Der Satz der Variationsrechnung, welcher dem Principe der kleinsten Wirkung in der Mechanik entspricht.

Von A. MAYER in LEIPZIG.

Wie das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft, so ist auch das Princip der kleinsten Wirkung nur der specielle Fall eines weit allgemeineren Satzes der Variationsrechnung. Dieser letztere Satz, der, soviel ich weiss, bisher noch nicht bemerkt worden ist, soll hier in elementarer Weise, d. h. ohne Benutzung der Hamilton'schen Theorie abgeleitet werden. Man wird aber ohne Schwierigkeit erkennen, dass derselbe im Grunde nichts Anderes ist, als eine Interpretation jener bekannten Zurückführung der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung für den Fall, wo dieselbe die Grundvariable nicht explicite enthält, auf eine partielle Differentialgleichung mit einer Variablen weniger. (Vgl. hierüber Jacobi, Dynamik, 19. und 21. Vorlesung).

Es seien $y, y_1, y_2 \dots y_n$ unbekannte Functionen von x und zwischen ihnen die Bedingungsgleichungen:

$$(1) \quad \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots \varphi_m = 0$$

vorgeschrieben, deren Anzahl selbstverständlich $< n + 1$ angenommen wird und in denen die Differentialquotienten der y nicht vorkommen sollen. Es bezeichne ferner f eine gegebene Function der Variablen y und ihrer ersten Differentialquotienten y' .

Dann führt bekanntlich die Aufgabe:

„Die den m Bedingungen (1) unterworfenen Functionen $y, y_1 \dots y_n$ so zu bestimmen, dass die erste Variation des Integrales

$$(2) \quad V = \int_{x_0}^{x_1} f dx$$

gleich Null wird“

auf die $n + 1$ Differentialgleichungen:

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'}$$

welche in Verbindung mit den m Gleichungen (1) hinreichen, um die gesuchten Functionen y , sowie die Multiplicatoren λ bis auf eine gewisse Anzahl willkürlicher Constanten zu bestimmen.

Sind überdies, natürlich unter Beachtung der Gleichungen (1), die Werthe gegeben, welche die Variabeln y in den beiden gegebenen Grenzen a_0 und a_1 annehmen sollen, so lösen die durch Integration des Systems (1), (3) erhaltenen Functionen y das obige System vollständig, sobald man in ihnen die willkürlichen Constanten aus diesen Grenzbedingungen bestimmt hat.

Dies vorausgeschickt, nehme ich an, dass weder die Function f , noch auch die Functionen φ die unabhängige Variable x selbst enthalten.

Dann ist stets:

$$(4) \quad y' \frac{\partial f}{\partial y'} + y_1' \frac{\partial f}{\partial y_1'} + \cdots y_n' \frac{\partial f}{\partial y_n'} - f = h$$

ein Integral der Gleichungen (1), (3). In der That sieht man leicht, dass der Differentialquotient dieses Ausdruckes identisch verschwindet durch die Gleichungen (3) und durch diejenigen Gleichungen, die man aus (1) durch Differentiation erhält.

Die Variable x kommt auch in der Gleichung (4) nicht vor. Führt man daher y an Stelle von x als unabhängige Variable ein, indem man allgemein setzt:

$$y_i' = \frac{dy_i}{dy} \cdot y',$$

so wird die Gleichung (4), nach y' aufgelöst, für diese Grösse einen Werth von der Form liefern:

$$y' = w,$$

worin w eine Function ist von

$$y \ y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n \ \frac{dy_1}{dy} \ \frac{dy_2}{dy} \ \cdots \ \frac{dy_n}{dy}.$$

Indem man diesen Werth von y' , sowie die aus ihm folgenden Werthe von:

$$(5) \quad y_i' = \frac{dy_i}{dy} \cdot w$$

in f einsetzt, wird dieses ebenfalls eine Function jener Grössen, und wenn man diese Function mit F bezeichnet, so hat man durch (5) identisch:

$$(6) \quad f = F.$$

Durch partielle Differentiation nach y_i und $\frac{dy_i}{dy}$ entsteht hieraus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_i} &= \frac{\partial f}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial y_1'} \frac{\partial y_1'}{\partial y_i} + \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n'} \frac{\partial y_n'}{\partial y_i} \\ \frac{\partial F}{\partial \frac{dy_i}{dy}} &= \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \frac{dy_i}{dy}} + \frac{\partial f}{\partial y_1'} \frac{\partial y_1'}{\partial \frac{dy_i}{dy}} + \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n'} \frac{\partial y_n'}{\partial \frac{dy_i}{dy}}. \end{aligned}$$

