SUR QUELQUES APPLICATIONS INTÉGRALES D'UNE SÉRIE DE COEFFICIENTS BINOMIAUX.

Par M. **Niels Nielsen**, à Copenhague.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. S. PINCHERLE).

Adunanza dell'11 dicembre 1904

.....
Supposons qu'une série de coefficients binomiaux $W(x)$ soit convergente pour les valeurs finies de x , dont les parties réelles sont positives; cette série se présentera sous la forme suivante

$$(1) \quad W(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \Delta^s W(1) \cdot \binom{x-1}{s},$$

et il est évident que la série de puissances

$$(2) \quad f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \Delta^s W(1) \cdot x^s$$

est convergente à l'intérieur du cercle $|x| = 1$.

Or, supposons que la fonction donnée $W(x)$ satisfasse encore à cette condition nouvelle

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W(n)}{n^k} = 0,$$

où k désigne une quantité finie, indépendante de n ; cette autre série de puissances

$$(4) \quad g(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s W(s+1) \cdot x^s$$

est également convergente à l'intérieur du cercle $|x| = 1$.

Cela posé, nous avons d'après M. LINDELÖF *) l'identité

$$(5) \quad f(x) = \frac{1}{1-x} \cdot g\left(\frac{x}{1-x}\right),$$

*) Acta Societatis Scientiarum Fennicae, t. XXIV (1898), n° 7.

où, ce qui est la même chose,

$$(6) \quad g(x) = \frac{1}{1+x} \cdot f\left(\frac{x}{1+x}\right),$$

ce qui donnera cette proposition, cas particulier du théorème de M. LINDELÖF :

Supposons que la fonction donnée $W(x)$ satisfasse aux conditions (1) et (3), les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, qui ne sont définies originellement que si $|x| < 1$, peuvent être prolongées dans les demi-plans, définis par les inégalités $R(x) < \frac{1}{2}$, $R(x) > -\frac{1}{2}$ respectivement, où $R(x)$ désigne la partie réelle de x .

Dans le cas particulier, où $W(x)$ se présente sous cette forme intégrale

$$(7) \quad W(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt,$$

nous aurons pour $f(x)$ et $g(x)$ ces deux expressions intégrales

$$(8) \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1-x(1-t)} dt, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1+xt} dt,$$

dont la première est applicable pourvu que x ne soit pas égal à une quantité positive telle que $x \geq 1$, tandis que la seconde exige que x ne soit pas égal à une quantité négative telle que $x \leq -1$. Dans ce cas particulier, les deux formules (5) et (6) sont des conséquences immédiates des intégrales (8), et le prolongement de $f(x)$ et $g(x)$ est évident.

Démontrons maintenant que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ nous permettent de déduire pour la fonction $W(x)$ des représentations remarquables. A cet effet, prenons comme point de départ ces trois formules très connues, où n désigne un entier non négatif :

$$(9) \quad \frac{(-1)^n \pi}{\sin \pi x} \cdot \binom{x-1}{n} = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{n-x} dt, \quad 0 < R(x) < n+1$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{(-1)^n \pi e^{\frac{\pi x i}{2}}}{\sin \pi x} \cdot \binom{x-1}{n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^{n-1} e^{(u+1)\varphi i} (\operatorname{tg} \varphi)^{x-1} d\varphi, \\ 0 &< R(x) < n+1 \end{aligned} \right.$$

$$(11) \quad \binom{x-1}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_A t^{-n-1} (1+t)^{x-1} dt, \quad R(n) > 0;$$

dans (11) A désigne un chemin d'intégration fermé et fini qui passe par le point $t = -1$ et qui doit toujours entourer une seule fois le point $t = 0$.

Cela posé, le théorème général concernant l'intégration terme à terme d'une série infinie donnera immédiatement, en vertu de (9) et (10), ces deux représentations intégrales

$$(12) \quad \frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot W(x) = \int_0^1 \frac{f(1-t)t^{x-1}}{(1-t)^x} dt, \quad 0 < R(x) < 1$$

$$(13) \quad \frac{\pi e^{\frac{\pi x i}{2}}}{\sin \pi x} \cdot W(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos \varphi e^{i\varphi}) \frac{e^{i\varphi}}{\cos \varphi} (\operatorname{tg} \varphi)^{x-1} d\varphi, \quad 0 < R(x) < 1,$$

d'où sans peine, en vertu de (11),

$$(14) \quad W(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_A f\left(-\frac{1}{t}\right) (1+t)^{x-1} dt, \quad R(x) > 0;$$

c'est certainement à l'aide de (14) que vous avez trouvé votre condition nécessaire et suffisante qui doit être remplie par une fonction quelconque développable en série de coefficients binomiaux.

