14. *Eine neue Formel für Spectralwellen; von J. J. Balmer.*

(Separatabdruck aus den Verhandlungen der Naturforschenden
Gesellschaft in Basel, Band XI, Heft 3.)

(Hierzu Taf. II, Fig. 4.)

Wie die Wellenlängen des einfachen Wasserstoffspectrums mit überraschender Genauigkeit durch eine einfache Formel darstellbar sind, so liess sich auch erwarten, dass für die Funkenspectra anderer Elemente sich eine Formel finden lasse, welche deren Wellenlängen in befriedigender Weise auszudrücken vermöge. Hr. Prof. E. Hagenbach-Bischoff hatte die Freundlichkeit, mir von Zeit zu Zeit über die in dieser Richtung gemachten Arbeiten und Versuche Nachrichten zukommen zu lassen. Zunächst ist zu bemerken, dass ein einzelnes Metall, z. B. Lithium oder Thallium, im Funkenspectrum nicht bloss eine einzelne Folge von gesetzmässig geordneten Linien darstellt, sondern dass das nämliche Metall mehrere Serien von Linien aufweist, die sich im allgemeinen so übereinander legen, dass die Linien der verschiedenen Serien sich scheinbar regellos durcheinander mengen. Der Umstand, dass die zu einer solchen Serie zusammengehörenden Linien ihr eigenthümliches charakteristisches Aussehen haben, sodass die Linien der einen Serie scharf begrenzt, die einer andern nach der roten, wieder einer andern nach der entgegengesetzten Seite hin verwaschen erscheinen, während noch andere nach beiden Seiten unscharf sind etc., ermöglichte es, die Serien auseinander zu lösen, und nun zeigte es sich, dass jede Serie nach der Seite der kürzern Wellen hin sich in immer engerer Linienfolge einer bestimmten, ihr eigenthümlichen Grenze näherte, wobei die Linien auch allmählich schwächer und undeutlicher wurden und dadurch ein genaues Messen erschwerten. Die Herren Proff. Kayser und Runge in Hannover, welche mit ausserordentlicher Genauigkeit und staunenswerthem Fleiss eine grosse Zahl von Elementen spectroscopisch untersucht und die Wellenlängen ihrer Serienlinien

gemessen haben ¹⁾, zeigten nun, dass die diesen Wellenlängen umgekehrt proportionalen Schwingungszahlen (oder statt deren die Reciproken der Wellenlängen) durch Potenzreihen mit fallenden Potenzen von n^2 darstellbar sind, und dass die drei ersten Glieder einer solchen Reihe genügen, um mit sehr genauer Annäherung an die aus der Beobachtung abgeleiteten Zahlenwerthe, mit Ausnahme etwa der längsten oder kürzesten Wellen, die Linienserien darzustellen. Es sind zur Bestimmung der drei in dieser abgekürzten Formel vorkommenden Constanten nur drei durch Messung bestimmte Schwingungszahlen erforderlich, deren Ordnungszahl bekannt sein muss. (Die Ordnungszahl der längsten möglichen Welle ist stets = 3 zu setzen.) Die Formel selbst heisst, wenn τ_n die Reciproke der Wellenlänge λ_n bezeichnet

$$\left\{ \tau_n = A - \frac{B}{n^2} - \frac{C}{n^4} \right\}$$

Für die längste oder höchstens die 2 längsten Wellen reicht diese dreigliedrige Formel nicht aus, und es wäre die Bestimmung einer vierten und fünften Constanten für zwei nachfolgende Glieder der Potenzreihe nöthig zur genauen Darstellung der Schwingungszahlen; doch ist die Berechnung solcher weiteren Constanten höchst unsicher, da mit den bisherigen Mitteln eine zu diesem Zweck genügend genaue Messung der Wellenlängen nicht möglich ist. (Die bis jetzt erreichten Genauigkeit beträgt etwa $\frac{1}{100000}$ einer Wellenlänge.) Die sehr einfache Formel von Kayser und Runge ist bei grösstmöglicher Leichtigkeit der Constantenbestimmung, die nur die Auflösung einer Gleichung ersten Grades mit drei Unbekannten erfordert, von höchstem Werth für die exacte Prüfung und Controllirung der Messungsergebnisse, und hat auch zum Theil dazu gedient, die Serien festzustellen. Dennoch kann sie nicht als eigentlicher Ausdruck für das in der Natur waltende Gesetz der Spectralwirkungen gelten. Wenn schon die praktisch verwendete Formel nur dreigliedrig ist, so ist sie doch als eine in eine unendliche Reihe ausgehende Umgestaltung einer geschlossenen Function mit zweigliedrigem

1) H. Kayser u. C. Runge. Ueber die Spectren der Elemente, Berlin 1888 ff.

