergessen werden. Bei einiger Übung und genügender Sorgfalt und Umsicht beim Ausgleich, sowie bei zarter Ausführung des Bildes, der Punkte und Linien kann eine große Genauigkeit in der graphischen Berechnung der Elemente erzielt werden. Ja sie kann bei schlechter Ausbildung des Krystalls die arithmetische Bestimmung der Elemente an Genauigkeit übertreffen.

Durch Construction mit dem doppelten Maßstab $H = 10$ cm kann unter Umständen die Genauigkeit erhöht werden, besonders, wenn die Flächen nahe beim Pol sind.

In unserem gnomonischen Bild (Taf. I, Fig. 3) bemerken wir folgendes: Keine Zonenlinie geht durch den Pol (S). Die möglichen Zählaxen stehen nicht senkrecht aufeinander; die Maßeinheiten $p_0 q_0$, mit denen man die Orte der Punkte in einfachen rationalen Zahlen bestimmen kann, sind verschieden unter sich und verschieden von der Einheit ($H = 5$ cm). Also:

$$p_0 \leq q_0 \leq 1; \quad \lambda \mu \nu \leq 90^\circ.$$

Das sind die Kennzeichen für das triklone System²⁾.

In unserem Fall haben wir eine bekannte Krystallart (Anorthit). Wir wählen daher die Zählaxen und Elemente im Anschluß an das Übliche, d. h. übereinstimmend mit der Winkeltabelle. Dazu haben wir uns im

1) Vgl. diese Zeitschr. 1899, **31**, 135; **32**, 49.

2) Vgl. diese Zeitschr. 1899, **31**, 135.

Projectionsbild zurecht zu finden. Das gelingt mit Hilfe der Anordnung der Punkte und der Poldistanzen (Col. 8).

Die Poldistanz $\varrho = 26^{\circ}14'$ (WT¹) = $26^{\circ}14'$ gibt Fläche Nr. 8 als schiefe Basis $P = 0$ zu erkennen. Ferner bezeichnen Anordnung und Poldistanz Fläche Nr. 7 als $n = 0\bar{2}$ (gemessen $\varrho = 48^{\circ}32'$; WT = $48^{\circ}33'$). Nr. 9 als $e = 02$ (gemessen $\varrho = 52^{\circ}00'$; WT = $52^{\circ}00'$). Weiter erkennen wir Nr. 13 als $x = 10$ (gemessen $\varrho = 25^{\circ}33'$; WT = $25^{\circ}34'$). Damit sind wir orientiert, die Zählaxen und Längeneinheiten p_0q_0 sowie der Anfang der Zählung $pq = 0$ sind festgesetzt.

Wir können jetzt durch Abzählen der Coordinaten für alle eingetragenen Flächenpunkte die Symbole anschreiben, auch für die Prismen. Für die Prismen brauchen wir im Symbol $\frac{p}{q}\infty = \infty\frac{q}{p} = p\infty : q\infty$ nur das Verhältnis $p:q$. Wir finden es folgendermaßen. Wir ziehen eine Zonenlinie $[10:0\infty]$ oder $[10:0\infty]$, wir nennen sie die Querzone 1. Dann verschieben wir die durch den Pol S gehende Richtungslinie des Prismas parallel durch den Coordinatenanfang $P = 0$. Sie schneide die Querzone 1 im Punkt $1q_1$ (z. B. $1\frac{3}{2}$), so ist für das Prisma $p:q = 1:q_1$, z. B. = $1:\frac{3}{2}$, das Symbol ist ∞q_1 , z. B. = $\infty\frac{3}{2}$.

Nachdem jeder Flächenpunkt sein Symbol erhalten hat, setzen wir dazu aus der Winkeltabelle den zugehörigen Buchstaben und übertragen dann Buchstabe und Symbol zu den entsprechenden Nummern des Beobachtungsjournals (Tabelle 1, Col. 2 und 3).

Ausmessung der Längenelemente p_0q_0 im gnomonischen Bild. Wir bezeichnen allgemein die Längenelemente mit p_0q_0 . Speziell für die Zwecke der Elementberechnung und für die Winkeltabellen wollen wir diesen Größen verschiedene Bezeichnung geben, je nach der Einheit, mit der sie ausgemessen sind. Die relativen Größen sind dabei dieselben, aber die Zahlen andere. Wir wollen schreiben:

$P_0Q_0R_0$ für $H = 5$ cm Abmessung im Projectionsbild,

$p_0'q_0'r_0'$ - $h = 1$ - reduziert auf den Radius des Grundkreises als Einheit,

p_0q_0 - $r_0 = 1$ - reduziert auf das Längenelement $r_0 = 1$.

Wir messen nun im gnomonischen Bild die Länge P_0Q_0 an möglichst vielen Stellen, indem wir die besten bevorzugen und nehmen das Mittel. Wir finden in unserem Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} Px = P_0 = 4,85 \text{ cm} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} Px \\ Py \\ rc \\ op \end{array}} \right\} & \text{Mittel: } P_0 = 4,853; \\ Py = 2P_0 = 9,71 & & \\ rc = 4Q_0 = 11,05 \text{ cm} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} rc \\ op \end{array}} \right\} & \text{Mittel: } Q_0 = 2,762. \\ op = 2Q_0 = 5,52 & & \end{array}$$

Daraus folgt:

$$p_0' = \frac{1}{5}P_0 = 0,970 \text{ (ber. = 0,9632); } q_0' = \frac{1}{5}Q_0 = 0,552 \text{ (ber. = 0,5545).}$$

1) WT bedeute hier und im folgenden: Gdt. Winkeltabellen 1897.

Um $p_0 q_0$ daraus zu berechnen, brauchen wir die Größe R_0 .

Graphische Bestimmung von R_0 . Im gnomonischen Bild (Fig. 3, Taf. I) sei S der Pol, P der Koordinatenanfang. Wir ziehen $Sm \perp SP$ bis zum Schnitt m mit dem Grundkreis; so ist $mP = R_0$. Mit Zirkel und Maßstab gemessen findet sich in unserem Bild:

$$R_0 = 5,64 \text{ cm.}$$

Nun können wir $p_0 q_0$ berechnen. Es ist:

$$p_0 = P_0 : R_0 = 4,853 : 5,64 = 0,865 \text{ (berechn.: } 0,8643),$$

$$q_0 = Q_0 : R_0 = 2,762 : 5,64 = 0,492 \text{ (berechn.: } 0,4949).$$

Graphische Bestimmung der Hilfselemente $x_0 y_0 h d \delta$ resp. $x'_0 y'_0 d'$ für $h = 1$. Sinn und Ausmessung dieser Hilfselemente ist aus Textfigur 2 ersichtlich.

Die Messung in unserem Anorthitbeispiel ergab:

$X_0 = 2,45 \text{ cm}$	daraus: $x'_0 = 0,49$ (ber.: 0,4851)	$x_0 = 0,44$ (ber.: 0,4353)
$Y_0 = 0,46 -$	$y'_0 = 0,08$ (ber.: 0,0840)	$y_0 = 0,07$ (ber.: 0,0727)
$R_0 = 5,64 -$		$r_0 = 1$
$H = 5 -$	$h = 1$	$h = 0,89$ (ber.: 0,8973)
$D = 2,51 -$		$\delta = 80^\circ 50'$ (ber.: $80^\circ 34'$)
		$d = 0,44$ (ber.: 0,4415).

Fig. 2.

