**4. Über elektromagnetische Unstetigkeitsflächen
und deren Fortpflanzung;
von Ludwig Silberstein.**

In der vorliegenden Abhandlung sollen die von E. B. Christoffel¹⁾, H. Hugoniot²⁾ und, in allgemeinsten Form, von J. Hadamard³⁾ aufgestellten *identischen Bedingungen* und *kinematischen Kompatibilitätsbedingungen* auf Unstetigkeitsflächen des elektromagnetischen Feldes angewandt werden. Die ersteren müssen erfüllt sein, wenn die Unstetigkeiten, in einem gegebenen Augenblick, überhaupt auf einer Fläche liegen sollen, die letzteren, wenn eine solche Fläche sich mit der Zeit nicht spalten oder gar die Unstetigkeit sich nicht auflösen soll. Berücksichtigt man, wie es die genannten Autoren im Gebiet der Dynamik deformierbarer Körper und namentlich der Hydrodynamik getan haben, die Differentialgleichungen der Bewegung, so erhält man außer den obigen noch die sogenannten *dynamischen Kompatibilitätsbedingungen*, wobei sich auch der Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Unstetigkeiten ergibt, die in dem analytischen Ausdruck der kinematischen Bedingungen vorkommt, ohne daß man es zu diesem Behufe nötig hätte, die Differentialgleichungen zu integrieren. In dieser Weise gelang es namentlich Hugoniot⁴⁾ für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Beschleunigungswelle in einem Gase die bekannte Laplacesche Formel $v = \sqrt{dp/d\rho}$ zu er-

1) E. B. Christoffel, Ann. di mat. 8. 1877.

2) H. Hugoniot, Compt. rend. 101. Paris 1885.

3) J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Paris 1903. — Im wesentlichen findet man den Begriff der Kompatibilität schon bei Riemann: Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, 1860. Vgl. auch: P. Appel, Mécanique rationelle. 3. Kap. 33. Paris 1903. — G. Zemplén, Unstetige Bewegungen in Flüssigkeiten. Enzykl. d. math. Wiss. IV 2. Heft 3.

4) H. Hugoniot, l. c.

halten, was Appell¹⁾, mit Recht, als ein „sehr bemerkenswertes“ Resultat der auf den in Rede stehenden Bedingungen gegründeten Methode betrachtet. Der Wunsch, das Huginotsche Theorem, *mutatis mutandis*, auf dem Gebiete des Elektromagnetismus nachzuahmen, war es eben, was mich zu der vorliegenden Untersuchung veranlaßte. Ob das Thema derselben nicht schon von anderen Autoren vor mir behandelt wurde, konnte ich mit Sicherheit nicht feststellen; von einer ansehnlichen Anzahl einschlägiger Abhandlungen und Bücher, die ich zu diesem Behufe durchgesehen habe, konnte ich nur bei Zemplén eine streifende Bemerkung über die Möglichkeit einer solchen Untersuchung finden.²⁾

Was die Nomenklatur anbelangt, so werde ich die obigen Namen für die beiden ersteren Bedingungsarten unverändert beibehalten, diejenigen der dritten Art aber nicht einfach „dynamische“, sondern, mit Hervorhebung des Erscheinungsbereiches, um welches es sich handelt, *elektrodynamische Kompatibilitätsbedingungen* nennen, trotzdem es hierbei nicht um Dynamik im eigentlichen Sinne des Wortes zu tun ist.

Der Sprung irgend einer, skalaren oder vektoriellen, Größe s wird nach dem Vorgange von Christoffel mit

$$s_2 - s_1 = [s]$$

bezeichnet werden, wobei ich den zur Unstetigkeitsfläche σ normalen Einheitsvektor n durchweg *von der Seite 1 nach der Seite 2* gerichtet annehmen werde. Übrigens werde ich mich möglichst ausschließlich der Vektorensprache bedienen und hierbei das skalare, bzw. vektorielle Produkt mit AB , bzw. ∇AB , nach dem Vorgange von Heaviside, und den Hamiltonschen Operator, wie üblich, mit ∇ bezeichnen, schließlich die Intensität oder den absoluten Wert eines Vektors durch Über-

1) P. Appell, l. c. p. 337.