Nenner zu betrachten; und nur wenn es gelänge, diese geschlossene Function aufzufinden, würde man in ihr einen Anhaltspunkt für eine richtige Erklärung der Spectralerscheinungen besitzen. Es ist noch zu bemerken, dass die drei Constanten der abgekürzten Formel von Kayser und Runge in keinerlei nachweisbarem Zusammenhange untereinander stehen, dass jedoch die zweite Constante sich nur um wenige Procente von einem constanten Mittelwerth entfernt.

Einen solchen geschlossenen Ausdruck zu finden, war in letzter Zeit das Ziel meiner vielfach 'abgeänderten' Versuche, bei denen mich die freundliche Theilnahme des Hrn. Prof. E. Hagenbach immer wieder aufs neue ermunterte, wenn ich je und je die Hoffnung fahren liess, mich diesem Ziele nähern zu können.

Eine kurze erste Gelegenheit zur Einsicht in die Messungsergebnisse der Hrn. Kayser und Runge veranlasste mich, zunächst an den I. Linienserien von zwei Metallen, Lithium und Thallium, zu erproben, auf welche Weise der Aufgabe am sichersten beizukommen sei. Im Verfolg der sich hieran knüpfenden Rechnungen fiel mir u. a. auf, dass wenn man von einer Serie von Wellenlängen die Differenzen aufsucht, die Quotienten aus je zwei solchen unmittelbar aufeinander folgenden Differenzen eine fast genau zutreffende Reihe von höchst einfacher Form $(n+2):(n-1)$ bilden. Nur bei den grössten Wellenlängen ist die Abweichung ziemlich bedeutend. Beim Wasserstoffspectrum lässt sich das Gesetz dieser Reihe ganz genau ausdrücken durch die Formel:

$$\left\{ Q_n = \frac{(2n-1) \cdot (n-1) \cdot (n+3)}{(2n+1) \cdot (n+1) \cdot (n-3)} \right\}$$

wobei die Linien λ_{n-1} , λ_n , λ_{n+1} , zur Bildung der Differenzen benützt werden. Bei Vergleichung der entsprechenden Differenz-Quotienten des Thalliums mit denen des Wasserstoffs ist es nun auffallend, dass die betreffenden beiden Serien sich nicht decken, sondern dass die eine *zwischen* die Zahlen der andern intermittirend eingeschoben erscheint. Dieser Umstand lässt unzweifelhaft vermuthen, dass in der richtigen, geschlossenen Spectralformel das ganzzahlige n noch um irgend einen vielleicht constanten Bruchtheil zu ergänzen sei. So gelangte

ich zum Schluss, dass in der geschlossenen Wasserstoffformel statt des ganzzahligen n die gemischte Zahl $n+c$ einzuführen sei, um für andere Elemente die zutreffende Formel zu erhalten; und damit erhielt ich die Formel

$$\left\{ \lambda_n = a \frac{(n+c)^2}{(n+c)^2 - b} \right\}; \text{ oder } \left\{ \tau_n = A - \frac{B}{(n+c)^2} \right\}$$