Es empfiehlt sich die graphische Bestimmung auch der Hilfselemente auszuführen; wenigstens die von $x_0 y_0$, $x'_0 y'_0$ zur Controle für die Rechnung; selbst wenn man sie dann durch Rechnung bestimmt. Durch diese Controle werden oft Fehler gefunden.

Graphische Bestimmung der Winklelemente $\lambda \mu \nu$. Ausmessung eines Winkels im allgemeinen geschieht am besten auf folgende Weise: Man zieht um den Scheitel einen Bogen vom

Radius 10 cm, mißt die Sehne und sieht den zugehörigen Bogen in der Sehnentabelle nach. Ist der Winkel größer als 45° , so mißt man genauer den Complementwinkel aus, indem man im Scheitel auf einem der Schenkel eine Senkrechte errichtet.

$\angle \nu$ ist im Projectionsbild (Fig. 3 Taf. I) unmittelbar gegeben als $\angle tPo$ oder Pxp oder $180^\circ - \nu = Pxo$. Die Messung im gnomonischen Bild ergab:

$$\text{Sehne } (90^\circ - \nu) = 0,52 \text{ cm. Daraus: } 90^\circ - \nu = 3^\circ;$$

$$\nu = 87^\circ \text{ (ber.: } \nu = 87^\circ 1').$$

Graphische Bestimmung von $\angle \lambda \mu$. λ ist $= \angle (0 : 0 \infty) = \angle PM$.

Zur Auswertung von $\angle PM$ construirt man den Winkelpunkt der Zonenlinie PeM^1 . Er fällt nach W_1 in Taf. I, Fig. 3. Man zieht $W_1N_1 \parallel Pe$, so ist $\angle PW_1N_1 = \lambda$. Besser mißt man statt λ den Winkel $PW_1S = 90^\circ - \lambda$ aus.

Die graphische Bestimmung ergab:

Sehne $(90^\circ - \lambda) = 0,076$; $90^\circ - \lambda = 4^\circ 20'$; $\lambda = 85^\circ 40'$ (ber.: $85^\circ 50'$).

μ ist $= \angle (0 : \infty 0)$. Man construirt den Winkelpunkt der Zone xPt . Er fällt nach W_2 , zieht $W_2N_2 \parallel Pt$, so ist $\angle PW_2N_2 = \mu$. Statt μ kann man besser $\angle SW_2P = 90^\circ - \mu$ ausmessen.

Die graphische Bestimmung ergab:

Sehne $(90^\circ - \mu) = 0,458$; $90^\circ - \mu = 26^\circ 30'$; $\mu = 63^\circ 30'$ (ber.: $63^\circ 59'$).

Die graphische Bestimmung des Krystallsystems, der Elemente und Symbole geht rasch. Sie läßt sich nach Herstellung und Ausgleich des Projectionbildes in einer halben Stunde bequem durchführen.

Arithmetische Bestimmung der Elemente.

Die nächste Aufgabe ist die **Bestimmung von v_0** . Sie hat mit der größten Sorgfalt zu geschehen und zwar auf dem Weg der Rechnung. In allen Krystallsystemen, außer dem triklinen, gibt es bei normaler Aufstellung Meridiane von bekannter Orientierung (0° , 60° , 90° gegen den 0-Meridian) von der Eigenschaft, daß sie den Winkel zwischen je zwei zusammengehörigen Flächen halbieren. Man benutzt sie zur Berechnung des besten Mittelwertes für v_0 . Im triklinen System fehlt ein solches Hilfsmittel; doch kann man auch hier v_0 aus sämtlichen Messungen ableiten und zwar: aus 0∞ ; aus den Prismen und aus den Terminflächen.

v_0 aus 0∞ . Die Ablesung am Verticalkreis für 0∞ gibt direct einen Wert v_0 . Diese Bestimmung hat eine besondere Wichtigkeit dadurch, daß man mit Vorliebe eine besonders gute Fläche zum Pinakoid 0∞ wählt.

Bestimmung von v_0 aus den Prismen gelingt mit Hilfe der **Zonenformel**. Kennen wir in einer Zone die Winkel zwischen drei Flächen von bekanntem Symbol, so kann man den Winkel zu einer vierten derselben Zone berechnen, wenn deren Symbol bekannt ist.

Fig. 3.

Die Papierebene in Textfig. 3 sei die Zonenebene der Flächen p_1q_1 ,

1) Proj. u. graph. Kryst.-Ber. 4887, 44.

$p_2 q_2, p_3 q_3, p_4 q_4$. AB die gnomonische Zonenlinie. M der Krystallmittelpunkt, so sind $\delta \epsilon \zeta$ die Winkel zwischen den Flächen.

Man kann nun die Zonenformel, die diese Werte verknüpft, in folgender Form schreiben¹⁾:

$$\cotg(\epsilon + \zeta) = Q \cotg \epsilon - (1 - Q) \cotg \delta,$$

wobei:

$$Q = \frac{p_3 - p_2}{p_3 - p_1} \cdot \frac{p_4 - p_1}{p_4 - p_2} = \frac{q_3 - q_2}{q_3 - q_1} \cdot \frac{q_4 - q_1}{q_4 - q_2}.$$

Wir schreiben die Prismensymbole in zwei gleichwertigen Formen $\frac{p}{q} \infty = \infty \frac{q}{p}$. Z. B. $2 \infty = \infty \frac{1}{2}$; $\frac{2}{3} \infty = \infty \frac{3}{2}$. Wir wenden für unseren Zweck die Form $\infty \frac{q}{p}$ an oder, was dasselbe ist ∞q . Dann haben wir für die Prismenzone q in die Zonenformel einzusetzen.

Haben wir nun an unserem triklinen Krystall für drei Prismenflächen $\infty q_1, \infty q_2, \infty q_3$ die Position gemessen, d. h. die Werte v_1, v_2, v_3 abgelesen, so ist:

$$v_2 - v_1 = \delta; \quad v_3 - v_2 = \epsilon.$$

Die vierte Fläche sei 0∞ , d. h. die Fläche des 0-Meridians. Ihre Ablesung nennen wir v_0 und das ist die Größe, die wir berechnen wollen. Es ist also:

$$p_4 q_4 = 0 \infty; \quad q_4 = \infty; \quad v_0 - v_3 = \zeta; \quad v_0 - v_2 = \epsilon + \zeta.$$

Sind also $v_1 v_2 v_3$ durch Messung bekannt (Tabelle I, Col. 5), so haben wir $\delta \epsilon$, können $\epsilon + \zeta$ aus der Zonenformel berechnen und haben dadurch:

$$v_0 = v_2 + (\epsilon + \zeta).$$

Für diesen Fall, d. h. für $q_4 = \infty$, vereinfacht sich die Zonenformel. Denn es ist dann:

$$\frac{q_4 - q_1}{q_4 - q_2} = \frac{\infty - q_1}{\infty - q_2} = 1.$$

Dadurch wird in unserer Zonenformel:

$$\begin{aligned} \cotg(\epsilon + \zeta) &= Q \cotg \epsilon - (1 - Q) \cotg \delta, \\ \cotg(v_0 - v_2) &= Q \cotg(v_3 - v_2) - (1 - Q) \cotg(v_2 - v_1), \end{aligned}$$

worin:

$$Q = \frac{q_3 - q_2}{q_3 - q_1}.$$

Die Rechnung mit dieser Formel ist bequem; denn $q_1 q_2 q_3$, dadurch auch Q und $1 - Q$ sind einfache rationale Zahlen.