2) l. c. p. 323: „Das Analogon der Schallwellen endlicher Amplitude sind hier [= in der Elektrizitätstheorie] die elektromagnetischen Wellen, welche einer ähnlichen analytischen Behandlung zugänglich sind. Ebenso stehen diese Untersuchungen zu der Wellenoptik in Beziehung. Hierüber vgl. die einschläglichen Referate in Bd. V.“ Doch sind diese „Referate“, oder die betr. Hefte der Enzyklop. d. math. Wiss., meines Wissens bis jetzt nicht erschienen.

streichen des betr. Buchstabens kenntlich machen. Die übrigen Symbole brauchen keiner Erklärung.

In dieser Abhandlung werde ich mich vorläufig auf die Betrachtung eines *ruhenden, nichtleitenden isotropen*¹⁾ Mediums beschränken, indem ich mir die Behandlung der allgemeineren Fälle für künftige Veröffentlichungen vorbehalte. Vorerst sollen auch nur Unstetigkeiten von der *ersten Ordnung* betrachtet werden.

§ 1. *Die identischen Bedingungen.* — Sind E, M die elektrische bzw. magnetische Kraft, so ist, weil es sich ja um Unstetigkeiten von der *ersten* (und nicht von der nullten) Ordnung handelt:

$$[E] = 0, \quad [M] = 0.$$

Die identischen Bedingungen, die ich gleich in Vektorgestalt kleiden will, lauten dann:

$$(a) \quad \begin{cases} [\nabla (Ei)] = (e i) n, \\ [\nabla (Mi)] = (m i) n, \end{cases}$$

wo i einen ganz beliebigen Vektor, sagen wir *Einheits*-Vektor, ferner n den oben eingeführten Flächennormalen-Einheitsvektor bedeutet und e, m die für die elektrische, bzw. magnetische Unstetigkeit charakteristischen Vektoren sind. Ist

$$f = f(x, y, z, t) = 0$$

die Gleichung der Unstetigkeitsfläche σ , so ist n durch

$$\nabla f = n \cdot \overline{\nabla f} = n \cdot \frac{\partial f}{\partial n}$$

bestimmt. Jede der beiden obigen Gleichungen (a) ist eine Verkörperung von je neun skalaren Gleichungen. Ist z. B. E_1 irgendeine Komponente von E und e_1 die nach derselben Richtung genommene Komponente von e , so hat man $[\nabla E_1] = e_1 n$ usw., woraus die Identität der obigen mit der üblichen Form dieser Bedingungen unmittelbar erhellen wird.

Es wird für unsere Zwecke genügen, wenn wir von den 9 elektrischen und 9 magnetischen skalaren Sprüngen nur je 4 betrachten, und zwar die Sprünge von $\text{curl } E$, $\text{div } E$, $\text{curl } M$, $\text{div } M$, wovon die curls je 3 und die divs je eine skalare Größe implizieren.

1) Aber nicht durchaus homogenen.

Bedenkt man nun, daß $\operatorname{div} E = \nabla_1 E_1 + \nabla_2 E_2 + \nabla_3 E_3 = \nabla E$ und $\operatorname{curl} E = \nabla \nabla E$ ist, so erhält man unmittelbar nach (a) für die fraglichen Sprünge:

$$\begin{aligned} (1) \quad & [\operatorname{div} E] = en, \quad [\operatorname{div} M] = mn \\ (2) \quad & [\operatorname{curl} E] = \nabla en, \quad [\operatorname{curl} M] = \nabla mn. \end{aligned}$$

Dies sind die uns interessierenden identischen Bedingungen, die man durch Zerlegung in Komponenten sofort auf Hadamardsche, skalare Form bringen kann.