Revenons maintenant à la formule (12), puis mettons-y $1-t$ au lieu de t , nous obtenons immédiatement cette proposition remarquable :

Supposons que $f(x)$ satisfasse à l'équation fonctionnelle

$$(15) \quad F(1-x) = F(x);$$

il sera la même chose avec $W(x)$, et viceversa.

Posons encore dans (12)

$$\frac{t}{1-t} = \zeta, \quad t = \frac{\zeta}{1+\zeta};$$

nous aurons ces deux autres représentations intégrales

$$(16) \quad \frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot W(x) = \int_0^\infty \frac{f\left(\frac{1}{1+\zeta}\right)}{1+\zeta} \cdot \zeta^{x-1} d\zeta, \quad 0 < R(x) < 1,$$

$$(17) \quad \frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot W(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\zeta} \cdot g\left(\frac{1}{\zeta}\right) \cdot \zeta^{x-1} d\zeta, \quad 0 < R(x) < 1.$$

Quant à la formule (13), posons-y $\operatorname{tg} \varphi = t$, nous retrouvons une intégrale analogue à celle qui figure au second membre de (16) mais prise le long de l'axe des nombres imaginaires de $t=0$ à $t=+\infty i$; c'est-à-dire que la formule (13) est au fond identique avec (12); mais cette forme différente de (12) nous conduira à des intégrales nouvelles et assez intéressantes, nous le verrons bientôt.

Divisons encore en deux autres l'intégrale définie qui figure au

second membre de (16), en mettant

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty,$$

nous aurons la proposition suivante :

Posons pour abréger

$$(18) \quad V_1(x) = \int_0^1 g(t) t^{x-1} dt, \quad V_2(x) = \int_0^1 \frac{f\left(\frac{1}{1+t}\right)}{\frac{1}{1+t}} \cdot t^{x-1} dt,$$

nous aurons

$$(19) \quad \frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot W(x) - V_1(1-x) = V_2(x),$$

de sorte que la fonction figurant au premier membre de (19) peut souvent être traitée entièrement comme $W(x)$.

Considérons maintenant d'un autre point de vue la formule (16), savoir en appliquant la loi de réciprocité si remarquable de M. MELLIN *). A cet effet, posons

$$x = u + iv, \quad 0 < u < 1,$$

où u et v désignent des quantités réelles, puis supposons que $W(x)$ satisfasse encore à cette condition nouvelle

$$(20) \quad |W(u + iv)| = e^{-\delta|v|} \cdot f(u, v),$$

où δ est une quantité réelle non négative et indépendante de u et v , tandis que $f(u, v)$ est une fonction positive des deux variables réelles u et v qui satisfait à cette condition

$$(21) \quad \lim_{|v| \rightarrow \infty} e^{-\varepsilon|v|} \cdot f(u, v) = 0,$$

où ε désigne une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut.

Cela posé, remarquons que $W(x)$ est une fonction holomorphe de x pourvu que x soit fini et $R(x) > 0$, je dis que la fonction figurant au premier membre de (16) est une fonction $F(x)$ de M. MELLIN. En effet, nous aurons sous les mêmes conditions qu'auparavant

$$\left| \frac{\pi}{\sin \pi x} \right| = e^{-\pi|v|} \cdot f_1(u, v),$$

ce qui donnera, en vertu de (20),

$$\left| \frac{\pi W(x)}{\sin \pi x} \right| = e^{-(\pi+\delta)|v|} \cdot f_2(u, v);$$

*) Acta Mathematica, t. XXV (1902), pp. 156-161.

c'est-à-dire que la loi de réciprocité de M. MELLIN donnera cette proposition remarquable :

Supposons que la série de coefficients binomiaux $W(x)$ satisfasse aux conditions (1), (3) et (20), nous aurons pour les fonctions f et g cette représentation intégrale

$$(22) \quad \frac{1}{1+\zeta} \cdot f\left(\frac{1}{1+\zeta}\right) = \frac{1}{\zeta} g\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{2i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{W(x)}{\sin \pi x} \cdot \zeta^{-x} dx,$$

où $0 < a < 1$, et où il faut admettre, les valeurs $|\zeta| = 0$ et $|\zeta| = \infty$ étant exclues,

$$(23) \quad -(\pi + \delta) < \theta < +(\pi + \delta), \quad \zeta = |\zeta| e^{i\theta},$$

tandis que le chemin d'intégration est une ligne droite parallèle à l'axe des nombres purement imaginaires.