Durch Combination aus je drei Prismenflächen bekommt man auf

¹⁾ Vgl. Index 1886, 1, 113.

Tabelle II. Beispiel: Anorthit.

Berechnung von v für die Prismen der Zonen der Terminalflächen

$$\text{nach der Formel } \lg v = \frac{x_2^v - x_1^v}{y_2^v - y_1^v},$$

indem man alle Terminalflächen der Reihe nach zu je zwei combinirt.

Zone durch Nr.	$x_2^v - x_1^v$ $y_2^v - y_1^v$	log log	lg tg v	v	Zugehör. Prisma
7:8	0,9904 0,4857	999584 968637	030944	1160 8'	00
7:9	1,9845 0,9704	029699 998695	034004	116 6	00
7:10	3,9680 1,9435	059857 028859	030998	116 6	00
7:11	1,8650 0,1590	027068 920140	106928	85 8	003
7:12	0,8741 0,6433	994156 980844	013345	53 39	000
7:13	1,3694 0,4043	013643 960347	053296	73 40	002
7:15	1,7483 1,2865	024261 010944	043320	53 39	000
7:16	3,7271 0,3439	057149 049955	007194	85 9	003
8:9	0,9941 0,4847	999642 968547	031065	116 4	00
8:10	2,9776 1,4578	047386 016370	034046	116 5	00
8:11	0,8746 0,6447	994184 980936	013245	53 36	000
8:12	0,1163 1,1290	906558 005269	004289	174 7	00
8:13	0,3787 0,8870	957830 994792	963038	23 7	000
8:15	0,7579 1,7722	987961 025096	962865	23 2	000
8:16	2,7367 0,8046	043723 990396	953327	73 40	002
9:10	1,9865 0,9731	029809 998816	030993	116 6	00
9:11	0,1165 1,1294	906633 005285	004348	174 6	00
9:12	1,1074 1,6137	004431 020782	983649	145 32	003

Zone durch Nr.	$x_2^v - x_1^v$ $y_2^v - y_1^v$	log log	lg tg v	v	Zugehör. Prisma
9:13	0,6124 1,3717	978704 043727	064977	1550 56'	002
9:15	0,2332 2,2569	936773 035354	004422	174 6	00
9:16	1,7456 1,2863	024194 040934	013260	53 0	000
10:11	2,1030 2,1025	032284 032273	000044	135 0	005
10:12	3,0939 2,5868	049054 041277	007774	129 54	007
10:13	2,5989 2,3448	041480 037013	004467	132 4	006
10:15	2,2197 2,2300	034629 050920	983709	145 30	003
10:16	0,2409 2,2594	938484 035400	002784	173 55	00
11:12	0,9909 0,4843	999603 968514	031092	116 3	00
11:13	0,4959 0,2423	969539 933435	034104	116 3	00
11:15	0,1167 1,1275	906707 005242	004495	174 5	00
11:16	1,8624 0,1569	026200 919562	106638	85 6	003
12:13	0,4950 0,2420	969464 933382	034079	116 3	00
12:15	0,8742 0,6432	994161 980835	013326	53 39	000
12:16	2,8530 0,3274	045530 951508	094022	96 33	005
13:15	0,3792 0,8852	957887 994704	963483	23 9	000
13:16	2,3580 0,0854	036254 893146	143108	92 7	004
15:16	1,9788 0,9706	029644 998704	030937	116 8	00

Anm. Bei $x_2^v - x_1^v$; $y_2^v - y_1^v$, ebenso bei tg v ist das Vorzeichen zu beachten. Ist tg v +, so fällt v in den I. Quadranten (resp. III.); ist tg v —, so fällt v in den II. Quadranten (resp. IV.). Im letzteren Fall ist für den in der Logarithmentafel aufgeschlagenen Wert v das Supplement ($180^\circ - v$) zu setzen, z. B. 00 = $116^\circ 3'$, nicht $63^\circ 57'$.

Zusammenstellung der berechneten v -Werte der Prismen.

Symbol	0∞	$\infty 3$	∞	$\infty 0$	$\infty \infty$	$\infty \bar{2}$	$\infty \bar{3}$
$v =$	1160 8'	1450 32'	1740 7'	230 7'	530 39'	730 40'	850 8'
.	6	30	6	2	39	40	9
.	6	.	6	9	36	.	6
.	4	.	5	.	36	.	.
.	5	.	(173 55)	.	39	.	.
.	6	.	.	.	.	.	.
.	3	.	.	.	.	.	.
.	3	.	.	.	.	.	.
.	3	.	.	.	.	.	.
.	8	.	.	.	.	.	.
$v = \text{Mittel:}$	1160 5,2'	1450 34'	1740 5'	230 6'	530 38'	730 40'	850 8'
Zahl d. Mess.:	40	2	5	3	5	2	3

Wir stellen die Mittelwerte zusammen mit den für die Prismen direct gemessenen v -Werthen (Tab. I, Col. 5).

v gemessen:	1160 7,5'	1450 35'	1740 9'	.	530 44'	.	850 14'
Zahl d. Mess.:	2	1	1	.	1	.	1
Mittel aus *)	1160 6'	1450 32'	1740 6'	230 6'	530 38'	730 40'	850 9'
Mess. u. Rechn.							
Symbol	0∞	$\infty 3$	∞	$\infty 0$	$\infty \infty$	$\infty \bar{2}$	$\infty \bar{3}$
Buchstabe	M	f	l	h	T	ζ	$\varkappa$

* NB. Das Mittel ist gebildet mit Berücksichtigung der Zahl der Messungen. In der Nebeneinanderstellung der direct gemessenen Winkel mit den aus den Terminalflächen berechneten liegt eine wichtige Controle. Sie gibt uns zugleich ein Maß für die Genauigkeit der Bestimmung.

Die Werthe für $\infty \bar{4}$, $\infty \bar{5}$, $\infty \bar{6}$, $\infty \bar{7}$ wurden für die weitere Berechnung weggelassen, weil sie weniger sicher sind.

Die Berechnung von v_0 aus den v der Prismen geschieht nun aus den oben gefundenen Mittelwerten der v nach der S. 74 entwickelten Formel:

$$\cotg (v_0 - v_2) = Q \cotg (v_3 - v_2) - (1 - Q) \cotg (v_2 - v_1);$$

worin

$$Q = \frac{q_3 - q_2}{q_3 - q_1}.$$

Es sind dabei je drei Prismenwerte zusammenzunehmen. Man könnte von den Prismen unseres Anorthit $flhT\zeta\varkappa$ alle Combinationen zu je drei machen. Dies wäre mühsam, auch würden dabei nicht die besten Messungen bevorzugt. Besser ist so zu combinieren, daß die besten Werte vorzugsweise verwendet werden. In unserem Fall würden sich die Combinationen empfehlen:

$$\varkappa Tl \quad Thl \quad \zeta lf \quad \varkappa Tf.$$

Berechnung von v_0 aus den Prismen.

Schema und Ausrechnung.