Ich versuchte diese Formel zunächst an der Linienserie I des Lithiums. Aus früheren Versuchen hatte sich für die Constante a dieses Elementes der Werth von nahezu 2300 Ångströmeinheiten ergeben. Mit dem Werth 4 für b ergab sich für c der Werth 0,72332, und damit für die zweite Linie von 2741,39 gemessener Wellenlänge ein berechneter Werth von 2802, also um etwa 61 Einheiten zu viel. Für $a=2300$ und $b=3$ (statt 4) ergab die zweite Linie, mit der hieraus ermittelten Constanten $c=0,2245$, eine berechnete Wellenlänge = 2764,76, also immer noch um 23,37 Einheiten zu gross. Ein dritter Versuch mit $b=2,5$ brachte c auf den Werth $= -0,05646$, und damit die zweite Wellenlänge auf den berechneten Werth von 2740,56; jetzt also nur noch um 0,83 Einheiten zu klein. Die auf die folgenden Linien sich erstreckende Rechnung mittels dieser letzten Constantenbestimmung ergab ein durchschnittlich nur noch um $\frac{1}{4}$ Einheit von den gemessenen Wellenlängen abweichendes Resultat. Da dieser ersten Probe mit der neuen Formel nur ganz abgerundete Zahlen als erste und zweite Constante beigelegt waren, so überraschte mich das so nahe zutreffende Resultat in hohem Grade und befestigte mich in der Ueberzeugung, dass diese Formel ein möglichst adäquater Ausdruck für eine physikalische Wahrheit sei.

Hr. Prof. Albert Riggenbach bemerkte mir bei einer gelegentlichen Begegnung, es seien über das zuerst in der Chromosphäre und in einigen Orionsternen entdeckte und bis vor kurzem in irdischen Stoffen noch nicht aufgefundene, jedoch in jüngster Zeit als Clevëitgas in einigen Mineralien doch noch entdeckte Helium von den Hrn. Prof. Runge und Paschen äusserst genaue Messungen veröffentlicht worden, und dass sich diese Messungen wohl vorzugsweise für die Prüfung der geschlossenen Formel eignen dürften. Am nächsten Tage übersandte er mir mit der vollständigen allgemeinen Auflösung der durch die Formel bedingten Gleichung

dritten Grades mit drei Unbekannten die Zahlenreihen der drei doppelten und der weiteren drei einfachen Serien der Heliumlinien nach den Mittheilungen von Runge und Paschen¹⁾, nebst Angabe der von Lockyer als Heliumlinien beanspruchten Linien des Clevéitgases. — Hrn. Prof. Riggenbach für seine freundliche Unterstützung, seine Winke und sachlichen Mittheilungen hier bestens dankend, bemerke ich weiter, dass ich die mir mitgetheilten Zahlen der Rechnung unterzog und die auf nachfolgender Tabelle übersichtlich zusammengestellten Resultate fand. Bei den Doppelserien I, III und V haben Kayser und Paschen die kürzesten Linienpaare nicht mehr getrennt aufgeführt, wohl weil diese Paare für eine genaue Beobachtung zu enge zusammengerückt und zu schwach sind; die gegebenen einfachen Zahlen sind daher auch mit einer Decimalstelle weniger angegeben als die doppelten Linien der Serien.

Bei der Berechnung der Constanten beeinflusst die Wahl der Linien, die man dabei zu Grunde legt, das Ergebniss ausserordentlich stark; besonders bei den längsten Wellen macht sich dieser Einfluss sehr fühlbar. Eine infolge minimier Beobachtungsfehler nur wenig von der wirklichen Wellenlänge abweichende Werthung der Wellenlängen verändert die Constantenberechnung schon sehr merklich, und dieser Umstand muss sich bei den grössten Wellenlängen mit den kleinsten n am meisten und empfindlichsten geltend machen, weniger durch den Einfluss der Constanten a und b , als durch denjenigen von c . Wenn daher hie und da bei den längsten Wellen einer Serie sich Abweichungen der Berechnung nach der Formel von der Beobachtung zeigen, so dürfte dieselbe weniger auf Rechnung der Formel, als auf diejenige der sehr schwierigen Constantenbestimmung gesetzt werden. Es lässt sich vermuthen, dass bei solchen Serien, bei denen in den längsten Wellen Beobachtung und Rechnung auseinander gehen, eine richtige Variation in den Constanten noch völlige Uebereinstimmung bewirken könnte.

Für die geschlossene neue Formel spricht ihre grosse

1) Mathem. u. Naturw. Mittheilungen der k. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. p. 323 u. 377. 1895.