Ist der für eine Unstetigkeit charakterische Vektor (wie z. B. e) *normal*, bzw. *tangential* zur Fläche σ , so nennt man die Unstetigkeit eine *longitudinale*, bzw. eine *transversale*. Nach dem Muster dieser in der Hydrodynamik üblich gewordenen Ausdrucksweise sollen nun die elektromagnetischen Unstetigkeiten *longitudinal* oder *transversal* genannt werden, je nachdem sowohl e als auch m normal oder tangential zu σ sind, d. h. je nachdem

$$\nabla en = 0 \quad \text{und} \quad \nabla mn = 0$$

oder

$$en = 0 \quad \text{und} \quad mn = 0$$

ist. Bei transversalen Unstetigkeiten bleiben also, nach (1), die Divergenzen stetig, während bei longitudinalen, nach (2), die Wirbel keine Sprünge erleiden.

Es läßt sich kurz sagen, daß das Vektorenpaar e, m , welches man sich, für einen bestimmten Augenblick t , für jeden Punkt von σ gegeben zu denken hat, die *elektromagnetische Unstetigkeit* (für dieses t) *gänzlich charakterisiert*.

Diese ist übrigens auch durch Angabe der Sprünge der divs und curls vollständig bestimmt. Denn, wären sowohl diese wie jene stetig, so hätte man nach (1), (2) $en = 0$ und zugleich $\nabla en = 0$, was das Verschwinden von e nach sich zieht; und dasselbe gilt von m . Man kann auch e, m ohne weiteres durch die Sprünge der Divergenzen und der Curls ausdrücken; die Intensität von e bestimmt sich nämlich nach (1), (2) durch

$$e^2 = [\operatorname{div} E]^2 + [\operatorname{curl} E]^2$$

und die Richtung durch

$$e \cos \theta = [\operatorname{div} E], \quad e \sin \theta = [\operatorname{curl} E],$$

wo θ der zwischen n und e enthaltene Winkel ist; ganz analoge Formeln gelten für m . Es ist jedoch bequemer die Vek-

toren e , m heizubehalten, als sie ein für allemal durch die Sprünge der divs und curls zu ersetzen.

§ 2. *Die kinematischen Kompatibilitätsbedingungen.* — Die obigen Sprünge sind, wie man nach Hadamard sagen würde, vom Index Null (da sie den Zeitderivator gar nicht enthalten). Die jetzt zu betrachtenden Sprünge vom Index Eins sind

$$\left[\frac{\partial E}{\partial t} \right], \quad \left[\frac{\partial M}{\partial t} \right],$$

wo die Symbole, wegen der vorausgesetzten Unbeweglichkeit des Mediums keiner Erklärung bedürfen.

Diese Sprünge (und es gibt keine anderen vom Index 1, für eine Unstetigkeit I. Ordnung) sind nun mit den obigen, durch Vermittlung von e , m , aufs engste verknüpft, sobald sich nur σ mit der Zeit nicht spalten oder auflösen soll.

Bezeichnet man nämlich die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit*¹⁾ der Unstetigkeit, die man sich vorläufig als unbekannten Skalar zu denken hat, mit v , so lauten die *kinematischen Kompatibilitätsbedingungen*:

$$(3) \quad \left[\frac{\partial E}{\partial t} \right] = -v e, \quad \left[\frac{\partial M}{\partial t} \right] = -v m.$$

Man kann nunmehr sagen, daß eine elektromagnetische Unstetigkeit durch das Vektorenpaar e , m und den Skalar v in allen Stücken bestimmt ist. (Dies wird übrigens von einer Unstetigkeit *beliebiger Ordnung* gelten.) Der Skalar v läßt sich ganz willkürlich vorschreiben, solange man nämlich *nur* die identischen und die kinematischen Kompatibilitätsbedingungen berücksichtigt. Sein Wert bestimmt sich (bei gegebenen Richtungen von e , m) erst durch Hinzuziehung etwaiger Angaben über die Art und Weise, wie sich die betrachteten Vektoren ändern, in unserem Falle der Differentialgleichungen des Feldes, ebenso wie bei Flüssigkeitsbewegungen der hydrodynamischen Gleichungen. Bisher konnte man sich sonst unter E , M irgend welches Vektorenpaar denken.

1) D. h. die normale Verrückungsgeschwindigkeit des Flächenelementes $d\sigma$ in der Zeit oder

$$v = \mp \frac{\partial f}{\partial t} / \nabla f.$$

Wir werden v als positiv auffassen, wenn sich die Unstetigkeit in dem oben festgesetzten Sinn von n fortpflanzt. Das Vorzeichen von v bestimmt sich übrigens immer durch (3), wo v *linear* vorkommt.