Nach (5) ist aber:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_k'}{\partial y_i} &= \frac{dy_k}{dy} \frac{\partial w}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_k'}{\partial \frac{dy_i}{dy}} &= \frac{dy_k}{dy} \frac{\partial w}{\partial \frac{dy_i}{dy}} \quad \text{für } k \geq i \text{ und:} \\ \frac{\partial y_i'}{\partial \frac{dy_i}{dy}} &= \frac{dy_i}{dy} \frac{\partial w}{\partial \frac{dy_i}{dy}} + w.\end{aligned}$$

Führt man diese Werthe in die obigen Formeln ein und macht von der aus (4), (5) und (6) folgenden Relation

$$w \left\{ \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y_1'} \frac{dy_1}{dy} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n'} \frac{dy_n}{dy} \right\} = F + h$$

Gebrauch, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y_i} &= \frac{\partial f}{\partial y_i} + \frac{F+h}{w} \frac{\partial w}{\partial y_i} \\ \frac{\partial F}{\partial \frac{dy_i}{dy}} &= w \frac{\partial f}{\partial y_i'} + \frac{F+h}{w} \frac{\partial w}{\partial \frac{dy_i}{dy}}\end{aligned}$$

und hieraus erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y_i} &= w \frac{\partial \frac{F+h}{w}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f}{\partial y_i'} &= \frac{\partial \frac{F+h}{w}}{\partial \frac{dy_i}{dy}}.\end{aligned}$$

Substituirt man endlich diese Werthe in die n letzten Gleichungen (3), dividirt durch w und setzt:

$$(7) \quad \begin{aligned}dx &= \frac{1}{w} dy, \\ \frac{\lambda_k}{w} &= \mu_k,\end{aligned}$$

so gehen diese Gleichungen über in:

$$(8) \quad \frac{\partial \frac{F+h}{w}}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{k=n} \mu_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} = \frac{d}{dy} \frac{\partial \frac{F+h}{w}}{\partial \frac{dy_i}{dy}}.$$

Die Lösungen des Systems (1), (3) erfüllen mithin, nachdem man in ihnen vermittelst des Werthes von y diese Variable an Stelle von x als unabhängige Variable eingeführt hat, auch die n Gleichungen (8) identisch.

Diese Gleichungen sind aber nichts Anderes als die Differentialgleichungen des Problems:

„Unter der Voraussetzung, dass stets die Bedingungen (1) erfüllt sein sollen, diejenigen Functionen $y_1, y_2, \dots, y_n$ zu finden, für welche die erste Variation des Integrales

$$(9) \quad W = \int_{b_0}^{b_1} \frac{F+h}{w} dy$$

verschwindet.“

Schreibt man daher in diesem zweiten Integrale den Grenzen b_0 und b_1 von y , sowie den Grenzwerten von $y_1, y_2, \dots, y_n$ dieselben Werthe vor, die diese Variablen in der ersten Aufgabe für $x = a_0$ und $x = a_1$ annehmen sollten, und giebt der Constanten h den Werth, den sie dort erhält, so bringen die Lösungen des ersten Problems gleichzeitig und unter denselben Beschränkungen (1) auch die erste Variation des Integrales (9) zum Verschwinden.

Das Integral (9) aber entsteht aus dem Integrale:

$$(10) \quad \int_{a_0}^{a_1} dx \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} + y_1' \frac{\partial f}{\partial y_1'} + \dots + y_n' \frac{\partial f}{\partial y_n'} \right),$$

wenn man die unabhängige Variable x mittelst der Gleichung (4) eliminirt.

Hat man umgekehrt die allgemeinen Gleichungen (1), (8) des zweiten Problems vollständig integrirt, so braucht man, um die vollständigen Lösungen der Gleichungen des ersten Problems zu erhalten, nur noch die eine Quadratur:

$$x + \text{const.} = \int \frac{1}{w} dy$$

auszuführen. —

Dass dieser Satz in der That das Princip der kleinsten Wirkung als speciellen Fall enthält, zeigt sich sofort, wenn man

$$x = t, \quad f = T + U$$

setzt, wo U eine Function der Coordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$, die jetzt an die Stelle der unbekannten Functionen y treten, und

