**XVI. Ueber Schwankungen des Meeresspiegels
infolge von geologischen Veränderungen;
von K. Zöppritz.**

Die Oberfläche des Oceans ist, sofern man von den durch Gezeiten, Luftdruckdifferenzen und Winde hervorgerufenen Schwankungen absieht, eine Niveaulfläche der Kräftefunction der Erde, d. h. eine Oberfläche, auf welcher überall die Kräftefunction, die sich aus dem Gravitationspotentiale der Erde und dem Potentiale der Centrifugalkraft zusammensetzt, einen constanten Werth besitzt. Für die Bestimmung des Potentials der Erde auf andere Himmelskörper genügt es, dieselbe als aus homogenen, annähernd centrobarischen Schichten zusammengesetzt zu denken und den Unterschied zwischen dem Hauptträgheitsmomente um die Rotationsaxe und demjenigen um einen Aequatordurchmesser als so klein anzunehmen, dass die zweite Potenz seines Verhältnisses zum ganzen Trägheitsmoment vernachlässigt werden kann. Obwohl die alltägliche Erfahrung lehrt, dass wenigstens die äussere Schale der Erde aus Bestandtheilen von sehr verschiedener Dichte besteht und die Bedingung, ein Attractionscentrum zu besitzen, gar nicht oder doch nur in sehr unvollkommenem Grade erfüllt, so ist für Körper, die wenigstens die Entfernung des Mondes haben, doch die zu vorgenannte Annäherung ausreichend, weil die Schale, worin die Unregelmässigkeiten der Massevertheilung vorkommen, nur einen sehr kleinen Bruchtheil der Gesamtmasse der Erde bilden und in den Ausdruck für das Potential alle diese Massen mit sehr grossen Divisoren, den Entfernungen, versehen eingehen.

Anders verhält es sich, wenn man das Gravitationspotential für einen Punkt der Erdoberfläche bilden will. Hier erhalten die zunächst um den Punkt gelegenen Massetheilchen kleine Divisoren und üben deshalb auf den Werth der Summe erheblichen Einfluss aus, und jede Unregelmässigkeit in der Massenordnung macht sich im Werthe des Potentials sofort bemerklich. Indem sonach die Kräftefunction der Erde an

der Erdoberfläche von den Unregelmässigkeiten ihrer Bildung beeinflusst wird, kann auch die Niveaufläche des Oceans keine Fläche von einfachem, einheitlichem Bildungsgesetze sein, sondern sie muss eine unregelmässige, von der Vertheilung von Meer und Festland, Ebene und Gebirg beeinflusste Gestalt haben, die allerdings von einem Rotationssphäroid nur verhältnissmässig geringe Abweichungen zeigt.

Die Mittel und Wege, solche Unregelmässigkeiten aufzufinden und aus der bekannten Configuration von Land und Meer zu berechnen, hat zuerst G. G. Stokes in einer wenig bekannt gewordenen Abhandlung: *On the variation of gravity at the surface of the earth*¹⁾ entwickelt; später unabhängig und mehr von practischen Gesichtspunkten ausgehend Ph. Fischer in seinen „Untersuchungen über die Gestalt der Erde“.²⁾ Die allgemeinen Eigenschaften der Niveauflächen der Erde, die von Listing³⁾ sogenannten Geoide hat Herr Bruns in seiner bedeutsamen Abhandlung „Die Figur der Erde“⁴⁾ vollständig untersucht und aufgeklärt. Derselbe hat auch, indem er für die Continente und Oeane der Erde eine einfache, der wirklichen ähnliche, schematische Massevertheilung substituirt, die Abweichungen der Meeresoberfläche von dem regelmässigen Sphäroid für Punkte des Aequators von je 5° Längendifferenz bestimmt und Niveauunterschiede von gegen 1000 m als möglich erkannt.

Für den längs der Normale gemessenen Abstand zwischen Sphäroid und Geoid hat Bruns eine sehr einfache Formel entwickelt.⁵⁾ Bezeichnet man für einen Punkt der Erdoberfläche mit T die Differenz zwischen dem Potentialwerthe des Geoids und dem des regelmässigen Sphäroids, ferner mit γ die theoretische Schwere auf dem letztern und mit ϵ die Lothablenkung, so ist der gesuchte Abstand:

$$h = -\frac{T}{\gamma \cos \epsilon},$$

1) G. G. Stokes, Trans. of the phil. soc. of Cambridge. 8. part 5. 1849.

2) Ph. Fischer, Untersuch. üb. d. Gestalt d. Erde. Darmstadt 1868.

3) Listing, Nachr. d. k. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen. 1873. p. 41.

4) Publication d. k. preuss. geodätischen Instituts. Berlin 1878.

5) Bruns, l. c. p. 20.

Bruns zeigte nun, wie unter der Voraussetzung, dass Unregelmässigkeiten der Massevertheilung nicht im Erdinnern, sondern nur in der ungleichen Vertheilung von Land und Meer über die Oberfläche bestehen, die Grösse T betrachtet werden kann als das Potential 1) des über dem Meeresniveau hervorragenden festen Landes mit der mittlern Dichte $k_2 = 2,5$ und 2) der Meere mit der mittlern Dichte $k_1 = 1 - k_2 = -1,5$. Bezeichnet man dieses Potential mit $-\Omega$ und bemerkt, dass ε immer nur wenige Secunden beträgt, sein Cosinus also von der Einheit kaum verschieden ist, so wird:

$$h = \frac{\Omega}{\gamma},$$

worin man überdies ohne erheblichen Fehler statt des theoretischen den wahren Werth der Schwere setzen kann. — Diese Gleichung hat schon Dahlander¹⁾ für die Niveauveränderung einer unendlich ausgedehnten Meeresfläche durch einen nahe derselben befindlichen Körper von beschränkter Ausdehnung aufgestellt und auf einige specielle Formen einer solchen Masse angewandt.