Einfachheit, welcher nur die Einfachheit der bewährten Wasserstoffformel an die Seite gestellt werden kann; ferner der innige Zusammenhang mit letzterer, welche sich nur als einen speciellen Fall der neuen Formel erweist, indem letztere für $b=4$, und $c=0$ in jene übergeht. Ein weiterer Vorzug der neuen Formel scheint darin zu liegen, dass es nun auch ganz gleichgültig ist, welchen ganzzahligen Werth man der Ordnungszahl n beilegt, sobald nur die Reihenfolge der zu einer Serie gehörigen Linien lückenlos fortschreitet und damit auch die Ordnungszahl n lückenlos anwächst. Denn um so viel, als n grösser oder kleiner angenommen wird, compensirt sich der kleinere oder grössere Werth der Ergänzungsconstante c .

Was die Bedeutung der drei Constanten betrifft, so ist diejenige der Constanten a ganz klar: sie bezeichnet den Grenzwert, in welchen die Reihe der Wellenlängen einer Linienserie ausläuft. Die Constante c dagegen bezeichnet eine Verschiebung, durch welche die ganzzahligen Werthe von n um einen für ein und dieselbe Serie constanten Bruchtheil vergrössert oder verkleinert werden. Die räthselhafteste Bedeutung kommt der Constante b zu, um welche im Nenner der Wellenlängensformel das Quadrat von $n+c$ vermindert wird. Diese Constante scheint den Charakter einer quadratischen Grösse zu haben. Denn wenn man in der typischen Wasserstoffformel diese Constante b von 4 auf 1 vermindert, so bleiben nur die Wellenlängen der ursprünglich paarigen n übrig, und die unpaaren Wellenlängen fallen aus, sodass gleichsam die Curve der Wellenlängen auf die Hälfte verkürzt wird, eine Veränderung, welche sich auch bei andern für b eingesetzten quadratischen Werthen in entsprechender Weise wiederholt.

Bei der Constanten b zeigt sich ein ganz merkwürdiges Verhältniss zur Constanten a . Wenn man nämlich bei irgend einer Linienserie a durch b dividirt, so erhält man eine Zahl, welche dem entsprechenden Quotienten des einfachen Wasserstoffspectrums bis auf etwa $\frac{1}{3}$ Proc. nahe kommt. Letzterer ist gleich $3645,6/4 = 911,4$. Und der entsprechende Quotient beträgt bei den Heliumserien I α und β , II und IV etwas über 910, also etwa 1 Proc. weniger als bei Wasserstoff; bei Serie III α und β über 905, bei Serie V α und β und bei Serie VI nahezu 913. Bei Lithium Serie I (einfache Serie)

ergiebt die Berechnung der 3 Constanten aus den Linien 1, 4 und 7 für a die Zahl: 2299,401, für b : 2,514417; dagegen aus den Linien 1, 3 und 5 für a : 2298,643; für b : 2,536159. Der Quotient aus jenen Constanten ergiebt 914,48, aus den letzteren dagegen nur 906,20. Das Mittel aus beiden Ergebnissen ist wieder 910,34. Wie schon bemerkt, ist es möglich, dass durch nie zu vermeidende kleinste Beobachtungsfehler solche abweichende Werthe entstehen, sodass hieraus noch kein maassgebender Schluss auf die Unrichtigkeit der Formel darf gezogen werden. Es schliesst diese auffallende Annäherung an einen constanten Mittelwerth jedenfalls nicht aus, dass in diesen Verhältnissen ein sachlicher Zusammenhang vorliege, der uns, wie noch so vieles andere in der Natur, Räthsel aufgiebt, deren Lösung zu versuchen stets einen unwiderstehlichen Reiz ausübt.

Nachtrag.