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

ist. Denn hierdurch verwandelt sich das Integral (2) in das Hamilton'sche Integral

$$\int (T + U) dt,$$

die Gleichung (4) in den Satz der lebendigen Kraft

$$T = U + h$$

und das Integral (10) in das Integral des Principes der kleinsten Wirkung

$$\int dt \cdot 2T = \int \sum_i m_i v_i ds_i. —$$

Der obige Satz ist übrigens auch einer Ausdehnung auf den allgemeinen Fall der Variationsrechnung fähig, d. h. man kann entsprechende Sätze auch für den Fall aufstellen, wo die Bedingungsgleichungen (1) die Differentialquotienten y' enthalten. Nur, weil in das Integral, welches alsdann an die Stelle der Gleichung (4) tritt, auch die Multiplicatoren λ eingehen, scheint hier nichts zu existiren, was dem Principe der kleinsten Wirkung vollkommen analog wäre. Wichtiger aber als diese directe Verallgemeinerung dürfte ein damit nahe verwandter Satz sein, der Satz nämlich, dass man im Allgemeinen immer eine der Bedingungsdifferentialgleichungen ganz eliminiren kann, sobald weder in dem Integrale, noch in den Bedingungsgleichungen die unabhängige Variable explicite auftritt.

In der That, die Differentialgleichungen des Problems

$$\delta \int f dx = 0$$

zu machen, während zwischen den unbekannten Functionen y die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\varphi = 0$$

besteht, sind:

$$(11) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y'_i},$$

worin $\Omega = f + \lambda \varphi$ ist, und wenn weder f noch φ die Variable x selbst enthält, so gilt das Integral:

$$(12) \quad \sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial y'_i} y'_i - f = h.$$

Unter dieser Annahme und vorausgesetzt, dass φ nicht gerade homogen in Bezug auf die Differentialquotienten y' ist, kann man aber, wenn man wieder

$$y'_i = \frac{dy_i}{dy} y'$$

setzt, aus der Gleichung $\varphi = 0$ y' ausdrücken durch

$$y \ y_1 \dots y_n, \ \frac{dy_1}{dy} \dots \frac{dy_n}{dy},$$

und wenn man diesen Werth mit ω und mit F denjenigen Ausdruck bezeichnet, in den f durch die Substitutionen:

$$y'_i = \frac{dy_i}{dy} \cdot \omega$$

übergeht, so hat man durch diese Substitutionen identisch:

$$\Omega = F.$$

Indem man diese Identität nach y_i und $\frac{dy_i}{dy}$ differentiirt, das In-

tegral (12) anwendet und mit Hülfe der auf diese Weise erhaltenen Werthe von

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}$$

die Differentialgleichungen (11) umformt, sieht man auf ganz demselben Wege wie vorhin, dass die Lösungen der Differentialgleichungen des betrachteten Problems gleichzeitig auch die n Differentialgleichungen lösen:

$$-\frac{\partial \frac{F+h}{\omega}}{\partial y_i} = \frac{d}{dy} \frac{\partial \frac{F+h}{\omega}}{\partial \frac{dy_i}{dy}}.$$

Diese Gleichungen sind aber die Differenzialgleichungen des unbeschränkten Problems: diejenigen Functionen $y_1 y_2 \dots y_n$ zu finden, welche die erste Variation des Integrales

$$\int \frac{F+h}{\omega} dy$$

zum Verschwinden bringen, und dieses Integral erhält man aus dem Integrale

$$\int \sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} y_i' dx,$$

indem man x mittelst der Bedingungsgleichung $\varphi = 0$ und λ mittelst des Integrales (12) eliminirt.

Wären ausser der Bedingung $\varphi = 0$ noch andere Bedingungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\dots$ gegeben, entweder zwischen den Functionen y allein, oder zwischen diesen und ihren ersten Differentialquotienten, jedoch immer ohne x , so hätte man in dem Vorhergehenden nur überall $f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots$ statt f zu setzen.

Wendet man dies Resultat beispielsweise auf die Aufgabe an: x, y, z als Functionen von s so zu bestimmen, dass

$$\delta \int f(x, y, z) ds = 0$$

werde, während stets:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

sein soll, so erhält man mit Rücksicht auf die statische Bedeutung dieser Aufgabe den Satz:

Die Gleichgewichtslage eines unausdehnbaren Fadens, der an seinen beiden Enden befestigt ist und von Kräften gespannt wird, die eine Kräftefunction $f(x, y, z) = U$ besitzen, bestimmt sich aus der Bedingung:

$$\delta \int (U + h) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = 0;$$

und dies ist der wahre Ausdruck des Princip, welches Möbius in § 305 seines Lehrbuchs der Statik als Analogon des Princip der kleinsten Wirkung für das Fadengleichgewicht aufstellt und dort so ausspricht, dass das Integral $\int T ds$ für die Fadencurve ein Maximum oder Minimum sei. Es ist aber hinzuzufügen, dass man die Spannung T durch dasjenige Integral der statischen Gleichungen, welches dem Satze der lebendigen Kraft in der Dynamik entspricht, und ds durch die Bedingung der Unausdehnbarkeit des Fadens eliminiren muss.