Jede Aenderung in der Vertheilung der Massen auf der Erdoberfläche wird eine Veränderung des Potentials und somit eine Niveauschwankung, d. h. eine Aenderung des Abstandes h zwischen dem regelmässigen Sphäroid und dem wirklichen Geoid hervorrufen, und zwar wird, falls die Massenverschiebung nur einen kleinen Theil der Oberfläche betrifft, die Potentialänderung und also auch die Niveauschwankung vorzugsweise auf diesem Theile merklich sein. — Solche Masseverschiebungen werden nun durch geologische Vorgänge wie Erosion und Sedimentablagerung, ferner durch säculare Hebungen und Senkungen zum Ausgleich innerer Spannungen der Erdrinde auf deren Oberfläche in ausgedehntem Maasse hervorgebracht und lassen sich hinsichtlich ihrer Grösse und Ausdehnung an vielen Stellen annähernd ausmessen. Es ist sicherlich von Interesse, zu untersuchen, wie gross die Niveauänderungen sind, welche durch bestimmte Sedimentablagerungen oder durch bestimmte Hebungen hervorgerufen sein müssen.

1) Dahlander, Pogg. Ann. **117**. p. 153. 1862.

Jegliche Massenverschiebung besteht aus zweierlei Aenderungen, der Masseverminderung an gewissen und der Vermehrung, Anhäufung an anderen Stellen. Letztere bringen eine positive Potentialdifferenz $\delta\Omega$, erstere eine negative $-\delta\Omega'$ hervor. Die neue Höhe wird also:

$$h + \delta h = \frac{\Omega + \delta\Omega - \delta\Omega'}{\gamma},$$

wobei von der verschwindend kleinen Aenderung abgesehen ist, die der Werth der Schwere γ erleidet. Die Niveauänderung ist also:

$$\delta h = \frac{\delta\Omega - \delta\Omega'}{\gamma}.$$

Angenommen, die schaukelartige Bewegung, welcher nach den früheren Wasserstandsbeobachtungen die skandinavische Halbinsel unterworfen zu sein scheint, wäre ganz auf sie beschränkt, so müsste man, um die innerhalb eines gewissen Zeitraumes eingetretene Niveauänderung an einem Küstenpunkte zu bestimmen, das Potential $\delta\Omega$ des emporgehobenen und dasjenige $\delta\Omega'$ des untergesunkenen Theils für den betrachteten Punkt berechnen. Ihre Differenz gibt, durch die Schwere dividirt, die davon herrührende Spiegeländerung. Da δh die Aenderung im Abstand des Geoids vom Sphäroid, oder was nahezu identisch ist, die Veränderung im Radiusvector der Meeresoberfläche bedeutet, so versteht es sich von selbst, dass, falls man die Aenderung des Wasserstandes an einem mit der Küste festverbundenem Pegel angeben will, noch die eigene Bewegung des Landes, bezw. die Veränderung seiner Entfernung vom Erdmittelpunkt in Rechnung zu ziehen, d. h. algebraisch zu addiren ist.

In den nachfolgend zu betrachtenden Fällen wird zuweilen $\delta\Omega'$ vernachlässigt, d. h. es wird nur das Sediment in Betracht gezogen und die Niveauänderung in dessen Nähe berechnet. Diese Vernachlässigung ist in zwei ausgedehnten Klassen von Fällen gestattet, ohne der hier erstrebten Genauigkeit Abbruch zu thun, nämlich 1) wenn das Gebiet, wo die Massen weggenommen werden, sehr entfernt von dem Ablagerungsgebiet liegt; 2) wenn die Massen durch gleichförmige Wegnahme von der ganzen Erdoberfläche beschafft

werden. Ersteres ist z. B. der Fall bei den Deltabildungen grosser Flüsse, wozu das Material aus weiter Ferne dem Innern der Continente entnommen wird, und unter der Voraussetzung, dass die Niveauänderung über dem Delta selbst bestimmt werden soll. — Der zweite Fall würde dagegen vorliegen, wenn infolge allgemeiner gleichmässiger Contraction der Erde an einer Stelle eine Scholle emporgehoben würde, an deren Rand die Niveauänderung bestimmt werden soll. In beiden Fällen, die übrigens in der Natur in den mannigfaltigsten Variationen vorkommen können, verschwindet $\delta\Omega'$ wegen der Entfernung der darin vorkommenden Massen gegen $\delta\Omega$, das von den benachbarten Massen herrührt, und man behält nur:

$$\delta h = \frac{\delta\Omega}{\gamma}.$$

Die erste Frage, die ich mir gestellt habe, ist die nach der Wirkung eines einzelnen Flussdeltas. Um den Fall einer mathematischen Behandlung zugänglich zu machen, habe ich folgende einfache geometrische Voraussetzungen gemacht. Ein Fluss münde rechtwinklig auf eine geradlinig verlaufende Küste, von welcher der Meeresboden als unter dem Winkel ν gegen den Horizont geneigte Ebene abfällt. Das Sediment wird dann auf diese geneigte Ebene in der ungefähren Gestalt eines Kugelabschnitts aufgelagert sein, in dessen Rand die Flussmündung liegt, und der an dieser Stelle die Horizontalebene berührt. Ich will annehmen, dass das Sediment wirklich ein Abschnitt einer homogenen Kugel