Durch die Güte des Hrn. Prof. Hagenbach, der mir die Abhandlungen der Hrn. Kayser und Runge in den letzten Tagen zum Zweck eingehenderen Studiums für einige Zeit zur Benutzung zugestellt hat, habe ich Gelegenheit erhalten, ausser den eigentlichen Messungsergebnissen auch noch die höchst interessanten Mittheilungen über eine Formel kennen zu lernen, welche der schwedische Gelehrte Rydberg schon vor einigen Jahren aufgestellt hat.¹⁾ Mit Rydberg's Formel stimmt die oben besprochene geschlossene Formel fast ganz überein, mit dem einzigen Unterschied, dass er die Constante $B = b/a$ der letzteren, statt bei jedem besondern Elemente einen besondern Werth derselben vorauszusetzen, für alle Elemente gleich gross annimmt: = 109721,6 (Reciproke von 911,4 des Wasserstoffs), also gleichwerthig mit der entsprechenden Constanten der Wasserstoffformel. Es ist zu vermuthen, dass Rydberg diesen Werth seiner Formel deswegen zu Grunde gelegt hat, weil derselbe den Mittelwerth der entsprechenden Constanten aller übrigen Elemente darstellt und weil zugleich durch diese Annahme die Berechnung der beiden übrigen Constanten sich ausserordentlich vereinfacht, während eine directe Bestimmung

1) Kayser u. Runge, Spectren der Elemente, 4. Heft, Nachtrag p. 61.

aller drei Constanten aus drei gemessenen Wellenlängen, bez. deren Reciproken, die ziemlich umständliche Auflösung einer Gleichung dritten Grades erfordert.

Die Hrn. Kayser und Runge haben nun nachgewiesen, dass die ursprüngliche Rydberg'sche Formel zu weniger befriedigenden Ergebnissen führt, als ihre gekürzte Reihenformel; dennoch schreibt Rydberg seiner Formel einen grössern Anspruch auf Richtigkeit zu.

Kayser und Runge haben noch weiter gezeigt, dass selbst eine Modification der Rydberg'schen Formel durch Einführung specieller Werthe für die Constante B in dessen Formel

$$\{\tau_n = A - B (n+c)^{-2}\}$$

noch keine besseren Ergebnisse liefert, als ihre auf 3 Glieder beschränkte Potenzreihenformel. Da aber Kayser und Runge nicht angeben, wie sie den Werth der Constanten B bestimmt haben, so lässt sich als wahrscheinlich voraussetzen, dass sie die aus ihrer eigenen Formel abgeleiteten Werthe von B bei dieser Modification zu Grunde gelegt haben. Damit ist jedoch die Richtigkeit der modificirten Rydberg'schen Formel, wie auch ich sie unabhängig von seiner Veröffentlichung gefunden habe, noch nicht widerlegt. Denn die directe Bestimmung der drei Constanten der Formel

$$\{\tau_n = A - B \cdot (n+c)^{-2}\} \quad \text{oder} \quad \left\{ \lambda_n = a + \frac{b}{(n+c)^2 - b} \right\}$$

wobei $A=1/a$ und $B/A=b$ zu nehmen ist, führt doch zu andern Werthen für B als die Formel

$$\{\tau_n = A - B \cdot n^{-2} - C \cdot n^{-4}\}$$

Da die Abweichungen der zweiten Constanten B von einem Mittelwerth in beiden Formeln für alle Elemente verhältnissmässig gering sind, so sehen sich die Hrn. Kayser und Runge zu der Bemerkung veranlasst: „Rydberg's Annahme ist möglicherweise soweit richtig, dass in dem noch verborgenen wahren Gesetze dieser Constanten überall ein und derselbe Werth entspricht.“¹⁾

1) Kayser u. Runge, Ueber die Spectren der Elemente, IV. Abschnitt, p. 63.