§ 3. *Die elektrodynamischen Kompatibilitätsbedingungen.* — Um dieselben zu erhalten, stützen wir uns auf die beiden Maxwellschen Differentialgleichungen:

$$(4) \quad K \frac{\partial E}{\partial t} = c \cdot \text{curl } M, \quad \mu \frac{\partial M}{\partial t} = -c \cdot \text{curl } E,$$

indem wir den Divergenzen absichtlich keine Einschränkungen auferlegen außer derjenigen, die aus diesen Gleichungen selbst fließt.

Indem wir nun voraussetzen, daß das Medium zwar *heterogen* sein kann, daß aber K , μ , wenigstens an der Unstetigkeitsfläche σ , keine Sprünge erleiden, erhalten wir aus (4), nach (2) und (3), die in der Überschrift dieses Paragraphen genannten Bedingungen in der Form:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{K}{c} v e = V n m \\ \frac{\mu}{c} v m = V e n. \end{array} \right.$$

Diese beiden einfachen Gleichungen sind von grundlegender Bedeutung für den weiteren Inhalt dieser Abhandlung. Aus denselben lassen sich nämlich, beinahe auf den ersten Blick schon, eine Reihe von Eigenschaften der elektromagnetischen Unstetigkeitsflächen herauslesen, die wir nun, im Zusammenhang mit dem Obigen, näher besprechen werden.

§ 4. *Stationäre Unstetigkeiten und Wellen. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der letzteren.* — Wenn eine Unstetigkeit fortwährend an denselben Teilchen des Mediums haftet, in unserem Falle also kurz unbeweglich ist, nennt man sie eine *stationäre* Unstetigkeit; berührt sie aber mit der Zeit immer andere Teilchen, so nennt man sie eine *Welle* im eigentlichen Sinne des Wortes und sagt, daß sie sich im Medium fortpflanzt.¹⁾ Diese in der Hydrodynamik üblich gewordene Ausdrucksweise läßt sich ohne weiteres auf den Elektromagnetismus übertragen, und ebenso wie man in jener z. B. von einer „Beschleunigungswelle“ spricht, wobei dv/dt unstetig (während die Flüssigkeitsgeschwindigkeit v selber stetig) ist, werden wir hier z. B. von einer *Wirbelwelle* sprechen, falls nämlich $[\text{div } E] = [\text{div } M] = 0$, während $[\text{curl } E] \neq 0$, $[\text{curl } M] \neq 0$ ist.

1) J. Hadamard, l. c. p. 99.

Nach § 1 decken sich dann die Begriffe einer transversalen und einer Wirbelwelle. Ebenso werden Divergenzunstetigkeiten, wobei $[\text{curl } E] = [\text{curl } M] = 0$, longitudinal sein.

Nunmehr können wir aus den elektrodynamischen Kompatibilitätsbedingungen (5) eine Reihe von Schlüssen ziehen, die sich leicht in Worte kleiden lassen.

1. Multipliziert man (5) skalar mit n , so folgt:

$$v e n = 0 \quad \text{und} \quad v m n = 0,$$

also entweder:

$$v = 0 \quad \text{oder} \quad e n = m n = 0.$$

Jede Unstetigkeit 1. Ordnung ist also entweder stationär oder bildet eine transversale Welle; d. h. nach (1), eine reine Wirbelwelle.¹⁾

2. Multipliziert man (5) skalar mit e bzw. mit m , so erhält man, nach der sogenannten parallelepipedischen Eigenschaft:

$$v (K e^2 - \mu m^2) = 0,$$

also wiederum $v = 0$ oder

$$K e^2 = \mu m^2.$$

Die Unstetigkeit ist also stationär oder bildet eine Welle, in welcher die Sprünge des elektrischen und des magnetischen Wirbels durch die Beziehung $K e^2 = \mu m^2$ miteinander verknüpft sind.