Fig. 1.

vom Halbmesser a sei. Ihr Mittelpunkt liegt dann auf der verlängerten Lothlinie LM der Mündungsstelle in C (Fig. 1). — Vor Entstehung des Niederschlags war der betreffende Raum mit Wasser erfüllt. Wenn die Dichte der abgelagerten Masse um ε grösser ist als die des Wassers, so hat man für $\delta\Omega$ das Potential eines mit der Dichtigkeit ε erfüllten Kugelabschnitts zu setzen. Es ist vorzugsweise von Interesse, den Werth von δh in der Mündungsgegend zu

kennen. Das Potential des Abschnitts auf den Randpunkt M erhält man leicht, indem man ein eigenthümliches Polarcoordinatensystem einführt¹⁾, dessen Pol der Punkt M ist. Das Volumenelement dv an der Stelle P sei begrenzt durch zwei unter dem kleinen Winkel $d\vartheta$ gegen einander geneigte, in der Küstenlinie KK' sich schneidende Ebenen, ferner durch zwei unter dem Winkel $d\varphi$ in M sich schneidende, auf den vorigen senkrechte Ebenen und durch zwei Kugelflächen um M als Mittelpunkt von den Radien $MP = r$ und $r - dr$. Es hat dann, wenn der Winkel ϑ vom Horizont an gerechnet, $CM = a$ und $\angle HMN = \nu$ gesetzt wird, den Werth:

$$dv = r d\varphi \cdot r \cos \varphi d\vartheta \cdot dr,$$

und das Potential des Kugelabschnitts auf M wird daher:

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{r} &= \varepsilon \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\nu} d\vartheta \int_0^{2a \sin \vartheta \cos \varphi} r dr \\ &= 2 \varepsilon a^2 \int_0^{\nu} \sin^2 \vartheta d\vartheta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4}{3} \varepsilon a^2 (\nu - \frac{1}{2} \sin 2\nu). \end{aligned}$$

Die Schwere γ drückt man mit hinlänglicher Genauigkeit durch die Masse der Erde, dividirt durch das Quadrat ihres mittlern Halbmessers R aus. Ihre mittlere Dichte sei $= \eta$, dann wird:

$$\gamma = \frac{4}{3} R \eta \pi, \text{ folglich:}$$

$$\delta h = \frac{s}{\eta} \frac{a^2}{R \pi} (\nu - \frac{1}{2} \sin 2\nu).$$

Den Kugelradius a drückt man zweckmässiger durch den leichter messbaren Durchmesser der Sedimentbasis aus, also durch die dem Kugelabschnitt zukommende Sehnenlänge s . Es ist nämlich:

$$a = \frac{s}{2 \sin \nu}.$$

Die Maximaldicke des Sediments ist der Pfeil des Kugelabschnitts:

1) S. Thomson u. Tait, Treatise on natural philosophy. § 478.

$$\Delta = a(1 - \cos \nu) = \frac{s(1 - \cos \nu)}{2 \sin \nu}.$$

Ich habe nun die Steighöhe δh für zwei Neigungswinkel $\nu = 2^\circ$ und $\nu = 4^\circ$ und für drei Durchmesser $s = 20, 50, 100$ km berechnet. Da $\eta = 5,5$, ε aber $= 1,5$ gesetzt werden können, so gibt die Formel:

$$\delta h = \frac{3}{11} \cdot \frac{s^2}{4\pi R} \left(\frac{\nu}{\sin^2 \nu} - \operatorname{ctg} \nu \right)$$

folgende Werthe:

s	Δ		δh	
	$\nu = 2^\circ$	$\nu = 4^\circ$	$\nu = 2^\circ$	$\nu = 4^\circ$
20 km	174 m	349 m	0,032 m	0,063 m
50	436	873	0,198	0,396
100	872	1 746	0,792	1,585

Man sieht hieraus, dass selbst ein ziemlich bedeutendes Delta für sich allein nur geringe Niveauerhebungen am Strande veranlasst, immerhin aber der Fortbau des Landes durch solche etwas verlangsamt wird.

Ganz andere Resultate erhält man, wenn man die Wirkung ausgedehnter Sedimentbildungen untersucht, wie sie auf dem Boden grosser Meeresbecken entstehen. Zwar ist man im allgemeinen nur äusserst unvollkommen unterrichtet, wie sich in den grossen Weltmeeren unter dem Einflusse der Strömungen die Absätze nach Fläche und Dicke vertheilen; doch gibt es ein Gebiet, das man wegen seiner Geschlossenheit und wegen der sichtlichen Zunahme seiner Ausfüllung mit einiger Annäherung an die wirklichen Verhältnisse als Rechnungsbeispiel verwerthen kann. Es ist das Nordpolarbecken. Die Nordküsten von Asia-Europa und Amerika umgrenzen dasselbe ungefähr im Parallelkreise von 70° nördlicher Breite, und wenn man von den Inselgruppen, einschliesslich Grönlands, der Einfachheit halber absieht, so hat man es mit einem Meeresbecken zu thun, das eine Kugelcalotte von 20° Bogenhalbmesser einnimmt und nur durch verhältnissmässig schmale Arme mit den übrigen Meeren zusammenhängt. Die Meeresströme, die

längs den Ost- und Westküsten von Grönland arctische Gewässer in den atlantischen Ocean führen, sind so schmal, dass sie wie die Abflüsse aus einem Seebecken betrachtet werden können, die bekanntlich von Sedimenten sehr frei sind, weil diese sich in dem ruhenden Wasser des Beckens zuvor schon abgesetzt haben. Daraus folgt, dass die kolossalen Mengen von festen Stoffen, die dem Polarbecken durch die nordasiatischen und nordamerikanischen Riesenströme zugeführt werden, diesem Becken fast unverkürzt enthalten bleiben. Die Landverfrachtung durch Eisberge und Eisfelder ist ihrem Betrage nach sicherlich unbedeutend gegen die zugeführten Massen und dürfte fast schon durch die Sedimentführung der grossen nordatlantischen Meeresströmung ausgeglichen werden.