Il est évident que ce cas particulier du célèbre théorème de M. MELLIN nous permet de déterminer un grand nombre d'intégrales définies étant du même caractère que celles que vous avez étudiées déjà en 1888 dans vos belles recherches sur les séries hypergéométriques généralisées *).

Quant à la portée de la formule (22), nous aurons cette proposition :

La formule (22) est vraie si $W(x)$ désigne une série de factorielles convergente pourvu que $R(x) > 0$.

Considérons maintenant quelques exemples en traitant un nombre de fonctions très connues :

1^{er} EXEMPLE :

$$W(x) = 1.$$

Nous aurons ici

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \frac{1}{1+x},$$

ce qui donnera, en vertu de (22),

$$(24) \quad \frac{1}{1+\zeta} = \frac{1}{2i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta^{-x}}{\sin \pi x} dx,$$

où il faut admettre

$$(24^{\text{bis}}) \quad 0 < a < 1, \quad -\pi < \theta < +\pi.$$

Posons pour abréger

$$(25) \quad \beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{x+s},$$

*) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, vol. IV, 1^o sem. 1888, pp. 792-799.

ou, ce qui revient au même,

$$(25^{\text{bis}}) \quad \beta(x) = \left[\Psi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{x}{2}\right) \right],$$

où $\Psi(x)$ désigne la fonction de GAUSS, savoir

$$(26) \quad \Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = -C + \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+s} - \frac{1}{x+s} \right),$$

tandis que C est la constante d'EULER; nous aurons, en vertu de (19), la formule bien connue

$$(27) \quad \frac{\pi}{\sin \pi x} = \beta(x) + \beta(1-x).$$

II^e EXEMPLE :

$$W(x) = \frac{1}{x} = \int_0^1 t^{x-1} dt, \quad R(x) > 0,$$

ce qui donnera, en vertu de (4) et (5),

$$g(z) = \frac{1}{z} \log(1+z), \quad f(z) = -\frac{1}{z} \log(1-z),$$

d'où, en vertu de (22),

$$(28) \quad \log\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{z^{-x}}{x \sin \pi x} dx,$$

où il faut admettre

$$(28^{\text{bis}}) \quad 0 < a < 1, \quad -\pi < \theta < +\pi,$$

tandis que la formule (13) donnera

$$\frac{\pi e^{\frac{\pi x i}{2}}}{x \sin \pi x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) i - \log \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} (\operatorname{tg} \varphi)^{x-1} d\varphi,$$

d'où, en mettant $\operatorname{tg} \varphi = z$, ces deux formules

$$(29) \quad \frac{\pi}{x \sin \frac{\pi x}{2}} = \int_0^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{z}\right) z^{x-1} dz, \quad 0 < R(x) < 2,$$

$$(29^{\text{bis}}) \quad \frac{\pi}{2x \cos \frac{\pi x}{2}} = \int_0^{\infty} \operatorname{arc} \cot z \cdot z^{x-1} dz, \quad 0 < R(x) < 1,$$

où il faut prendre dans (29^{bis}) la valeur de $\operatorname{arc} \cot z$ qui deviendra égale à zéro pour $z = \frac{\pi}{2}$.

Appliquons maintenant la formule (22); nous aurons :

$$(30) \quad \log \left(1 + \frac{1}{\zeta^2} \right) = \frac{1}{2i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta^{-\lambda}}{x \sin \frac{\pi x}{2}} dx,$$

formule qui est valable pourvu que

$$(30^{\text{bis}}) \quad 0 < a < 2, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2},$$

et

$$(31) \quad \text{arc cot } \zeta = \frac{1}{4i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta^{-x}}{x \cos \frac{\pi x}{2}} dx,$$

où il faut admettre

$$(31^{\text{bis}}) \quad 0 < a < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas, la formule (19) donnera, en vertu de (27), cette autre

$$(32) \quad \frac{\beta(x) + \log 2}{x} = \int_0^1 \log \left(1 + \frac{1}{t} \right) t^x dt, \quad R(x) > 0.$$

