

Über den von Herrn G. Peano aufgestellten Begriff des bestimmten Integrals.

Von O. Stolz in Innsbruck.

Dem Scharfsinn des Hrn. Peano ist es gelungen, das bestimmte Integral einer im endlichen Intervalle (a, b) eindeutigen und endlichen Function $f(x)$ auf einfachere Weise zu erklären, als es bisher üblich gewesen ist. Diese Erklärung lautet folgendermaßen.¹⁾ Zwischen a und b seien nacheinander beliebige viele Werte a_1, a_2, \dots, a_{n-1} eingeschaltet, so dass $b-a$ in n Theile

$$(1) \quad \delta_r = a_r - a_{r-1} \quad (r = 1, 2, \dots, n; a_0 = a \quad a_n = b)$$

zerfällt. Die endliche obere und untere Grenze der Werte von $f(x)$ im Intervalle (a_{r-1}, a_r) von x seien bezw. bezeichnet mit

$$g_r = g(a_{r-1}, a_r) \quad k_r = k(a_{r-1}, a_r).$$

Nun bilde man die Summen

$$(2) \quad \sum_{r=1}^{r=n} g(a_{r-1}, a_r) \delta_r = S(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b)$$

$$(3) \quad \sum_{r=1}^{r=n} k(a_{r-1}, a_r) \delta_r = T(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b).$$

Betrachtet man die eingeschalteten Werte a_1, a_2, \dots als unbeschränkt (somit auch ihrer Anzahl nach) veränderlich, so hat die Summe $S(a, a_1, \dots, b)$ eine endliche²⁾ untere Grenze, welche Peano das obere Integral von $f(x)$ im Intervalle (a, b) nennt und mit

$$(4) \quad \int_a^b f(x) dx$$

¹⁾ Vgl. Peano, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, 1893, §. 103. *Annali di Matem.* a. 1895, p. 157.

²⁾ Da es zwei solche Zahlen A, B gibt, dass für $a \leq x \leq b$ $A < f(x) < B$ ist und da für $a_{r-1} \leq x \leq a_r$ $f(x) \leq g_r$ ist, so ist $A < g_r$, also

$$A(b-a) < S(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b).$$

Dagegen hat man

$$T(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b) < B(b-a).$$

bezeichnet. Desgleichen hat die Summe $T(a, a_1, \dots, b)$ unter diesen Umständen eine endliche obere Grenze, das untere Integral von $f(x)$ im Intervalle (a, b) :

$$(5) \quad \int_a^b f(x) dx$$

genannt. Der Kürze wegen schreiben wir für die Zahlen (4), (5), bzw. G, K . Dann ist allgemein

$$(6) \quad G \geq K.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Function $f(x)$ im Intervalle (a, b) integrirbar sei, ist die Gleichheit der Zahlen (4) und (5). Ihr gemeinsamer Wert J ist das Integral

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Dass $G \geq K$ ist, wird so bewiesen. Dem Begriffe der unteren Grenze der Summen $S(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b)$ zufolge muss sich zwischen a und b mindestens ein fortlaufendes System von Werten b_1, b_2, \dots, b_{l-1} so einschalten lassen, dass

$$(7) \quad G \leq S(a, b_1, \dots, b_{l-1}, b) < G + \frac{1}{2} \varepsilon$$

ist, unter ε irgend eine gegebene positive Zahl verstanden. Desgleichen gibt es ein System von Werten c_1, c_2, \dots, c_{m-1} zwischen a und b , wofür

$$(8) \quad K - \frac{1}{2} \varepsilon < T(a, c_1, \dots, c_{m-1}, b) \leq K$$

ist. Nun lässt sich zeigen,¹⁾ dass überhaupt, d. i. wie auch diese beiden Wertsysteme angenommen werden mögen,

$$(9) \quad T(a, c_1, \dots, c_{m-1}, b) \leq S(a, b_1, \dots, b_{l-1}, b)$$

ist. Mithin ergibt sich aus (7) und (8), dass

$$K - \frac{1}{2} \varepsilon < G + \frac{1}{2} \varepsilon, \text{ d. i. } K - G < \varepsilon$$

ist, woraus man bei der Willkürlichkeit von ε schließen muss, dass $K \leq G$ ist.

¹⁾ Vgl. Peano a. a. O. §. 103.

Aus der vorstehenden Definition des bestimmten Integrals erlangt man die nachstehende Bedingung für die Integrierbarkeit von $f(x)$ im Intervalle (a, b) .

(I) Zur Integrierbarkeit der endlichen Function $f(x)$ im Intervalle (a, b) ist nothwendig und hinreichend, dass jeder Zahl $\varepsilon > 0$ mindestens eine Theilung des Intervalles (a, b) durch Einschaltung von Werten a_1, a_2, \dots, a_{n-1} zwischen a und b sich so zuordnen lässt, dass

$$(10) \quad 0 \leq \sum_{p=1}^{p=n} [g(a_{p-1}, a_p) - k(a_{p-1}, a_p)] \delta_p < \varepsilon$$

ist. — In der That soll $G = K = J$ sein, so muss es nach (7) und (8) Systeme von Werten b_1, \dots, b_{l-1} ; c_1, \dots, c_{m-1} zwischen a und b geben, wofür

$$S(a, b_1, \dots, b_{l-1}, b) < J + \frac{1}{2} \varepsilon$$

$$T(a, c_1, \dots, c_{m-1}, b) > J - \frac{1}{2} \varepsilon$$

ist. Denken wir uns nun diese beiden Wertsysteme zu einem fortlaufenden vereinigt, das mit a_1, a_2, \dots, a_{n-1} bezeichnet werde, so haben wir bekanntlich

$$(11) \quad S(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b) \leq S(a, b_1, \dots, b_{l-1}, b)$$

$$(12) \quad T(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b) \geq T(a, c_1, \dots, c_{m-1}, b).$$