Bechst.	Symb.	q_3	v_3	Q	$v_3 - v_2$	ctg	Q ctg	Diff. = ctg($v_0 - v_2$)
»	»	q_2	v_2	$1 - Q$	$v_2 - v_1$	ctg	$(1 - Q)$ ctg	$v_0 - v_2$
»	»	q_1	v_1					v_0
α	$\infty 3$	$\bar{3}$	265° 9'	$\frac{1}{2}$	34° 30'	4,6313	0,8156	0,5216
T	$\infty \infty$	$\bar{1}$	233° 38'	$\frac{1}{2}$	59° 32'	0,5881	0,2940	62° 27,2'
l	∞	$\bar{1}$	174° 6'					296° 5,7'
T	$\infty \infty$	$\bar{1}$	233° 38'	$\frac{1}{2}$	30° 32'	1,6949	0,8474	0,0545
h	$\infty 0$	0	203° 6'	$\frac{1}{2}$	29° 0'	1,8040	0,9020	93° 7,3'
l	∞	$\bar{1}$	174° 6'					296° 13,3'
ζ	$\infty 2$	$\bar{2}$	253° 40'	$\frac{2}{3}$	79° 34'	0,1841	0,1105	0,6242
l	∞	$\bar{1}$	174° 6'	$\frac{2}{3}$	28° 34'	1,8367	0,7347	121° 58,3'
f	$\infty 3$	3	145° 32'					296° 4,3'
α	$\infty 3$	$\bar{3}$	265° 9'	$\frac{1}{3}$	34° 30'	1,6314	0,5438	0,5218
T	$\infty \infty$	$\bar{1}$	233° 38'	$\frac{2}{3}$	88° 6'	0,0330	0,0220	62° 26,7'
f	$\infty 3$	3	145° 32'					296° 5,2'

Mittel:

$$v_0 = 296^\circ 5,7'$$

13,3

4,3

5,2

$$\text{Mittel } v = 296^\circ 7,1'$$

$$\text{oder} = 116^\circ 7,1'$$

NB. Bei dieser Rechnung ist Vorsicht nötig, daß man nicht durch Einführung eines ungenauen Winkels das Resultat verdirbt. Der Fehler kann sich durch die Rechnung wesentlich vergrößern.

Zum Zweck der Rechnung sorgt man dafür, daß alle Flächen im vorderen Halbkreis $0^\circ \cdot \infty 0 \cdot 0^\circ$ liegen und ersetzt, wo nötig, eine Fläche durch ihre Gegenfläche, indem man 180° addiert. Also:

$\leftarrow$	$\frac{M}{0^\circ}$	α	ζ	T	h	l	f	$\frac{M}{0^\circ}$	$\rightarrow$
	∞	$\infty 3$	$\infty 2$	$\infty \infty$	$\infty 0$	∞	$\infty 3$	∞	
$v = 296^\circ 6'$		265° 9'	253° 40'	233° 38'	203° 6'	174° 6'	145° 32'		116° 6'

v_0 Gesamtmittel: Wir haben nun v_0 auf drei Wegen gefunden und folgende Winkelwerte erhalten:

$0^\circ \cdot 0^\circ$ direct gemessen	$v_0 = 116^\circ 7,5'$ (2 Mess.)
Aus den Querparallelzonen (nach 0°)	$v_0 = 116^\circ 5,2'$ (10 -)
Aus den Prismen	$v_0 = 116^\circ 7,4'$ (4 -)
Gesamtmittel	$v_0 = 116^\circ 6'$ (16 -).

Dieser Wert $v_0 = 116^\circ 6'$ ist als der beste anzusehen und in die Rechnung einzuführen. Der Vergleich der verschiedenen Resultate zeigt, daß ein größerer Fehler als eine Minute ihm nicht anhaftet.

Berechnung von φ . Wir können jetzt in Tabelle I S. 69 die Werte $\varphi = v - v_0 = v - 116^\circ 6'$ ausrechnen (Col. 7). Wir tun das in der üblichen Weise, daß wir φ nicht größer werden lassen als $\pm 180^\circ$, indem wir für Werte von φ , die größer ausfallen als 180° , umgekehrt subtrahieren und — setzen. Denn es ist:

$$\varphi = v - v_0 = -(v_0 - v).$$

Jetzt sind in unseren Formeln bekannt: $x'y'$, außerdem durch graphische Bestimmung im gnomonischen Bild die Symbolzahlen pq (Tab. I, Col. 3).

Disposition. Wir berechnen zunächst:

aus Formel: $x' = x_0' + pp_0' \sin \nu$ die 2 Werte: x_0' und $p_0' \sin \nu$.
dann aus: $y' = y_0' + qq_0' + pp_0' \cos \nu$ die 3 Werte: $y_0'q_0'$ und $p_0' \cos \nu$.

Das sind fünf unabhängige Elemente, wie sie der triklone Krystall braucht. Haben wir diese fünf Größen durch ausgleichende Rechnung möglichst genau bestimmt, so sind die Elemente des Krystalls festgelegt. Es bleibt noch eine Umformung, wenn man es vorzieht, die Elemente in anderer Gestalt zu haben. Das ist in der Regel der Fall.

Umformung der Elemente. Wir erhalten die Elemente zunächst in der Form:

$$1. x_0' y_0' q_0'; p_0' \sin \nu; p_0' \cos \nu \quad \text{für } h = 1.$$

Diese formen wir zunächst um in:

$$2. x_0' y_0' p_0' q_0' \quad \nu \quad \text{für } h = 1 \text{ (Elemente der Projection).}$$

Wir können jetzt r_0 berechnen (S. 72, 79, 85) und darnach bilden:

$$3. x_0 y_0 p_0 q_0 \quad \nu \quad \text{für } r_0 = 1.$$

Ferner:

$$4. p_0 q_0 (r_0 = 1) \lambda \mu \nu, \text{ diese nennen wir vorzugsweise die Polarelemente.}$$

Statt deren bevorzugt man derzeit in der Regel die Linearelemente. Es entsteht deshalb oft noch die Aufgabe der Umformung in:

$$\text{oder } \begin{matrix} 5. a_0 b_0 c_0 = 1 & \alpha \beta \gamma \} \\ a : 1 : c & \alpha \beta \gamma \} \end{matrix} \text{ die Linearelemente.}$$

Wenn man auch mit den Linearelementen nicht mehr rechnet, so braucht man sie doch zum Vergleich mit den Publikationen.

Berechnung von x_0' und $p_0' \sin \nu$ aus den x' nach der Formel:

$$x' = x_0' + pp_0' \sin \nu.$$

Wir ordnen die Werte nach dem graphisch bestimmten Symbol (Tab. I, Col. 3) und fassen die mit gleichem p je zu einer Gruppe zusammen. Aus den schwankenden x' , die innerhalb jeder Gruppe gleich sein sollten, bilden wir die Mittelwerte. Die x' entnehmen wir aus Tab. I, Col. 14.

(Hierher gehört die Tabelle auf S. 84 oben.)

Wir haben jetzt so viele Bestimmungsgleichungen als Gruppen zur Berechnung der zwei Unbekannten x_0' und $p_0' \sin \nu$. Aus je zwei derselben lassen sich die Unbekannten berechnen. Solcher Gruppen gibt es immer nur wenige und man kann keine feste Regel geben, wie man sie paarweise zusammenfassen soll. Man macht das von Fall zu Fall passend in vernünftiger Weise, so daß das Beste am meisten verwendet wird.

Beispiel: Anorthit.