Wellenlängen des Heliums

Serie I α und β				Serie II			Serie III α und β			
α ber. a. d. Linien 1, 3, 9				berechnet aus 1, 4, 7			α berechnet aus 1, 3, 5			
β „ „ „ „ 1, 3, 7							β „ „ „ 1, 3, 5			
α		β					α		β	
$a = 3420,96$		$3420,99$		$a = 3120,797$			$a = 2599,342$		$2599,317$	
$b = 3,758942$		$3,756648$		$b = 3,427311$			$b = 2,871562$		$2,869745$	
$c = 1,999392$		$1,998615$		$c = 2,011946$			$c = 1,942689$		$1,941889$	
n	beob.	ber.	Diff.	beob.	ber.	Diff.	beob.	ber.	Diff.	
1	5876,206	5876,206	0	5015,73	5015,73	0	3888,97	3888,97	0	
	5875,883	5875,880	-0,03							
2	4471,85	4471,870	+0,02	3965,08	3965,031	-0,049	3187,98	3188,313	+0,333	
	4471,66	4471,610	-0,05							
3	4026,52	4026,523	+0,003	3613,89	3613,872	-0,018	2945,57	2945,57	0	
	4026,35	4026,350	0							
4	3819,89	3819,891	+0,001	3447,73	3447,73	0	2829,32	2829,406	+0,086	
	3819,75	3819,770	+0,02							
5	3705,29	3705,247	-0,043	3354,7	3354,635	-0,065	2764,01	2764,01	0	
	3705,15	3705,16	+0,01							
6	3634,52	3634,451	-0,069	3296,9	3296,817	-0,083	2723,3	2723,302	+0,002	
	3634,39	3634,39	0							
7	3587,54	3587,461	-0,079	3258,3	3258,300	0	2696,5	2696,153	-0,347	
	3587,42	3587,42	0							
8	3554,5	3554,59	+0,09	3231,3	3231,276	-0,024	2677,1	2677,101	+0,001	
		3554,56	+0,06							
9	3530,6	3530,65	+0,05	3213,4	3211,565	-1,885				
		3530,63	+0,03							
10	3512,6	3512,66	+0,06							
		3512,65	+0,05							
11	3498,7	3498,78	+0,08							
		3498,78	+0,08							
12	3487,8	3487,85	+0,05							
		4487,85	+0,05							
13	3479,2	3470,09	+0,11							
		3479,09	+0,11							

Rydberg fand, dass bei allen Elementen die Curve, welche die Endpunkte der als Ordinaten aufgetragenen Wellenlängen bei gleichen Intervallen der als Abscissen betrachteten n verbindet, einer Hyperbel ähnlich sei, da jene Curve sich

beobachtet und berechnet.

Serie IV berechnet aus 2, 3, 4			Serie V α und β α berechnet aus 2, 5, 8 β „ „ 2, 5, 8 α β $a = 3421,275$ $3421,109$ $b = 3,746848$ $3,747853$ $c = 1,696996$ $1,697828$			Serie VI berechnet aus 1, 4, 7 $a = 3679,022$ $b = 4,027016$ $c = 1,852937$			n
beob.	ber.	Diff.	beob.	ber.	Diff.	beob.	ber.	Diff.	
6678,1	6677,5	-0,6	7065,77(phot.)	7055,86	- 9,91	7281,8	7281,81	+ 0,01	1
			7065,51(phot.)	7054,88	-10,68				
4922,08	4922,08	0	4713,39	4713,39	0	5047,82	5048,529	+ 0,709	2
			4713,17	4713,17	0				
4388,11	4388,11	0	4121,15	4121,196	+ 0,046	4437,73	4437,859	+ 0,129	3
			4120,98	4121,047	+ 0,067				
4148,91	4148,91	0	3867,77	3867,790	+ 0,02	4169,12	4169,12	0	4
			3867,61	3867,652	+ 0,042				
			3733,15	3733,15	0	4024,14	4024,083	- 0,057	5
			3733,01	3733,01	0				
			3652,29	3652,261	- 0,029	3936,1	3936,051	- 0,049	6
			3652,15	3652,118	- 0,032				
			3599,59	3599,588	- 0,002	3878,3	3878,3	0	7
			3599,45	3599,443	- 0,007				
			3563,26	3563,26	0	3838,2	3838,237	+ 0,037	8
			3563,11	3563,11	0				
			3536,9	3536,946	+ 0,046	3808,3	3809,256	+ 0,956	9
			3517,5	3517,452	- 0,048				10
			3502,5	3502,530	+ 0,03				11
			3490,8	3490,839	+ 0,039				12
			3481,5	3481,514	+ 0,014				13

sowohl einer Parallele der Abscissenaxe als der Ordinatenaxe asymptotisch nähert.

