Sur l'intégrale $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(par M.^r HERMITE, à Paris.)

L'intégrale $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$ présente deux cas bien distincts, suivant que l'exposant m , est pair ou impair; dans le premier elle est transcendante, dans le second simplement algébrique et de la forme $P\sqrt{1-x^2}$, P étant un polynôme entier en x qu'on obtient ordinairement au moyen du procédé de l'intégration par parties, mais qu'on peut déterminer différemment et de manière à mieux mettre en évidence sa nature analytique.

Je chercherai en premier lieu le degré de P , en développant suivant les puissances décroissantes de la variable, les deux membres de l'équation :

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = P\sqrt{1-x^2}. \quad (1)$$

Dans le premier, le terme le plus élevé en x sera $\frac{x^m}{m\sqrt{1-x^2}}$, et dans le second $\alpha x^{\mu+1}\sqrt{1-x^2}$, si l'on fait $P = \alpha x^\mu + \alpha' x^{\mu-1} + \dots$; de sorte que l'on a: $\mu = m-1$, et l'on obtient en même temps la valeur du coefficient α , savoir: $\alpha = -\frac{1}{m}$. Cela fait, je poserai pour obtenir P :

$$\int_0^x \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = P\sqrt{1-x^2} - C,$$

C étant une constante, et on en déduira :

$$P = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or en développant le second membre suivant les puissances ascendantes de la variable, le premier terme donnera la série infinie :

$$\frac{C}{\sqrt{1-x^2}} = C \left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}x^{2n} + \dots \right].$$

Quant au second terme $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, il donnera également naissance à une série infinie, mais commençant évidemment par la puissance x^{m+1} . Comme P est un polynôme fini du degré $m-1$, il est clair qu'en posant $m-1=2n$, l'effet de ce second terme doit être de détruire tous ceux de la série $\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}$ venant après $\frac{1.3.5 \dots 2n-1}{2.4.6 \dots 2n} x^{2n}$, d'où cette conclusion: *dans l'équation (1), le polynôme P est, à un facteur constant près, l'ensemble des $m-1$ premiers termes du développement de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, suivant les puissances ascendantes de la variable.* Pour déterminer le facteur constant C , il suffira de profiter de la remarque faite tout-à-l'heure que $\alpha = -\frac{1}{m}$; on devra donc poser :

$$C \cdot \frac{1.3.5 \dots 2n-1}{2.4.6 \dots 2n} = -\frac{1}{m},$$

d'où :

$$C = -\frac{1}{m} \cdot \frac{2.4.6 \dots 2n}{1.3.5 \dots 2n-1}.$$

J'observerai enfin que l'équation (1) différenciée donne $x^m = \frac{dP}{dx} (1-x^2) - Px$, d'où on tire aisément une équation linéaire du second ordre sans second membre, car il suffit de différentier une seconde fois, puis d'éliminer le terme indépendant de P et de ses dérivées. On trouve de la sorte:

$$x(1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} + \left[(m-3)x^2 - m \right] \frac{dP}{dx} + (m-1)xP = 0.$$

Cette équation est vérifiée en posant $P = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ainsi *en partageant d'une manière quelconque le développement ordonné suivant les puissances croissantes de x , de la série $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, les deux parties satisfont à une même équation du second ordre.*

J'arrive au cas de m pair dans l'intégral $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, et je pose alors :

$$\int_0^x \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathfrak{P} \sqrt{1-x^2} + \varepsilon \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2)$$

ε désignant une constante et $\mathfrak{P}$ un nouveau polynôme, commençant comme tout-à-l'heure par le terme $-\frac{x^{m-1}}{m}$. Je n'ajoute pas de constante, le second membre devant être comme le premier une fonction impaire de la variable. La grande différence de nature analytique des relations (1) et (2), va se manifester à l'égard des polynômes P et $\mathfrak{P}$, car en opérant absolument comme plus haut, on obtient cette conclusion: *dans l'équation (2) le polynôme P est, à un facteur près, l'ensemble des $m-1$ premiers termes du développement de la fonction transcendante $\frac{\text{arc. sin. } x}{\sqrt{1-x^2}}$, suivant les puissances ascendantes de la variable.*

Ce développement bien connu, et que donne immédiatement l'équation:

$$\frac{dy}{dx} (1-x^2) - xy = 1,$$

savoir:

$$\frac{\text{arc. sin. } x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} x^5 + \dots + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n-2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2n-1} x^{2n-1} + \dots$$

conduit, en faisant $m=2n$, à l'expression suivante:

$$\mathfrak{P} = -\varepsilon \left[x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} x^5 + \dots + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n-2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2n-1} x^{2n-1} + \dots \right].$$

Et en même temps on arrive à la détermination de ε en posant:

$$\varepsilon \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n-2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2n-1} = \frac{1}{m} = \frac{1}{2n}.$$

d'où:

$$\varepsilon = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n},$$

c'est à dire, précisément le coefficient de x^{2n} dans le développement considéré plus haut de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

On tire aisément de ce dernier résultat la proposition suivante: En désignant par $F(x)$ un polynôme entier, l'intégrale $\int \frac{F(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}$ sera de la forme:

$$\phi(x) \sqrt{1-x^2} + \varepsilon \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$\phi(x)$ désignant aussi un polynôme entier, et le coefficient ε de la partie transcendante s'obtiendra en calculant le terme indépendant de x dans le

développement de l'expression $F(x) \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, suivant les puissances décroissantes de la variable. Mais on peut le démontrer immédiatement en remarquant d'abord que l'on a évidemment: $\int_{-1}^{+1} \frac{F(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi \varepsilon$, et ensuite que

l'intégrale définie $2 \int_{-1}^{+1} \frac{F(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}$ peut s'obtenir en intégrant $\frac{F(z) dz}{\sqrt{1-z^2}}$, z décrivant un cercle de rayon infini, ayant son centre à l'origine. Il faut à cet effet développer suivant les puissances décroissantes de z , l'expression proposée:

$$\frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{z\sqrt{-1}} F(z) \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or $F(z)$ étant un polynôme entier, la quantité $F(z) \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ne renferme qu'un *nombre fini* de puissances positives, et en désignant par ρ le terme indépendant de la variable dans cette quantité, l'intégrale cherchée se réduira simplement à celle-ci: $\frac{\rho}{\sqrt{-1}} \int \frac{dz}{z} = 2\pi\rho$, de sorte qu'on a bien $\rho = \varepsilon$.

On arriverait enfin au résultat, par une voie purement algébrique et très simple, en partant de l'égalité:

$$\int \frac{F(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \phi(x) \sqrt{1-x^2} + \varepsilon \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il suffit en effet de différentier, de développer ensuite les deux membres suivant les puissances décroissantes de la variable, et de comparer les termes en $\frac{1}{x}$.