Journal-Nr.	Buchst.	Symb.	p	$x' = x_0' + p p_0' \sin \nu$	
7	n	02	0	0,4837	} Mittel: 0,4856 = x_0'
8	P	0	.	0,4862	
9	e	02	.	0,4833	
10	r	06	.	0,4853	
11	p	11	1	0,4776	} Mittel: 0,4774 = $x_0' - p_0' \sin \nu$
12	o	1	.	0,4766	
13	x	10	.	0,4770	
15	y	20	2	1,4387	} Mittel: 1,4382 = $x_0' - 2p_0' \sin \nu$
16	w	24	.	1,4377	

Die Zone $0q$ liefert unmittelbar:

$$x_0' = 0,4856.$$

Aus den beiden anderen Gleichungen berechnet sich:

$$x_0' = 0,4840.$$

Beide Bestimmungen sind nicht gleichwertig und es fragt sich, mit welchem Gewicht man sie einführen soll zur Bildung des Mittelwerts. Hierin liegt eine Willkür, die nicht zu vermeiden ist. Es dürfte den Verhältnissen entsprechen, den ersten Wert mit dem doppelten Gewicht einzuführen. So berechnet sich:

$$x_0' = \frac{1}{3}(2 \times 0,4856 + 0,4840) = 0,4851. \text{ (Aus 9 Werten.)}$$

Durch Einsetzen von x_0' ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} p_0' \sin \nu &= 0,4851 + 0,4776 = 0,9629 \\ &= 0,4851 + 0,4766 = 0,9617 \\ &= 0,4851 + 0,4770 = 0,9621 \\ &= \frac{1}{2}(0,4851 + 1,4387) = 0,9619 \\ &= \frac{1}{2}(0,4851 + 1,4387) = 0,9614 \end{aligned} \right\} \text{Mittel: } p_0' \sin \nu = 0,9619 \text{ (aus 5 Werten.)}$$

Berechnung von y_0' , q_0' , $p_0' \cos \nu$ aus den y' nach der Formel:

$$y' = y_0' + q q_0' + p p_0' \cos \nu.$$

Wir fassen wieder die Werte mit gleichem p zu je einer Gruppe zusammen:

Nr.	Buchst.	Symb.	$y' = y_0' + q q_0' + p p_0' \cos \nu$	y_0' eingesetzt	y_0' und q_0' eingesetzt
7	n	02	$1,0221 = y_0' + 2q_0'$	$1,1034 = -2q_0'$	—
8	P	0	$0,0811 = y_0'$	—	—
9	e	02	$1,1814 = y_0' + 2q_0'$	$1,1033 = 2q_0'$	—
10	r	06	$3,3963 = y_0' + 2q_0'$	$3,3152 = 6q_0'$	—
11	p	11	$0,5828 = y_0' + q_0' - p_0' \cos \nu$	$0,5047 = q_0' - p_0' \cos \nu$	$0,0497 = p_0' \cos \nu$
12	o	1	$0,5204 = y_0' - q_0' - p_0' \cos \nu$	$0,6044 = -q_0' - p_0' \cos \nu$	$0,0496 = p_0' \cos \nu$
13	x	10	$0,0308 = y_0' + 0 - p_0' \cos \nu$	$0,3502 = 0 - p_0' \cos \nu$	$0,0502 = p_0' \cos \nu$
15	y	20	$0,0180 = y_0' + 0 - 2p_0' \cos \nu$	$0,0990 = 0 - 2p_0' \cos \nu$	$0,0990 = 2p_0' \cos \nu$
16	w	24	$2,1860 = y_0' + 4q_0' - 2p_0' \cos \nu$	$2,1049 = 4q_0' - 2p_0' \cos \nu$	$0,1010 = 2p_0' \cos \nu$

y_0' kommt in jeder Gleichung vor. Es ist durch die meisten Werte und daher am zuverlässigsten bestimmt. Wir berechnen deshalb zuerst y_0' und setzen es in die Gleichungen ein. In den so erhaltenen Gleichungen ist q_0' durch die meisten Werte bestimmt. Wir berechnen jetzt q_0' und setzen es ein. Dadurch erhalten wir zuletzt $p_0' \cos \nu$.

Ausrechnung von y_0' :		Ausrechnung von q_0' :	
aus 8:	$y_0' = 0,0844$	aus 7:	$q_0' = 0,5546$
- 7, 9:	0,0844·	- 9:	0,5547
- 7, 10:	0,0825	- 10:	0,5525
- 9, 10:	0,0784·	- 11, 12:	0,5514·
- 13, 15:	0,0796	- 12, 16:	0,5512
- 11, 12, 16:	0,0835	- 11, 16:	0,5507
<hr/> Mittel: $y_0' = 0,0810$		<hr/> Mittel: $q_0' = 0,5515$	

Ausrechnung von $p_0' \cos \nu$:

aus 11:	$p_0' \cos \nu = 0,0497·$
- 12:	0,0496·
- 13:	0,0502
- 15:	0,0495
- 16:	0,0505
<hr/> Mittel: $p_0' \cos \nu = 0,0499$	

Jetzt haben wir für den Anorthit die fünf Elemente in der ersten Form:

$$\begin{array}{lll} x_0' = 0,4854 & q_0' = 0,5545 & p_0' \sin \nu = 0,9649 \\ y_0' = 0,0810 & & p_0' \cos \nu = 0,0499 \end{array}$$

Umformung der Elemente. Berechnung von p_0' und ν aus $p_0' \sin \nu$ und $p_0' \cos \nu$. Das ist sehr einfach. Es ist:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{p_0' \sin \nu}{p_0' \cos \nu} = \frac{0,9649}{0,0499} ; \quad \nu = 87^\circ 1,6'.$$

Dies eingesetzt

$$\begin{array}{l} \text{in } p_0' \sin \nu \text{ gibt: } p_0' \sin 87^\circ 1,6' = 0,9649 \\ \text{oder in } p_0' \cos \nu \quad : \quad p_0' \cos 87^\circ 1,6' = 0,0499 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{in } p_0' \sin \nu \text{ gibt: } p_0' \sin 87^\circ 1,6' = 0,9649 \\ \text{oder in } p_0' \cos \nu \quad : \quad p_0' \cos 87^\circ 1,6' = 0,0499 \end{array}} \right\} \text{woraus } p_0' = 0,9632.$$

Wir haben jetzt die Elemente in der zweiten Form:

$$\begin{array}{lll} p_0' = 0,9632 & x_0' = 0,4854 & \nu = 87^\circ 1,6' \\ q_0' = 0,5545 & y_0' = 0,0810 & \end{array}$$

Berechnung von $\frac{p_0}{q_0}$ und ν aus den Prismen. Aus Fig. 7 können wir ablesen:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p p_0 \sin \nu}{q q_0 + p p_0 \cos \nu},$$

das wir auch schreiben können:

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ctg} \varphi_1 &= \frac{q_1}{p_1} + B \\ A \operatorname{ctg} \varphi_2 &= \frac{q_2}{p_2} + B \end{aligned} \right\} \text{daraus folgt: } A = \frac{\frac{q_1}{p_1} - \frac{q_2}{p_2}}{\operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_2}.$$

Durch Einsetzen des Mittels der gefundenen Werte für A in die Gleichung:

$$B = A \operatorname{ctg} \varphi_1 - \frac{q_1}{p_1} = A \operatorname{ctg} \varphi_2 - \frac{q_2}{p_2} = \dots$$

erhalten wir die Werte für B und nehmen aus ihnen das Mittel;

$$\text{aus } A = \frac{p_0}{q_0} \sin \nu \quad \text{und} \quad B = \frac{p_0}{q_0} \cos \nu,$$

berechnet sich:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{A}{B} \quad \text{und durch Einsetzen von } \nu: \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{p_0'}{q_0'} = \frac{A}{\sin \nu} = \frac{B}{\cos \nu}.$$

Die Ausrechnung gestaltet sich praktisch einfacher als die Formeln vermuten lassen.