In der That haben denn auch die bisherigen Lothungen im Polarbecken bis in beträchtliche Entfernungen von den Küsten die Existenz von Flachmeeren ergeben, die nur zwischen Spitzbergen und Grönland entschieden unterbrochen sind. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass diese Flachmeere, welche ringförmig das ganze Gebiet umziehen, und deren Ausdehnung in das Innere durchaus nicht unwahrscheinlich ist, die Folge davon sind, dass die erwähnten Ströme die Hauptmasse ihrer Sedimente zunächst vor der Mündungsgegend und an den benachbarten Küsten fallen lassen und so das Becken in concentrischen Ringen zuzufüllen streben. Allein auch in die Centralgegenden des Beckens wird das feinere Material zweifellos vordringen und dort Absätze verursachen.

Alle Niederschläge fester Schichten aus dem Wasser bringen eine Potentialvermehrung hervor. Auch abgesehen von der rein geometrischen Verdrängung gleicher Wasservolumina bewirken sie, dass der Seespiegel sich hebt und die Gestadeländer des Beckens allmählich überfluthet. Ich habe mir deshalb die Aufgabe gestellt, das Potential einer Kugelkappe mit gleichförmiger Dichte ϵ und Höhe H bedeckenden Masse auf einen äussern Kugelflächenpunkt und einen Randpunkt zu bestimmen und daraus auch das Potential eines zonenförmigen Sedimentes abzuleiten.

Die Calotte sei durch einen um den Bogen $PC=PD=p$ vom Pol entfernten Kreis begrenzt. Der angezogene Punkt A sei um den Bogen $AP=q$ vom Pol entfernt. Der grosse Kreisbogen AM zu einem in M liegenden Volumenelement sei $=w$ und der Winkel zwischen den grössten Kreisebenen AM und AP , MAP sei $=\varphi$, dann ist die Entfernung

Fig. 2.

zwischen A und $M = 2R \sin \frac{w}{2}$, wenn R der Kugelhalbmesser ist. Das Potential wird demnach:

$$V = \int_{-\varphi_1}^{+\varphi_1} \int_{w_1}^{w_2} \frac{\varepsilon H R^2 \sin w \, dw \, d\varphi}{2 R \sin \frac{w}{2}}.$$

Die Grenzwerte von w sind $w_1 = AB$ und $w_2 = AC$. — Die Integration nach w lässt sich ausführen und ergibt:

$$V = 2 R \varepsilon H \int_{-\varphi_1}^{+\varphi_1} \left(\sin \frac{w_2}{2} - \sin \frac{w_1}{2} \right) d\varphi.$$

Wenn man jetzt w_1 und w_2 durch die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$\cos p = \cos w \cos q - \sin w \sin q \cos \varphi$$

ausdrückt, so ergeben sich äusserst verwickelte Ausdrücke, sodass die exacte Durchführung der Rechnung (man kommt auf elliptische Integrale aller drei Gattungen) die Mühe nicht verlohnt. Für den Fall aber, dass der Punkt A im Rande liegt, werden die Integrationsgrenzen $\pm \frac{\pi}{2}$, ferner $q = p$ und $w_1 = 0$, endlich:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} w_2 = \operatorname{tg} p \cos \varphi.$$

Hiernach wird:

$$V = 2 R \varepsilon H \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin p \cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 p \sin^2 \varphi}} = 2 R \varepsilon H \int_{-\sin p}^{\sin p} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 4 R \varepsilon H p.$$

Wenn die Calotte nur einen kleinen Theil der Kugeloberfläche bildet, so nähert sich das Problem, ihr Potential auf einen vom Rand nicht sehr weit entfernten Punkt der Kugeloberfläche zu bestimmen, dem einfachern Problem, das-

jenige einer mit derselben Dichte und Dicke gleichförmig belegten Kreisfläche auf einen Punkt ihrer Ebene zu bestimmen. Bezeichnet man mit E die Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkt der Scheibe, mit r den Abstand eines Flächenelements der Scheibe von demselben Punkt, mit φ den Winkel zwischen beiden Linien, so ist das Potential der Kreisscheibe, deren Radius $= a$ sei, auf jenen Punkt:

$$V = \varepsilon H \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{E^2 + r^2 - 2Er \cos \varphi}}.$$

Das Integral nach r gibt allgemein ausgeführt:

$$\sqrt{E^2 + r^2 - 2Er \cos \varphi} + E \cos \varphi \log(\sqrt{E^2 + r^2 - 2Er \cos \varphi} - E \cos \varphi + r).$$