3. Multipliziert man die erste der Gleichungen (5) skalar mit m oder die zweite mit e , so folgt

$$v e m = 0,$$

also $v = 0$ oder $e m = 0$, d. h.:

Die Unstetigkeit ist stationär oder sie bildet eine Welle, deren charakteristische Vektoren e , m aufeinander senkrecht stehen.²⁾

4. Multipliziert man schließlich die Gleichungen (5) vektoriell miteinander und bedenkt man, daß

$$V(V n m)(V e n) = n(n V e m)$$

ist, so folgt

$$\frac{K \mu v^2}{c^2} V e m = n(n V e m),$$

1) Ist sie weder rein longitudinal, noch rein transversal, sondern gemischt, so kann Kompatibilität nicht herrschen, d. h. die Fläche σ spaltet sich in eine longitudinale, die unbeweglich bleibt, und eine transversale Unstetigkeit die sich fortpflanzt.

2) Zu 2., 3. gehören ganz analoge Bemerkungen wie zu 1.; vgl. Anmerkung 1.

oder nach beiderseitiger Multiplikation mit n , wegen $n^2 = 1$:

$$\left(\frac{K\mu}{c^2}v^2 - 1\right)n\mathcal{V}em = 0.$$

Hierin ist nach (5)

$$n\mathcal{V}em = -\frac{K}{c}ve^2 = -\frac{\mu}{c}vm^2;$$

da wir also den Fall $e = m = 0$ nicht zu berücksichtigen brauchen, so ist schließlich $(K\mu v^2 - c^2)v = 0$, d. h.:

Die Unstetigkeit muß entweder stationär sein oder sich mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{c}{\sqrt{K\mu}}$$

fortpflanzen, welche in einem heterogenen Medium von Punkt zu Punkt (der Fläche σ) verschieden sein wird.

Es bleibt uns nur noch übrig, den *Sinn* der Fortpflanzung (oder das Vorzeichen von v) zu bestimmen. Dies können wir nun am einfachsten durch skalare Multiplikation etwa der ersten der Gleichungen (5) mit e erreichen. Da nämlich K, c, e^2 positiv sind, so ist das Vorzeichen von v gleich dem von $e\mathcal{V}nm$ oder $n\mathcal{V}me$. Zeigen also die Vektoren m, e nach oben, bzw. nach rechts, so geschieht die Fortpflanzung nach vorn.

Die obigen Folgerungen aus den elektrodynamischen Kompatibilitätsbedingungen habe ich absichtlich gesondert ausgesprochen und jedesmal die beiden Eventualitäten hervorgehoben. Nunmehr kann man aber 1.—4. kurz zusammenfassen und den folgenden Satz aussprechen:

Eine sich nicht auflösende elektromagnetische Unstetigkeitsfläche I. Ordnung, in einem ruhenden isotropen Dielektrikum, ist entweder longitudinal und stationär oder bildet eine transversale Wirbelwelle, die sich in dem Sinne $\mathcal{V}me$ mit der Geschwindigkeit

$$(6) \quad v = c(K\mu)^{-1/2}$$

fortpflanzt, wobei die Vektoren e, m aufeinander senkrecht stehen und der Gleichung

$$(7) \quad Ke^2 = \mu m^2$$

genügen müssen.

Dieser Satz, welcher sich außer den identischen und kinematischen Bedingungen noch ausdrücklich *auf die Maxwell-*

schen Gleichungen (4) stützt, bildet das Gegenstück zu dem berühmten Theorem von Hugoniot.¹⁾

Er gibt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nebst einigen anderen wesentlichen Eigenschaften, ohne Integration der Differentialgleichungen, und bietet außerdem den Vorteil, sowohl für ein homogenes wie für ein heterogenes Medium zu gelten.

Kennt man, bei gegebenen e , m , die Lage und Gestalt der Unstetigkeitsfläche σ für irgend einen Augenblick t , so hat man vor allem nachzusehen, ob die Bedingungen

$$e \perp n, \quad m \perp n, \quad e \perp m, \quad Ke^2 = \mu m^2$$

sämtlich erfüllt sind oder nicht. Sind sie es nicht, so bleibt die Fläche σ unbeweglich.²⁾ Sind sie aber erfüllt, sowie (1), (2) (wie ich immer stillschweigend voraussetzte), so braucht man nur in jedem Punkte von σ in normaler Richtung und in dem Sinn des Vektors ∇me die betreffende Strecke

$$K(\mu)^{-1/2} c dt$$

abzutragen, um die Unstetigkeitsfläche für den Augenblick $t + dt$ zu erhalten.