Prüfen wir die Natur der Curve zunächst beim einfachen Wasserstoffspectrum, welches die einfachsten und klarsten

Verhältnisse darbietet, so erweist sich dieselbe, wenn man sie für alle, auch die negativen Werthe von n construirt, als eine Curve dritten Grades mit drei Asymptoten (S. Tafel.) Die eine horizontale Asymptote befindet sich in der Entfernung gleich a über der Abscissenaxe; links und rechts von der Ordinatenaxe, parallel mit dieser und je um $2n$ entfernt steht je eine senkrechte Asymptote. Die Curve selbst hat drei Zweige: zwei hyperbelähnliche über der horizontalen Asymptote, und durch den $4n$ breiten Raum zwischen den beiden senkrechten Asymptoten voneinander getrennt, und einen dritten zwischen diesen senkrechten Asymptoten, dessen Scheitel im Coordinatenanfang liegt und dessen beiden Aeste im Unendlichen einen Uebergang in die senkrecht auslaufenden Aeste der beiden hyperbelartigen Zweige bilden.

Die Curve der Reciproken der Wellenlängen des Wasserstoffspectrums lässt sich, $a = 4n$ als Einheit angenommen, leicht in ihrer Beziehung zur Wellenlängencurve darstellen. Die Reciprokencurve ist wieder eine Curve dritten Grades und besteht nur aus zwei, abermals hyperbelartigen Zweigen, welche mit der Wellenlängencurve dieselbe horizontale Asymptote gemeinschaftlich, und als einzige senkrechte Asymptote die Ordinatenaxe haben. Diese Zweige durchschneiden die Fusspunkte der senkrechten Asymptoten der Wellenlängencurve und nähern sich der Ordinatenaxe unterwärts asymptotisch, sodass sie im Unendlichen einen Rückkehrpunkt bilden.

In der beiliegenden Zeichnung (Tafel II) ist XX' die Abscissenaxe, YY' die Ordinatenaxe, O der Coordinatenanfang; AA' die horizontale Asymptote, II II' und $2II^2$ sind die vertikalen Asymptoten; α β γ etc. die Wellenlängencurve des Wasserstoffs; a α die Wellenlänge λ_3 ; b $\beta = \lambda_4$ etc. Die Reciprokencurve ist B II α' β' γ' etc., wobei a α' die Reciproke von λ_3 , b β' die Reciproke von λ_4 oder b β ; etc. Von den aus drei, bez. zwei Zweigen der Wellenlängencurve und der Reciprokencurve ist nur die eine Hälfte gezeichnet, die andere Hälfte ist symmetrisch zur Ordinatenaxe zu ergänzen.

Die dargestellten Wellenlängen sind im 50 000-fachen Maassstabe der wirklichen Grösse gezeichnet.

Auf der rechten Hälfte der Zeichnung ist eine ganz einfache Construction der Wellenlängen des Wasserstoffs ange-

deutet. Wenn OA auf der Ordinatenaxe die Constante a oder die untere Grenze der Wellenlängen des Wasserstoffs bezeichnet, und man mit dieser Grösse $= 3645,6$ Ångströmeinheiten einen Kreis über dem Durchmesser AO beschreibt, auf der Abscissenaxe XX' die $n=1, 2, 3$ etc. (die Einheit $1 \cdot n - \frac{1}{4} a = 911,4$ genommen) aufträgt, und von den Endpunkten dieser n aus die Tangenten über den Kreisumfang hinweg zieht bis zum Schnitt mit der Ordinatenaxe, so werden auf letzterer die Wellenlängen abgeschnitten $= O\lambda_3, O\lambda_4$ etc.

Der Beweis für die Richtigkeit der Construction liegt auf der Hand.

Vielleicht ist diese Construction geeignet, in die räthselvollen Erscheinungen der Spectrallinien ein neues Licht zu bringen und auf den richtigen Weg zu führen, die wahre geschlossene Formel für die Spectralwellen zu finden, falls diese in der Rydberg'schen Formel noch nicht gefunden sein sollte.

Der schliessliche Eindruck, der in diesen urelementaren Verhältnissen sich unserm betrachtenden Geiste unwillkürlich aufdrängt, ist der einer unerschöpflich weisheitsvollen Einrichtung der Natur, die mit nie fehlbarer Sicherheit Functionen vollzieht, denen der denkende Geist nur mühsam und demüthigender Unvollkommenheit nachzufolgen vermag.