Für die untere Grenze $r=0$ hat man also die beiden Integrale auszuführen:

$$\int_0^{2\pi} E d\varphi = 2\pi E,$$

und:
$$E \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \log E(1 - \cos \varphi)$$

$$= E \log 2 E \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + 2 E \int_0^{2\pi} \cos \varphi \lg \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Der erste Term verschwindet bei Einsetzung der Grenzen; der zweite gibt durch partielle Integration:

$$2 E \left[\sin \varphi \log \sin \frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} - 2 E \int_0^{2\pi} \sin \varphi \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} d\frac{\varphi}{2}.$$

Das erste Glied verschwindet bei Einsetzung der Grenzen, das zweite wird:

$$= -4 E \int_0^{\pi} \cos^2 \psi d\psi = -2\pi E,$$

hebt sich also gegen den Werth des ersten Integrals weg. Man hat demnach nur den von der obern Grenze $r=a$ herührenden Theil weiter zu behandeln. Dieser liefert:

$$V = \varepsilon H \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{E^2 + a^2 - 2Ea \cos \varphi} \\ + \varepsilon H E \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \log (\sqrt{E^2 + a^2 - 2Ea \cos \varphi} - E \cos \varphi + a).$$

Verwandelt man das zweite Integral durch partielle Integration, wobei das erste Glied zwischen den Grenzen genommen wegfällt, so erhält man, wenn noch die Wurzelgrösse zur Abkürzung = W gesetzt wird, für dieses Integral:

$$J = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \log (W - E \cos \varphi + a) = -E \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi \left(\frac{a}{W} + 1 \right)}{W - E \cos \varphi + a}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $W + E \cos \varphi - a$ und bemerkt, dass:

$$W^2 - (E \cos \varphi - a)^2 = E^2 \sin^2 \varphi,$$

so zerfällt das Integral in folgende:

$$J = \frac{a^2}{E} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{W} - a \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{W} - \frac{1}{E} \int_0^{2\pi} W d\varphi;$$

folglich wird:

$$V = \varepsilon H a^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{W} - \varepsilon H a E \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{W} \\ = \frac{\varepsilon H}{2} \int_0^{2\pi} W d\varphi - \frac{\varepsilon H (E^2 - a^2)}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{W}.$$

Durch die Substitutionen:

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \psi, \quad \frac{4aE}{(E+a)^2} = \kappa^2,$$

kommen diese elliptischen Integrale auf die Normalform:

$$V = 2\varepsilon H (E+a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi} - 2\varepsilon H (E-a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi}}.$$

Wenn der angezogene Punkt in der Peripherie liegt, also $E = a$ ist, so wird:

$$V_a = 4\varepsilon H a,$$

d. h. eine Kreisscheibe hat auf einen Randpunkt dasselbe Potential wie eine gleichbelegte Calottenfläche, deren Bogenhalbmesser Rp gleich dem Radius a der Kreisscheibe ist.

Auf einen äussern Punkt der Kugelfläche wird nun diese Calotte im allgemeinen nicht dasselbe Potential haben wie die Kreisscheibe, wenn auch die Bogenentfernung des erstern von ihrem Pol $= E$ ist. Wenn aber die Calotte nur einen kleinen Theil der Kugel bildet, und der Polabstand des Punktes auch nicht gross ist, so wird man wenigstens annähernd den obigen Werth von V auch für das Potential der Calotte auf einen Punkt in der Bogenentfernung $Rp = E$ anwenden dürfen. Um dann das Potential V_z einer Zone vom innern Bogenradius a und dem äussern E auf einen Punkt des äussern Randes zu bestimmen, hat man nur die Differenz zwischen dem Potential der Calotte vom Radius $Rp = E$ und demjenigen V der Calotte vom Radius $Rq = a$ auf den Punkt in der Entfernung E zu bilden.

Wenn man mit K und E die ganzen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung bezeichnet, so erhält man demgemäss:

$$V_z = 4\epsilon HRp - V = 2\epsilon HR \{2p - (p + q)E + (p - q)K\}.$$

Die entsprechenden Niveauveränderungen des Oceans am Rande des Sediments, also an der Küste, ergeben sich dann, indem man in der für δh aufgestellten Formel $\delta\Omega = V_z$ setzt, wobei vorläufig angenommen ist, dass das abgelagerte Material soweit aus dem Innern der Continente entnommen sei, dass man von der hierdurch bedingten Potentialabnahme an der Küste abstrahiren kann. Es wird dann:

$$\delta h = \frac{V_z}{\frac{3}{2} R \pi \eta}.$$

Wenn das Sediment die ganze Calottenfläche gleichmässig bedeckte, so würde:

$$\delta h = \frac{3\epsilon H}{\eta} \cdot \frac{p}{\pi}$$

werden. Setzt man also $p = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$, was den Dimensionen des Nordpolarbeckens ungefähr entsprechen würde, so wird mit den oben schon benutzten Werthen von ϵ und η :

$$V = 2 \varepsilon H R . 0,6982; \quad \delta h = \frac{H}{11} = 0,0909 H.$$

Das Ansteigen des Meeres an der Küste ist also sehr bedeutend. Ein den ganzen Boden des Polarbeckens bedeckendes Sediment von nur 11 m Dicke bewirkt ein Steigen der See um 1 m. Die Annahme einer Ablagerung von 550 m Dicke, die an sich durchaus nichts Unwahrscheinliches hat, würde eine Spiegelschwankung um 50 m hervorbringen, wodurch beträchtliche Strecken der flachen Küstenländer unter Wasser gesetzt würden.