Würde man anstatt der Maxwellschen Gleichungen (4) irgend welche anderen Differentialgleichungen für das Feld annehmen, so würden natürlich die „elektrodynamischen Kompatibilitätsbedingungen“ im allgemeinen ganz anders wie in § 3, (5) ausfallen, so daß wir auch den obigen Satz entsprechend zu modifizieren hätten. Ein Beispiel dieser Art soll im nächsten Paragraphen kurz besprochen werden.

§ 5. *Die elektrodynamischen Kompatibilitätsbedingungen nach den Grundgleichungen der Elektronentheorie.* — Für den „Äther“ lauten die Maxwellschen Gleichungen

$$(4a) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = c \cdot \text{curl } M, \quad \frac{\partial M}{\partial t} = -c \cdot \text{curl } E,$$

wozu noch die solenoidale Verteilung von M , d. h.

$$\text{div } M = 0$$

1) Vgl. z. B. Hadamard, Leçons p. 228: „Un gaz pourra donc offrir: 1° des discontinuités longitudinales se propageant avec la vitesse $\sqrt{dp/d\rho}$; 2° des discontinuités transversales stationnaires.“

2) Falls sie sich nicht spalten soll.

hinzukommt. Nach (1) ist also $m = 0$ und folglich nach (2) $[\text{curl } M] = 0$ zu setzen. Die scheinbare oder „freie“ Dichte wird zugleich zur „wahren“ Elektrizitätsdichte

$$\rho = \text{div } E,$$

also, nach (1), der Sprung derselben

$$[\rho] = en.$$

Ist dieser Sprung von Null verschieden, also auch $en \neq 0$, und soll Kompatibilität herrschen, so ist, wie wir in § 4 gesehen haben, $v = 0$, d. h. die Unstetigkeit stationär.¹⁾ Wir können nun die Begrenzung eines (z. B. gleichmäßig) geladenen Raumteiles oder, sagen wir, die Oberfläche eines „Elektrons“ als eine Unstetigkeitsfläche von ρ betrachten; diese würde also, samt ihrem Inhalt, überhaupt *unbeweglich* sein, solange man nur an den Maxwellschen Gleichungen (4a) festhält. Dies ist eine allgemein bekannte Eigenschaft derselben, die übrigens mit der aus der ersten von ihnen unmittelbar folgenden Konsequenz $\partial \rho / \partial t = 0$ übereinstimmt.

Will man also überhaupt bewegliche „Elektronen“²⁾ haben, so muß man die Maxwellschen Gleichungen modifizieren. Es soll nun hier diejenige Modifikation besprochen werden, welche die „Grundgleichungen für den Äther“ in der modernen Elektronentheorie bildet³⁾, nämlich:

$$(\alpha) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + X \cdot \text{div } E = c \cdot \text{curl } M,$$

$$(\beta) \quad \frac{\partial M}{\partial t} = -c \cdot \text{curl } E,$$

$$(\gamma) \quad \text{div } M = 0.$$

1) Natürlich gilt dann die Gleichung (7) nicht; ich erinnere, daß *entweder* (7) oder $v = 0$ galt.

2) Im radikalsten Sinne des Wortes, d. h. als reine Ladungen, von „rein elektromagnetischer Masse“, aufgefaßt.

3) Es sei mir gestattet, hier zu bemerken, daß ich nichts weniger als ein Anhänger der Elektronentheorie bin, besonders derjenigen von ihren Gestalten, welche sich auf die Abrahamschen „dynamischen Grundgleichungen“ stützt. Im obigen wollte ich nur noch ein Beispiel geben, wie sich mit Hilfe gegebener Differentialgleichungen des Feldes (abgesehen von ihrem physikalischen Wert) aus den identischen und kinematischen die elektrodynamischen Kompatibilitätsbedingungen herleiten lassen.