Schema und Beispiel. Anorthit.

1	2	3	4	5	6
Symb.	φ	$\frac{q}{p}$	$\operatorname{ctg} \varphi$	$\frac{\frac{q_1}{p_1} - \frac{q_2}{p_2}}{\operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_2} = A$	$A \operatorname{ctg} \varphi - \frac{q}{p} = B$
∞	58° 0'	1	0,6249	$\left. \begin{aligned} \frac{2}{1,4464} &= \frac{1}{0,5732} \\ - \frac{4}{2,2938} &= \frac{1}{0,5734} \\ \frac{6}{3,4399} &= \frac{1}{0,5733} \\ - \frac{3}{1,7200} &= \frac{1}{0,5733} \end{aligned} \right\}$	$\frac{0,6249}{0,5733} - 1 = \frac{0,0516}{0,5733}$
$\infty \infty$	44° 32'	$\frac{1}{2}$	0,5215		$\frac{0,5215}{0,5733} + 1 = \frac{0,0518}{0,5733}$
$\infty 3$	29° 26'	$\frac{3}{4}$	1,7723		$\frac{1,7723}{0,5733} - 3 = \frac{0,0524}{0,5733}$
$\infty \bar{3}$	44° 3'	$\frac{3}{2}$	1,6676		$\frac{1,6676}{0,5733} + 3 = \frac{0,0523}{0,5733}$
$\infty 0$	87° 0'	0	0,0524		$\frac{0,0524}{0,5733} - 0 = \frac{0,0524}{0,5733}$

$$\text{Aus Col. 5 ergibt sich als Mittel: } A = \frac{p_0}{q_0} \sin \nu = \frac{1}{0,5733}.$$

Dies eingesetzt gibt die Werte von Col. 6.

$$\text{Aus Col. 6 ergibt sich als Mittel: } B = \frac{p_0}{q_0} \cos \nu = \frac{0,0524}{0,5733}.$$

$$\text{daraus} \quad \frac{A}{B} = \operatorname{ctg} \nu = 0,0524; \quad \nu = 87^\circ 1'.$$

$$\text{Daraus ferner: } \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{0,5733 \cdot \sin 87^\circ 1'} = \frac{0,0524}{0,5733 \cos 87^\circ 1'} = 1,7467.$$

Ausgleich zwischen $pq\nu$ aus Terminalflächen und Prismen.

Wir fanden aus den Terminalflächen: $\nu = 87^\circ 4,6'$,
 aus den Prismen: $\nu = 87^\circ 4,0'$.

Die Übereinstimmung ist sehr gut. Wir setzen $\nu = 87^\circ 4,3'$ oder rund: $\nu = 87^\circ 1'$.

Ausgleich von p_0' und q_0' 1).

Aus den Terminalflächen fanden wir: $\frac{p_0'}{q_0'} = \frac{0,9632}{0,5515} = 1,7465$,

aus den Prismen: $\frac{p_0'}{q_0'} = \dots = 1,7467$.

Die Übereinstimmung ist so vollkommen, daß eine Correctur nicht nötig ist. Sie ist ein Zeichen großer Genauigkeit der Ausbildung, Messung und Rechnung. Ist die Übereinstimmung nicht so gut, so ist ein Ausgleich erforderlich. Er kann auf folgende Weise geschehen:

Hätten wir z. B. aus den Prismen erhalten: $p_0' : q_0' = 1,7455$, aus den Terminalflächen 1,7465 und legen wir beiden Bestimmungen gleiches Gewicht bei, so wäre der beste Mittelwert 1,7460. Nun müßten aber auch p_0' und q_0' in Übereinstimmung mit diesem Mittelwert gebracht werden. Sind p_0' und q_0' als gleich gut bestimmt anzusehen, so macht man die Correctur so, daß die Summe $p_0' + q_0'$ dieselbe bleibt und $p_0' : q_0'$ gleich dem gewünschten Mittel 1,7460 wird. Dann ist:

$$\begin{array}{l} p_0' + q_0' = 0,9632 + 0,5515 = 1,5147 \\ p_0' : q_0' = 1,7460 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} p_0' + q_0' = 0,9632 + 0,5515 = 1,5147 \\ p_0' : q_0' = 1,7460 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{woraus folgt: } p_0' = 0,9634 \\ \text{(corrigiert) } q_0' = 0,5516 \end{array}$$

Sind p_0' und q_0' nicht gleich gut, sondern eines z. B. p_0' gut, q_0' dagegen unsicher, so hält man das sichere fest und corrigiert das unsichere durch das ausgeglichene Verhältnis $p_0' : q_0'$.

Verschiedene Formen der Elemente. Die fünf unabhängigen Größen (Elemente), die einen triklinen Krystall definieren, können verschieden gewählt werden. Fünf solcher Formen wurden bereits oben S. 80 angegeben und die ersten beiden ausgerechnet. Es bleibt noch die Aufgabe, die übrigen drei Formen der Elemente auszurechnen. Nämlich:

$$\begin{array}{ll} 3. \ p_0 q_0 (r_0 = 1) x_0 y_0 \ \nu & \\ 4. \ p_0 q_0 (r_0 = 1) \ \lambda \mu \nu & \text{(Polarelemente)} \\ 5. \ a_0 b_0 (c_0 = 1) \ \alpha \beta \gamma & \\ \text{oder } a : 1 : c & \alpha \beta \gamma \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3. \ p_0 q_0 (r_0 = 1) x_0 y_0 \ \nu \\ 4. \ p_0 q_0 (r_0 = 1) \ \lambda \mu \nu \\ 5. \ a_0 b_0 (c_0 = 1) \ \alpha \beta \gamma \\ \text{oder } a : 1 : c \end{array}} \right\} \text{(Linearelemente)}.$$

Dies möge nun geschehen.

3. **Berechnung von $p_0 q_0 (r_0 = 1) x_0 y_0$ aus $p_0' q_0' x_0' y_0' (h = 1)$.** Sollen diese Längen statt durch h als Einheit durch r_0 als Einheit ausgemessen, d. h. dividiert werden, so heißt das, sie sollen mit $h : r_0$ multipliziert werden. Es ist aber, wie S. 79 gezeigt:

1) Vgl. diese Zeitschr. 1898, 30, 287.

$$\frac{h}{r_0} = \cos \varrho_0, \quad \text{wobei } \operatorname{tg} \varrho_0 = \frac{x_0'}{\sin \delta}; \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{x_0'}{y_0'}$$

oder

$$d' = \operatorname{tg} \varrho_0 = \sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Danach ist: } p_0 &= p_0' \cos \varrho_0 & x_0 &= x_0' \cos \varrho_0, \\ q_0 &= q_0' \cos \varrho_0 & y_0 &= y_0' \cos \varrho_0. \end{aligned}$$

Ausrechnung (Anorthit). Wir setzen die gefundenen Werte ein und erhalten:

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{x_0'}{y_0'} = \frac{0,4854}{0,0810}. \quad \text{Daraus } \delta = 80^\circ 34'.$$

(Gemessen für die Fläche $P = 0$: $\varphi = 80^\circ 32'$.)

$$\operatorname{tg} \varrho_0 = \frac{x_0'}{\sin \delta} = \frac{0,4854}{\sin 80^\circ 34'}. \quad \text{Daraus } \varrho_0 = 26^\circ 42'.$$

(Gemessen für die Fläche $P = 0$: $\varrho = 26^\circ 44'$.)