III^e EXEMPLE :

$$W(x) = \log(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\log t} dt, \quad R(x) > -1.$$

Nous obtenons le développement en série de coefficients binomiaux en mettant

$$t^x = t \cdot [1 - (1-t)]^{x-1},$$

puis appliquant la formule binomiale et intégrant terme à terme; quant à la fonction $g(x)$, nous aurons ici

$$xg(x) = \lambda(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$\lambda(x) = \sum_{s=2}^{\infty} (-1)^s \log s \cdot x^{s-1},$$

de sorte que la formule (22) donnera ici cette formule intégrale

$$(33) \quad \lambda \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \frac{1}{2i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log(x+1)}{\sin \pi x} \cdot \zeta^{-x} dx,$$

où il faut admettre

$$(33^{\text{bis}}) \quad -1 < a < +1, \quad -\pi < \theta < +\pi.$$

Il est bien connu *) que la fonction $\lambda(x)$ n'a dans toutes les parties finies du plan des x que le seul point singulier $x = -1$.

*) HADAMARD, *La série de TAYLOR*, p. 63; Paris, 1901.

IV^e EXEMPLE :

$$W(x) = \Psi(x) + C = \int_0^1 \frac{1 - t^{x-1}}{1 - t} dt, \quad R(x) > 0.$$

Appliquons ici la méthode indiquée dans l'exemple précédent, nous obtenons ce développement en série de coefficients binomiaux :

$$(34) \quad \Psi(x) + C = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{1+s} \cdot \binom{x-1}{s}, \quad R(x) > 0,$$

qui est dû à STERN *), ce qui donnera, en vertu de (1) et (5),

$$f(z) = \log(1 - z), \quad g(z) = -\frac{1}{1+z} \cdot \log(1 + z),$$

d'où, en vertu de (12),

$$(35) \quad \frac{\pi}{\sin \pi x} [\Psi(x) + C] = \int_0^1 \frac{\log t \cdot t^{x-1}}{(1-t)^x} dt, \quad 0 < R(x) < 1.$$

Appliquons maintenant la formule très connue

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot \pi x,$$

nous aurons, en mettant dans (35) $1-t$ au lieu de t , et $1-x$ au lieu de x , cette formule analogue

$$(35^{bis}) \quad \frac{\pi^2 \cos \pi x}{\sin^2 \pi x} = \int_0^1 \frac{\log \left(\frac{1}{t} - 1 \right)}{(1-t)^1} t^{x-1} dt, \quad 0 < R(x) < 1.$$

La valeur limite

$$\lim_{|x|=\infty} [\Psi(x) - \log x] = 0,$$

où x ne doit pas être négatif réel, donnera maintenant, à l'aide de (22) et de (24), cette représentation intégrale

$$(36) \quad -\frac{1}{1+z} \left[C + \log \left(1 + \frac{1}{z} \right) \right] = \frac{1}{2i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Psi(x)}{\sin \pi x} \cdot z^{-x} dz,$$

où il faut admettre $0 < a < 1$ et $-\pi < \theta < +\pi$; la formule (35^{bis}) donnera de même

$$(36^{bis}) \quad \frac{\log \left(\frac{1}{z} \right)}{1+z} = \frac{\pi}{2i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\cos \pi x}{\sin^2 \pi x} \cdot z^{-x} dz.$$

Quant à la formule (13), nous aurons ici

*) Zur Theorie der EULER'schen Integrale, p. 39; Götting. Studien, 1847.

$$(37) \left\{ \begin{aligned} \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi x}{2}} [\Psi(x) + C] &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \cos \varphi + \varphi \cot \varphi) (\cot \varphi)^{x-1} d\varphi, \\ 0 < R(x) < 2, \end{aligned} \right.$$

$$(37^{bis}) \left\{ \begin{aligned} \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi x}{2}} [\Psi(x) + C] &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cot \varphi \log \cos \varphi - \varphi) (\cot \varphi)^{x-1} d\varphi, \\ 0 < R(x) < 1, \end{aligned} \right.$$

d'où, en posant $\cot \varphi = \chi$, deux nouvelles formules intégrales analogues à (36) et (36^{bis}) mais d'une forme plus compliquée.