Ich habe ferner V_z für Zonen von 10° , 5° und 2° Breite berechnet, d. h. q nacheinander die Werthe:

$$\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{36}, \frac{\pi}{90}$$

gegeben, und dabei folgende Werthe von V_z und δh erhalten:

$$\begin{array}{lll} V_{10} = 2 \varepsilon H R . 0,5538 & V_5 = 2 \varepsilon H R . 0,3624 & V_2 = 2 \varepsilon H R . 0,1846 \\ \delta h_{10} = 0,0721 H & \delta h_5 = 0,0472 H & \delta h_2 = 0,0240 H. \end{array}$$

Man sieht daraus, dass z. B. eine Strandbildung von $2^\circ = 30$ deutschen Meilen Breite und 100 m Dicke eine Erhöhung des Meeresspiegels an der Küste um 2,4 m veranlassen würde. Soweit die bisherigen Beobachtungen reichen, gehen aber die Flachmeere an der Nordküste von Asia-Europa, deren Seichtigkeit man den Ablagerungen der grossen Ströme zuschreiben muss, viel weiter als bis auf 30 Meilen von der Küste hinaus, und auch die angenommene Dicke von 100 m ist eine sehr geringe. Setzt man die Breite $= 5^\circ$ oder 75 Ml., die Dicke $= 200$ m so erhält man schon $\delta h = 9,4$ m. Es können also im Lauf der Jahrtausende leicht Spiegeländerungen eingetreten sein, welche die Grenzen der Flachküsten erheblich umgestalten mussten.

Ueber der Mitte der Ablagerungsgebiete ist die Niveauveränderung beträchtlich grösser als am Rande, für den sie oben berechnet wurde, — über dem Centrum einer unendlich grossen Kreisscheibe ist das Potential doppelt so gross wie am Rande — sodass also an Inseln im Innern des Beckens alle Niveauschwankungen stärker auftreten müssen.

Die Annahme, dass das abgelagerte Material aus unendlich grosser Entfernung herbeigeführt worden sei, hat einen

Fehler im Gefolge, der die Spiegelsteigung an der Küste zu gross erscheinen lässt. Je näher der Ursprungsort des erodirten Materials liegt, um so beträchtlicher ist dieser Fehler. Auch über die hierdurch nothwendig werdende Aenderung kann man leicht eine Schätzungsrechnung anstellen. Es möge die einfache Annahme zugrundegelegt werden, dass das gesammte Sediment einer zwischen den geographischen Breiten ϑ' und ϑ'' enthaltenen Zone von der Erosion eines auf dem Parallelkreis ϑ die ganze Erde umziehenden Kettengebirges herrühre, dessen Breite man als verschwindend klein gegen seinen Abstand von der unter der Breite ϑ' liegenden Küste des Ablagerungsgebietes betrachten kann. Bezeichnet man mit λ die auf der Längeneinheit einer gleichförmig belegten Kreislinie enthaltenen Masse, so ist das Potential dieser ganzen Masselinie auf einen im Abstand c von ihrer Ebene und in der Entfernung ϱ von der Axe gelegenen Punkt, falls r der Kreisradius ist:

$$V' = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda r d\varphi}{\sqrt{r^2 + \varrho^2 + c^2 - 2r\varrho \cos \varphi}}.$$

Setzt man: $\varphi = \pi - 2\psi$ $\kappa = \frac{2\sqrt{r\varrho}}{\sqrt{(r+\varrho)^2 + c^2}}.$

so wird:

$$V' = \frac{4\lambda r}{\sqrt{(r+\varrho)^2 + c^2}} K,$$

wo K den Werth des ganzen elliptischen Integrals erster Gattung für den Modul κ bedeutet.

Um dies auf den Fall der Erde anzuwenden, hat man zu setzen:

$$r = R \cos \vartheta \quad \varrho = R \cos \vartheta' \quad c = R \sin \vartheta' - R \sin \vartheta.$$

Man erhält dann:

$$\sqrt{(r+\varrho)^2 + c^2} = 2R \cos \frac{\vartheta + \vartheta'}{2} \quad \kappa = \frac{\sqrt{\cos \vartheta \cos \vartheta'}}{\cos \frac{\vartheta + \vartheta'}{2}}.$$

Die Belegungsdichte λ ist so zu bestimmen, dass die ganze auf dem Parallelkreise lagernde Masse gleich derjenigen der Sedimentzone wird. Dies gibt die Gleichung:

$$2R \cos \vartheta \cdot \pi \lambda = 2R \pi \varepsilon H (R \sin \vartheta'' - R \sin \vartheta'),$$

woraus: $\lambda = \varepsilon H R (\sin \vartheta'' - \sin \vartheta')$

und:
$$V' = 2 \varepsilon H R \frac{\sin \vartheta'' - \sin \vartheta'}{\cos \frac{\vartheta + \vartheta'}{2}} \cdot K.$$

Den Factor $2 \varepsilon H R$ haben auch die oben berechneten Werthe der V_z ; durch die Berechnung des zweiten Factors werden also die Potentiale V_z und V' direct vergleichbar. Ich habe denselben deshalb für die oben schon benutzten Zonen und drei verschiedene Lagen des erodirten Kettengebirges, nämlich für $\vartheta = 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ$ nördl. Br. berechnet. ϑ' ist wie bisher $= 70^\circ$; ϑ'' nacheinander $= 90^\circ$ (volle Calotte), $80^\circ, 75^\circ, 72^\circ$. Folgende Zahlen haben sich ergeben:

	$\vartheta'' = 90^\circ$	80°	75°	72°
$\frac{V'}{2 \varepsilon H R} = \begin{cases} 40^\circ & 0,2363 \\ 50^\circ & 0,3002 \\ 60^\circ & 0,4264 \end{cases}$	0,2363	0,1768	0,1027	0,04469
	0,3002	0,2245	0,1304	0,05674
	0,4264	0,3189	0,1853	0,08061

Die hieraus sich ergebenden Steighöhen an der Küste für je 100 m Sedimentdicke sind unter Hinzufügung des idealen Falles unendlicher Entfernung des Abschwemmungsgebietes in folgender Tabelle enthalten:

	$\vartheta'' = 90^\circ$	80°	75°	72°
$100 \frac{\delta h}{H} = \begin{cases} \infty & 9,09 \text{ m} \\ 40^\circ & 6,01 \\ 50^\circ & 5,18 \\ 60^\circ & 3,54 \end{cases}$	9,09 m	7,21 m	4,72 m	2,40 m
	6,01	4,91	3,38	1,82
	5,18	4,29	3,02	1,66
	3,54	3,06	2,30	1,35

Eine Sedimentzone von 5° Breite und 500 m Dicke, wozu das Material dem 50sten Breitengrade entnommen ist, würde also z. B. eine Niveauerhöhung von 15,1 m an der Eismeerküste hervorbringen.

Allgemein lässt sich das Resultat aussprechen, dass durch Versetzung von Massen aus dem Innern der Continente nach den Rändern das Potential an diesen wächst, also der Meeresspiegel steigt, und zwar um so bedeutender, je weiter im Innern der Ursprung der Sedimente liegt. Die Poten-

tialänderung nähert sich dem Werthe Null, wenn das Material dicht an der Küste entnommen wird. Dies lehrt am besten der Anblick nebenstehender schematischer Figur. Ist MNM' der Meeresspiegel, $GBCL$ die ursprüngliche Configuration des festen Landes, so wird eine Erosion der in dem

Fig. 3.

Dreieck DCN enthaltenen Masse und Absetzung derselben in dem congruenten Raume ABN das Potential in N nicht ändern, weil das Potential des Dreiecks auf seine Ecke N in jeder Lage dasselbe ist. Da dieser letztere Fall der Erosion in der Natur aber nur eine sehr untergeordnete Rolle spielt, so wird im allgemeinen vor einer an Mündungen grosser Flüsse reichen Küste ein Flachmeer nicht nur durch die Anhäufung der Sedimente, sondern auch durch gleichzeitig fortschreitendes Ansteigen des Seespiegels und Ueberschwemmung des Küstensaums gebildet werden.

Verschiedene Continentalküstenstrecken verhalten sich bezüglich der Sedimentablagerung längs dem Strande ausserordentlich verschieden. Wo grosse Ströme einmünden, wird die Bildung von Ablagerungen begünstigt; wo die Küste von starken Meeresströmungen bestrichen wird, kann der feinste Schlick sich nicht absetzen, sondern er wird fortgeführt und fällt erst dort nieder, wo die Geschwindigkeit der Strömung hinlänglich abgenommen hat. Demnach werden auch verschiedene Küstenstrecken in verschiedenem Grade von den besprochenen Spiegelschwankungen betroffen. — Lange Ströme führen dem Ocean überhaupt nur feines Material zu; das gröbere bleibt, nach seiner Feinheit sortirt, im Mittel- und Oberlaufe zurück. Alles durch Wasser aus seiner ursprünglichen Lagerung gelöste Material wird aber, als Ganzes aufgefasst, so versetzt, dass sein Schwerpunkt der Mündung des Stromsystems genähert wird, folglich sein Potential auf benachbarte Küstenpunkte wächst. In vielen Fällen dürfte diese das Potential vermehrende Massenversetzung, die schwer in Rechnung zu ziehen ist, genügen, um den Einfluss des von der Abschwemmung herrührenden negativen Summanden V' in der vorigen Rechnung zu annulliren.

Aber nicht nur die durch das Wasser bedingten Massenversetzungen wirken auf den Stand des Meeresspiegels, sondern alle überhaupt eintretenden Verschiebungen, vor allem also die Hebungen und Senkungen einzelner Theile oder Schollen der Erdrinde. Jeder höher steigende Continent nimmt den ihn umgebenden Meeresrand ein Stück weit mit empor, jeder sinkende drückt ihn mit hinab. Eine Senkung des Meeresbodens ist desgleichen stets von einer Senkung des Seespiegels darüber begleitet, auch abgesehen von denjenigen Aenderungen, die durch den geänderten Rauminhalt des Beckens bedingt sind. Es ist kürzlich von W. Reiss darauf hingedeutet worden¹⁾, dass bei der Frage über das Heben oder Sinken eines Gebirges die Höhe der an benachbarten Küsten beobachteten alten Strandlinien aus eben diesem Grunde nicht ohne weiteres als das Maass der stattgehabten Hebung oder Senkung betrachtet werden können. Es ist nicht ohne Interesse zu berechnen, um wieviel der Seespiegel einem sich hebenden Continente nachfolgt. Um eine solche Rechnung anstellen zu können, werde ich sowohl bezüglich der Gestalt des Continents, wie auch bezüglich der Art und Umgrenzung der Hebung einfache geometrische Voraussetzungen machen. Das von Reiss in seinem citirten Vortrage behandelte Gebiet eignet sich besonders gut dazu, wenn man es erweitert als den ganzen amerikanischen Continent auffasst. Ich will für diesen die einfache Massenvertheilung substituirt denken, die schon Bruns in seiner eingangs erwähnten Abhandlung (p. 23) angenommen hat, nämlich ein mit Masse von der Dichte 2,5 gleichmässig 300 m hoch bedecktes Kugelzweieck, welches zwischen den Meridianen 30° und 75° westl. L. von Ferro enthalten und bis zu den Meridianen 0° und 180° von gleichförmig 3000 m tiefen Oceanen umgeben ist. Auf der östlichen Halbkugel sollen die Massen als gleichförmig vertheilt vorausgesetzt werden. Wie Bruns an dem angegebenen Orte gezeigt hat, erhält man das Potential für den Aequatorpunkt der Westküste (w. L. = 75°) des idealen Continents durch die Formel:

1) W. Reiss, Verhandl. d. Ges. f. Erdkunde zu Berlin, 7, p. 52. 1880.

$$V_{75} = 2R\pi \{ [L(105^\circ) + L(75^\circ) - L(45^\circ)] k_1 H_1 + L(45^\circ) k_2 H_2 \} \\ = 2R\pi (k_1 H_1 p + k_2 H_2 q),$$

worin $L(l)$ der Werth eines dort definirten bestimmten Integrals mit dem Argument l ist; k_2 ist die mittlere Dichte des Continents = 2,5 und $k_1 = 1 - k_2 = -1,5$; $H_1 = 3000$ m, $H_2 = 300$ m. Berechnet man mittelst der von Bruns mitgetheilten Tafel die Coëfficienten p und q , so erhält man $p = 0,9180$; $q = 0,4901$.

Die Differenz zwischen dem Radiusvector des Geoids (d. h. der durch die Continentalanziehung beeinflussten Meeresoberfläche) und dem des regelmässigen Sphäroids wird:

$$h = \frac{V_{75}}{\frac{4}{3}\pi\eta R} = \frac{3}{2}\frac{k_1}{\eta} H_1 p + \frac{3}{2}\frac{k_2}{\eta} H_2 q$$

worin η die von Bruns zu 5,55 angenommene mittlere Dichte der Erde ist. Mit den obigen Zahlen wird:

$$h = -1116 + 99,4 = -1017 \text{ m.}$$

Würde nun der 300 m hoch angenommene Continent sich um 10 m heben oder senken, ohne dass im übrigen die Gestalt von Land- und Meeresboden sich änderte, so würde der zweite Summand um $\pm \frac{1}{30}$ variiren, also um $\pm 3,3$ m; man würde also für den Stand des Meeresspiegels die Zahlen 1013 und 1020 erhalten. Auf jede 10 m Hebung oder Senkung des Continents würde der Meeresspiegel um 3,3 m, also gerade um ein Drittel dieser Bewegung folgen. Die am Strand beobachtete Differenz wäre also nur 6,7 m, und ein alter Seestrand von 200 m Höhe über dem gegenwärtigen wäre ein Zeichen einer Hebung des Continents um 300 m. — Für Punkte, die beiderseits des Aequators in höheren Breiten gelegen sind, wäre der Bruchtheil kleiner als ein Drittel. — Wenn nicht der ganze Continent, sondern z. B. nur der Küstenstreifen von 65° bis 75° w L. um 10 m steigt oder sinkt, so ist die dadurch entstehende Spiegelschwankung nur $= \pm 1,27$ m, die beobachtbare Schwankung also $= 8,7$ m.

Man hat in dem zuvor Entwickelten eine der mannigfachen Ursachen kennen und ihrem möglichen Betrage nach schätzen gelernt, welche die Verschiedenheiten in den säcularen Hebungs- und Senkungserscheinungen bedingen und

deren richtige Erklärung so sehr erschweren. Die gefundenen Zahlen zeigen deutlich genug, dass die primären Ursachen der grossen Arealveränderungen zwischen Meer und Continent wo anders gesucht werden müssen, und meine Untersuchungen greifen um nichts der Lösung der Frage vor, ob die Existenz hoch über dem Meere gelegener Strandlinien mehr der durch innere Spannungen in der Erdrinde erzeugten Hebung eines Theiles derselben oder mehr dem Zurückzuge des Meeres infolge fortschreitender mechanischer und chemischer Bindung des Wassers in den festen Theilen der Erdrinde zugeschrieben werden muss.

Giessen, den 14. Juli 1880.

XVII. *Zur Theorie des Volta'schen Fundamentalversuchs; von F. Exner.*

(Aus den Wien. Sitzungsber. 81. Mai 1880, auszüglich mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Der Verfasser hat in einer frühern Publication¹⁾ gezeigt, dass die Spannungsdifferenzen, die beim Contact verschiedener Metalle auftreten, sich aus den chemischen Constanten dieser Metalle berechnen lassen, und hat dementsprechend die Ursache dieser Spannungsdifferenzen nicht im Contact, sondern in der chemischen Veränderung der Substanzen suchen zu müssen geglaubt. Da der Volta'sche Versuch für die Contacttheorie bisher noch immer als Basis galt, so sollte in der vorliegenden Abhandlung eine Erklärung desselben vom Standpunkte der chemischen Theorie gegeben werden.

Es wird zunächst durch fünf verschiedene Experimente gezeigt, dass bei der Berührung zweier Metalle keine Potentialdifferenz auftritt; von diesen soll hier nur eins angeführt werden.

Die beiden Quadrantenpaare eines Electrometers waren mit den Polen einer Zamboni'schen Säule, die Nadel aber mit der einen Platte eines, übrigens unelectrischen, Zink-

1) Exner, Wied. Ann. Bd. IX. p. 591. 1880.