Diesen Wert ϱ_0 eingesetzt erhalten wir:

$$p_0 = p_0' \cos \varrho_0 = 0,9632 \cdot \cos 26^\circ 42' = 0,8643.$$

$$q_0 = q_0' \cos \varrho_0 = 0,5515 \cos 26^\circ 42' = 0,4949$$

$$x_0 = x_0' \cos \varrho_0 = 0,4854 \cos 26^\circ 42' = 0,4353$$

$$y_0 = y_0' \cos \varrho_0 = 0,0810 \cdot \cos 26^\circ 42' = 0,0727.$$

Fig. 8.

4. Berechnung der Polarelemente $p_0 q_0$ ($r_0 = 1$) $\lambda \mu \nu$. Von diesen haben wir $\lambda \mu$ auszurechnen¹⁾. Aus $\triangle A M O$, Fig. 8, ist ersichtlich:

$$\cos \lambda = \frac{y_0}{r_0} = y_0 \quad \text{für } r_0 = 1$$

$$= 0,0727 \quad (\text{Anorthit});$$

$$\lambda = 85^\circ 50'.$$

Es ist aber:

$$x_0 = y_0 \operatorname{tg} \delta = \cos \lambda \operatorname{tg} \delta.$$

Ferner ergibt sich aus den rechtseitigen sphärischen Dreiecken JEF und JEG (Fig. 8):

$$\left. \begin{aligned} \sin \varrho_0 &= \frac{\cos \lambda}{\cos \delta} \\ \sin \varrho_0 &= \frac{\cos \mu}{\cos (\nu - \delta)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\cos \mu}{\cos \lambda} &= \frac{\cos (\nu - \delta)}{\cos \delta} = \frac{\cos \nu \cos \delta + \sin \nu \sin \delta}{\cos \delta} \\ &= \cos \nu + \sin \nu \operatorname{tg} \delta, \end{aligned}$$

$$\cos \mu = \cos \lambda \cos \nu + \cos \lambda \sin \nu \operatorname{tg} \delta = y_0 \cos \nu + x_0 \sin \nu$$

$$= 0,0727 \cos 87^\circ 41' + 0,4353 \sin 87^\circ 41' = 0,4385$$

$$\mu = 63^\circ 59'. \quad (\text{Anorthit.})$$

¹⁾ Gdt. Index 1886, 1, 79.

5. Berechnung der Linearelemente aus den Polarelementen.

 Gegeben: $p_0 q_0$ ($r_0 = 1$) $\lambda \mu \nu$

 Gesucht: $a_0 b_0$ ($c_0 = 1$) $\alpha \beta \gamma$ oder: $a : 1 : c$ $\alpha \beta \gamma$.

 Die Fundamentalgleichung zwischen den linearen und polaren Elementen lautet¹⁾:

$$p_0 : q_0 : r_0 = \frac{\sin \lambda}{a_0} : \frac{\sin \mu}{b_0} : \frac{\sin \nu}{c_0},$$

woraus folgt:

$$\frac{p_0}{r_0} = \frac{\sin \lambda}{a_0} \cdot \frac{c_0}{\sin \nu}; \quad \frac{q_0}{r_0} = \frac{\sin \mu}{b_0} \cdot \frac{c_0}{\sin \nu}.$$

 Setzen wir jetzt: $r_0 = 1$ und $c_0 = 1$, so finden wir die Längenelemente $a_0 b_0$ nach den Formeln:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sin \lambda}{p_0 \sin \nu}; & b_0 &= \frac{\sin \mu}{q_0 \sin \nu} \\ &= \frac{\sin 85^\circ 50'}{0,8643 \sin 87^\circ 4'} = 1,1555 & &= \frac{\sin 63^\circ 59'}{0,4949 \sin 87^\circ 4'} = 1,8184. \end{aligned}$$

 Aus $a_0 : b_0 : c_0 = 1,1554 : 1,8184 : 1 = a : 1 : c$ folgt:
 $a : 1 : c = 0,6354 : 1 : 0,5500$

 In dem sphärischen Dreieck (Fig. 9) mit den Seiten $\lambda \mu \nu$ sind die Winkel $180^\circ - \alpha$; $180^\circ - \beta$; $180^\circ - \gamma$. Die Berechnung von $\alpha \beta \gamma$ und $\lambda \mu \nu$ ist also nichts anderes, als die Berechnung der Winkel eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks, von dem die Seiten gegeben sind. Am besten benutzt man hierbei das folgende Schema²⁾.

 Schema. Zur Berechnung von $\alpha \beta \gamma$ aus $\lambda \mu \nu$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	λ	$\sigma - \lambda$	$\lg \sin(\sigma - \lambda)$	24—34	$\lg \sin \lambda$	52+53	44—64	$\lg \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{71}{2}$	α
2	μ	$\sigma - \mu$	$\lg \sin(\sigma - \mu)$	24—32	$\lg \sin \mu$	54+53	42—62	$\lg \sin \frac{\beta}{2} = \frac{72}{2}$	β
3	ν	$\sigma - \nu$	$\lg \sin(\sigma - \nu)$	24—33	$\lg \sin \nu$	54+52	43—63	$\lg \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{73}{2}$	γ
4	σ	$\lg \sin \sigma$	$\sigma = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + \nu)$						

Zur Controle dient der Sinussatz:

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \sin \lambda : \sin \mu : \sin \nu.$$

1) Index 1, 8 ff.

2) Index 1, 84. Es ist hier mit einer kleinen Verkürzung und Umstellung wiedergegeben.

Beispiel. Anorthit.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	85° 50'	32° 35'	973124	967565	999885	995304	972264	986132	93° 43'
2	63 59	54 26	991033	985457	995360	999826	985634	992816	115 54
3	87 4	31 24	971685	966109	999941	995245	970864	985432	94 18
4	118 25	994424							

Zusammenstellung.

Elemente der Projection:

$$p_0' = 0,9632 \quad x_0' = 0,4854 \quad \nu = 87^\circ 4'$$

$$q_0' = 0,5515 \quad y_0' = 0,0810 \quad h = 1$$

Polarelemente:

Hilfselemente:

$$p_0 = 0,8643 \quad \lambda\mu\nu = 85^\circ 50'; 63^\circ 59'; 87^\circ 4' \quad x_0 = 0,4353 \quad \delta = 80^\circ 34'$$

$$q_0 = 0,4949 \quad r_0 = 1 \quad y_0 = 0,0727$$

Linearelemente:

$$a_0 = 1,1554 \quad \alpha\beta\gamma = 93^\circ 13'; 115^\circ 54'; 94^\circ 18'$$

$$b_0 = 1,8184 \quad c_0 = 1 \quad a : 1 : c = 0,6354 : 1 : 0,5500.$$

Berechnung der Winkeltabelle. Sind für eine Krystallart die Elemente neu oder für eine bekannte Krystallart wesentlich besser als bisher bestimmt, so empfiehlt sich die Ausrechnung einer Winkeltabelle für die bekannten Formen der Krystallart. Die für diese Berechnung erforderlichen Formeln, Schemas und Beispiele finden sich Gdt. Winkeltabellen 1897, S. 12 flgde.