Introduisons maintenant les deux fonctions qui correspondent à $V_1(x)$ et $V_2(x)$ figurant dans (18), posons

$$(38) \quad \xi(x) = \int_0^1 \frac{\log(1+\chi)}{1+\chi} \cdot \chi^{x-1} d\chi, \quad R(x) > 0;$$

nous aurons ici

$$(39) \quad \beta^{(1)}(x) - \xi(x) - \xi(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} [\Psi(x) + C],$$

où $\beta^{(1)}(x)$ désigne la dérivée de la fonction $\beta(x)$ introduite dans (25).

Quant à la fonction $\xi(x)$, une intégration par parties donnera

$$\int_0^1 \log(\chi+1) \cdot \chi^{x-1} d\chi = \frac{\log 2 - \beta(x+1)}{x},$$

d'où

$$(40) \quad \xi(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s+x} [\log 2 - \beta(x+s+1)];$$

posons pour abrégier

$$\lambda(s) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{s},$$

nous aurons de plus, en vertu de (38),

$$(41) \quad \xi(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1} \lambda(s)}{x+s}$$

$$(41^{bis}) \quad \xi(x) = \beta(x) \log 2 - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s! \lambda(s)}{x(x+1) \dots (x+s)} \cdot \frac{1}{2^{s+1}},$$

où la série de factorielles figurant au second membre de (41^{bis}) est convergente pour une valeur finie quelconque de x , les pôles simples de $\xi(x)$ exclus.

V° EXEMPLE :

$$W(x) = \beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt, \quad R(x) > 0.$$

Les formules (8) et (5) donnent ici

$$g(x) = \frac{\log\left(\frac{2}{1+x}\right)}{1-x}, \quad f(x) = \frac{\log(2-2x)}{1-2x},$$

d'où, en vertu de (12),

$$(42) \quad \frac{\pi \beta(x)}{\sin \pi x} = \int_0^1 \frac{\log(2t)}{2t-1} \cdot \frac{t^{x-1}}{(1-t)^x} dt, \quad 0 < R(x) < 1,$$

de sorte que (22) donnera ici

$$(43) \quad \frac{\log\left(\frac{2\zeta}{1+\zeta}\right)}{\zeta-1} = \frac{1}{2i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\beta(x)}{\sin \pi x} \cdot \zeta^{-x} dx,$$

où il faut admettre $0 < a < 1$, $-\pi < \theta < +\pi$.

Appliquons ensuite l'identité

$$\beta(x) + \beta(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

nous aurons de plus

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right)^2 = \int_0^1 \frac{\log \frac{t}{1-t}}{2t-1} \cdot \frac{t^{x-1}}{(1-t)^x} dt = \int_0^\infty \frac{\log \zeta}{\zeta-1} \cdot \zeta^{x-1} d\zeta,$$

ce qui donnera cette formule analogue à (43)

$$(43^{\text{bis}}) \quad \frac{\log \zeta}{\zeta-1} = \frac{\pi}{2i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta^{-x}}{\sin^2 \pi x} dx, \quad 0 < a < 1.$$

Nous ne nous arrêtons pas à l'application de la formule (13), parce que les fonctions $V_1(x)$ et $V_2(x)$ introduites dans (18) nous conduiront à des résultats beaucoup plus intéressants. Posons en effet

$$(44) \quad \eta(x) = \int_0^1 \frac{\log 2 - \log(1+t)}{1-t} t^{x-1} dt;$$

nous trouvons cette formule analogue à (39)

$$(45) \quad \frac{\pi \beta(x)}{\sin \pi x} = \Psi^{(1)}(x) - \eta(x) + \eta(1-x).$$

Quant à la fonction $\eta(x)$, nous aurons, en vertu de (44),

$$(46) \quad \eta(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\log 2 - \lambda_1(s)}{x+s}$$

$$(46^{bis}) \quad \eta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1) \dots (x+s)} \cdot \frac{1}{(s+1) 2^{s+1}},$$

où nous avons posé dans (46)

$$\lambda_1(s) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{s-1}}{s};$$

nous aurons encore sans peine

$$(47) \quad \eta(x) = - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\beta(x+s+1)}{x+s} = \Delta^{-1} \left[\frac{1}{x} \beta(x+1) \right].$$

.....

Voyez mes réflexions sur les applications intégrales d'une série de coefficients binomiaux. Je laisse maintenant à votre autorité de décider si de telles réflexions ont de la valeur pour les séries susdites qui nous intéressent, et pour le type d'intégrales définies que vous avez introduites le premier dans vos intéressantes recherches sur les fonctions hypergéométriques généralisées.

Copenhague, le 4 décembre 1904.

NIELS NIELSEN.