In (α) habe ich absichtlich den Vektor X hingeschrieben ohne ihn physikalisch zu benennen. In der Elektronentheorie heißt er von Anfang an „die Geschwindigkeit irgend eines geladenen Punktes“. Da wir aber *die Bewegung eines Elektrons als die Fortpflanzung der ihn begrenzenden Unstetigkeitsfläche im Äther* (oder im „leeren Raume“) betrachten wollen, so müssen wir sie erst aus den obigen Differentialgleichungen unter Zuhilfenahme der identischen und der kinematischen Kompatibilitätsbedingungen eruieren, bevor wir X mit dem Begriff der Geschwindigkeit eines Elektrons vermengen.

Ich setze nun wieder voraus, daß Kompatibilität herrscht, daß also die Gleichungen (1), (2), (3) sämtlich bestehen. Die Fläche σ ist in diesem Falle geschlossen, nämlich die Oberfläche eines Elektrons. Wegen (γ) ist $m = 0$, also

$$[\text{curl } M] = 0, \quad \left[\frac{\partial M}{\partial t} \right] = 0,$$

folglich nach (β) auch

$$[\text{curl } E] = 0,$$

also nach der ersten der Gleichungen (2): e normal, d. h.

$$(\delta) \quad e = \bar{e} n$$

und nach (1)

$$(\epsilon) \quad [\text{div } E] = [\rho] = \bar{e}.$$

Es bleibt also nur noch die erste der kinematischen Bedingungen (3) zu berücksichtigen übrig, welche nach (δ) die einfache Beziehung

$$(\zeta) \quad \left[\frac{\partial E}{\partial t} \right] = -v \bar{e} n$$

ergibt. Von den Differentialgleichungen bleibt nur noch (α) zu berücksichtigen übrig; wegen $[\text{curl } M] = 0$ ergibt sich hieraus

$$\left[\frac{\partial E}{\partial t} \right] + [X\rho] = 0,$$

also, nach (ϵ) und (ζ), als letzte elektrodynamische Kompatibilitätsbedingung:

$$(\eta) \quad v n [\rho] = [X\rho].$$

Sobald man nun über den Vektor X keine speziellen Festsetzungen (nämlich über seine Stetigkeitsverhältnisse) macht, kann man hieraus nichts weiter schließen, als daß der Sprung

von $X\rho$ auf der Elektronenfläche senkrecht steht. Nach Multiplikation mit n könnte man schließlich noch

$$\mathfrak{v}[\rho] = n[X\rho]$$

schreiben.

Innerhalb des Elektrons ist im allgemeinen $X\rho \neq 0$, außerhalb desselben $X\rho = 0$; man braucht aber durchaus nicht vorauszusetzen, daß hier $X = 0$ ist, da ja das Verschwinden des Produktes schon durch $\rho = 0$ außerhalb des Elektrons gesichert ist. Der Vektor X ist außerhalb der Elektronen nicht gerade Null, sondern er hat da überhaupt keinen Sinn. Wer also die *Festsetzung* machen wollte, daß X außerhalb der Elektronen nicht durchaus verschwindet, und ferner, daß Xn an ihrer Oberfläche σ keinen Sprung erleidet, der würde aus der letzten Gleichung die Folgerung $\mathfrak{v}[\rho] = nX[\rho]$, also

$$(\epsilon) \quad \mathfrak{v} = Xn$$

ziehen können. Hiernach würde der Vektor X in der Tat die *Geschwindigkeit* irgend eines Elementes $d\sigma$ der Oberfläche eines Elektrons bedeuten. Denn der Definition nach war $\mathfrak{v}$ nichts anderes als die Verrückungsgeschwindigkeit eines Elementes einer Unstetigkeitsfläche in der Richtung seiner Normalen n .

Wer aber, mit der Stetigkeit der Normalkomponente Xn unzufrieden, etwa die Stetigkeit des ganzen Vektors X verlangen würde, der hätte aus (η) : $X = \mathfrak{v}n$, also offenbar ein weniger erfreuliches Resultat.

Warschau, im Mai 1908.

(Eingegangen 25. Mai 1908.)