Für **Aufstellung des Krystalls** schließt man sich bei einer bekannten Krystallart den Vorgängern an, wenn nicht ein wesentlicher Grund zur Änderung vorliegt. Finden sich in der Literatur mehrere Aufstellungen, so dürfte es sich bei Mineralien empfehlen, die in Gdt.s Winkeltabellen gegebene Aufstellung anzunehmen, da man hierfür die Winkel bereits berechnet und aus der Beobachtung vergleichbar vorfindet.

Für eine neue Krystallart ist die Wahl der Aufstellung frei. Am liebsten macht man da die flächenreichste und best ausgebildete Zone zur Prismenzone und sucht als Pinakoide $0 \cdot 0 \infty \cdot \infty 0$ drei gut entwickelte Flächen aus, die möglichst senkrecht auf einander stehen und von denen zwei der gewählten Prismenzone angehören. Der Krystall wird dann mit Vorliebe so aufgestellt, daß die Basis (0) nach vorn rechts abfällt. Auch wählt man gern $\lambda\mu\nu < 90^\circ$. Das ist nicht immer tunlich.

Obere und untere Krystallhälfte. Beim Vergleich der Messungen an mehreren Krystallen derselben Art hat man zu beachten, daß das obere und das untere Ende ungleiche Projectionsbilder liefern. Beide verhalten sich wie Bild und Spiegelbild. Die Poldistanzen ϱ sind die gleichen. Auch

die Winkel φ sind für die gleichen Formen die gleichen, sie folgen jedoch im Bild der unteren Krystallfläche im umgekehrten Sinn als in dem der oberen. Ebenso die Winkel ν . Auch die q und y zählen in umgekehrter Richtung. Fig. 10 und 11 zeigen die beiden Bilder.

Fig. 10.
Gnomonische Projection.
Oberes Ende.

Fig. 11.
Gnomonische Projection.
Unteres Ende.

Die Elemente fallen verschieden aus, wenn wir das untere Ende eines triklinen Krystalls zum oberen machen. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} 180^\circ - \mu & \text{ statt } \mu \\ 180^\circ - \nu & \text{ statt } \nu \\ -y_0 & \text{ statt } y_0. \end{aligned}$$

Auch die Symbole ändern sich. Wir erhalten:

$$p\bar{q} \text{ statt } pq.$$

Fig. 12 soll den Zusammenhang der beiden Bilder anschaulich machen. Sie zeigt die obere Projectionsebene (A) mit der man gewöhnlich arbeitet und die untere (B). Die Linien vom Krystallmittelpunkt M nach den Projectionspunkten in A sind die Flächennormalen. Nach unten verlängert bis zum Durchstich mit B geben sie die Projectionpunkte der Gegenflächen. Diese bilden ein Punktbild, das, von innen (oben) gesehen, dem oberen gleich ist.

Wir denken uns nun die Ebene B aus durchsichtigem Material bestehend, so daß man das Bild auf derselben auch von unten (außen)

betrachten kann. Dabei bleibt das Bild unverändert, es ändert sich nur der Ort des Beschauers. Von unten gesehen ist das Bild auf B das Projectionsbild des unteren Krystallendes.

Um bequem aus einem Projectionsbild das des anderen Endes mit den gleichen Formen zu construieren, sticht man die Punkte auf die Rückseite des Papiers durch oder man hält das Papier gegen das Licht, so daß es durchscheinend wird und zeichnet die Linien und Punkte auf die Rückseite des Papiers durch.

Der Gegensatz zwischen beiden Krystallenden ist speciell dem triklinen System eigentümlich. Er wird leicht übersehen, da man nicht oft mit triklinen Krystallen arbeitet. Er wurde besonders hervorgehoben, weil er erfahrungsgemäß zu Verlegenheiten führt, wenn er nicht beachtet wird; so beim Vergleich der Elemente und Symbole und bei Benutzung der Winkeltabelle. Hat man das untere Ende gemessen und denkt nicht an dieses Verhalten, so glaubt man andere Elemente, andere Winkel, andere Formen vor sich zu haben, vielleicht eine andere Krystallart.

Auch bei manchen Hemiédrien und Heminorphien höherer Krystallsysteme ist auf diesen Gegensatz Rücksicht zu nehmen.

Will man zur Krystallberechnung die oben und unten gemessenen Winkel eines beiderseits ausgebildeten Krystalls zugleich benutzen, so hat man für jedes Ende selbständig und mit gleicher Sorgfalt das v_0 zu bestimmen. Man rechnet mit dem unteren Ende wie mit dem oberen. Dabei kann man beide Enden getrennt behandeln oder vereinigen. Letzteres ist manchmal nötig, wenn der Krystall wenig Formen hat. Die Vereinigung geschieht, indem man statt der unteren Fläche ihre obere Gegenfläche einsetzt.

Fig. 13.

Man bildet zu diesem Zweck für die unteren Flächen:

$$\varphi = v_0 - v \text{ statt: } \varphi = v - v_0.$$

Dann kann man die Winkel φq beider Enden zum Zweck der Rechnung mischen.

Will man graphisch die unteren Flächen durch ihre Gegenflächen ersetzen, die Messungen des unteren Endes in das obere Projectionsbild bringen, so hat man die v und φ im umgekehrten Sinn des Uhrzeigers aufzutragen, resp. zu zählen.

Krystallberechnung für Messung mit $b = 0\infty$ als Pol. Hat man durch vorläufige Messung die Prismenzone ermittelt, so ist es in der Regel am

besten, nach dieser aufs Neue den Krystall polar zu stellen und durchzumessen. Will man das nicht, sondern zieht vor, mit $b = 0\infty$ als Polfläche zu messen, so kann man folgendermaßen rechnen:

Man legt den Meridian 0 durch b und die Primenzone. Dadurch erhält man den Wert v_0 . Aus den Ablesungen vh und der Polstellung des Instruments h_0 erhält man dann:

$$\varphi'' = v - v_0; \quad \varrho'' = h - h_0.$$

Hieraus berechnen sich die Coordinaten in normaler Projection:

$$x = \operatorname{ctg} \varphi''; \quad y = \frac{1}{\sin \varphi'' \operatorname{tg} \varrho''}; \quad \text{für } h = 1.$$

Von da ab ist die Berechnung wieder dieselbe.

Beweis. Es sind die Coordinaten eines Punktes pq in Aufstellung b

$$x'' = \sin \varphi'' \operatorname{tg} \varrho''; \quad y'' = \cos \varphi'' \operatorname{tg} \varrho''.$$

Soll nun normale Aufstellung sein, d. h.: $b = 0\infty$ werden, so hat man bei Vertauschung der rechtwinkligen Axen wie in W.T. S. 7 angegeben:

$$x'' y'' \uparrow (\text{Aufst. } b) \text{ wird zu } y'' \uparrow x'' (\text{Aufst. } c) = \frac{y''}{x''} \cdot \frac{1}{x''} \cdot 1 (\text{Aufst. } c) = x y \uparrow (c).$$

$$\text{Das heißt es ist: } x = \frac{y''}{x''} = \frac{\cos \varphi'' \operatorname{tg} \varrho''}{\sin \varphi'' \operatorname{tg} \varrho''} = \operatorname{ctg} \varphi''$$

$$y = \frac{1}{x''} = \frac{1}{\sin \varphi'' \operatorname{tg} \varrho''} = \frac{\operatorname{ctg} \varrho''}{\sin \varphi''}.$$