Mithin ist

$$S(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b) < J + \frac{1}{2} \varepsilon$$

$$T(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b) > J - \frac{1}{2} \varepsilon,$$

woraus unmittelbar die Beziehung

$$0 \leq S(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b) - T(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b) < \varepsilon$$

d. i. (10) folgt. Dieselbe ist auch hinreichend, denn da für jedes System von Werten a_1, a_2, \dots, a_{n-1}

$$(13) \quad G \leq S(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b) \quad K \geq T(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b)$$

ist, so ergibt sich aus (6) und (10)

$$0 \leq G - K < \varepsilon \quad \text{d. i. } G = K.$$

Die Integrierbarkeits-Bedingung (I) erweist sich als gleichbedeutend mit der Riemann'schen.

(II) „Nach Riemann ist zur Integrierbarkeit von $f(x)$ im Intervalle (a, b) nothwendig und hinreichend, dass

$$(14) \quad \lim_{\xi_r=0} \sum_{r=1}^{r=p} \{g(x_{r-1}, x_r) - k(x_{r-1}, x_r)\} \xi_r = 0$$

ist, d. h. dass jedem $\varepsilon > 0$ ein $\Delta > 0$ so sich zuordnen lässt, dass, wenn nur von den Theilen $\xi_1 = x_1 - a$, $\xi_2 = x_2 - x_1, \dots, \xi_p = b - x_{p-1}$ der Strecke $b - a$ jeder kleiner als Δ ist,

$$0 \leq \sum_{r=1}^{r=p} \{g(x_{r-1}, x_r) - k(x_{r-1}, x_r)\} \xi_r < \varepsilon$$

ist.“ — Da man von vorneherein weiß, dass, wenn die Function $f(x)$ im Intervalle (a, b) eindeutig und endlich ist, die Summe

$$(15) \quad \sum_{r=1}^{r=p} \{g(x_{r-1}, x_r) - k(x_{r-1}, x_r)\} \xi_r$$

bei $\lim \xi_r = 0$ ($r = 1, 2, \dots, p$) einen Grenzwert besitzen muss,¹⁾ so reicht die Bedingung (I) aus zur Erkenntnis, dass derselbe verschwindet. Schaltet man nämlich zwischen den Werten $a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b$ in (10) beliebig viele andere ein, so dass man ein System $a, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, b$ erhalten möge, so hat man nach dem, was schon in (11) und (12) bemerkt ist,

$$\begin{aligned} S(a, x_1, \dots, x_{p-1}, b) &\leq S(a, a_1, \dots, a_{n-1}, b) \\ T(a, x_1, \dots, x_{p-1}, b) &\geq T(a, a_1, \dots, a_{n-1}, a). \end{aligned}$$

Es ist mithin die nichtnegative Differenz

$$\begin{aligned} S(a, x_1, \dots, x_{p-1}, b) - T(a, x_1, \dots, x_{p-1}, b) &= \\ &= \sum_{r=1}^{r=n} \{g(x_{r-1}, x_r) - k(x_{r-1}, x_r)\} \xi_r \\ &\leq \sum_{r=1}^{r=n} \{g(a_{r-1}, a_r) - k(a_{r-1}, a_r)\} \delta_r, \end{aligned}$$

also nach (10) kleiner als ε . Nun hindert nichts, jedes der Theilchen sich ξ_1, \dots, ξ_p kleiner als Δ zu denken; demnach muss

¹⁾ Vgl. z. B. des Verfassers Grundzüge d. Diff.- u. Integralrechnung, I., S. 351. Der Satz wurde fast gleichzeitig im Jahre 1875 von den Hrn. Ascoli, Darboux, P. du Bois-Reymond, Thomae veröffentlicht. Es scheint mir daher nicht billig, wenn ihn Hr. C. Jordan in seinem Cours d'Analyse (2. éd., I., Nr. 44) als „Théorème de M. Darboux“ einführt.

der Grenzwert der Summe (15) bei $\lim \xi_r = 0$ ($r = 1, 2, \dots, p$) im Falle dass die Bedingung (I) erfüllt ist, gleich Null sein.

Die Bedingung (I) zur Integrierbarkeit von $f(x)$ im Intervalle (a, b) klingt formell allgemeiner als die von Dini,¹⁾ wonach aus dem Umstande, dass die Summe (15) für ein bestimmtes System von Theilungen bei unbegrenzter Abnahme eines jeden Theiles ξ_r zur Null convergiert, sogleich auf das Bestehen der Formel (14) geschlossen werden darf. In der Praxis dürfte sie aber kaum darüber hinausgehen.²⁾

Um das bestimmte Integral einer Function einer complexen Veränderlichen auf einem gegebenen Wege durch einen Grenzprocess einzuführen, wird man bei dem bis jetzt üblichen Verfahren bleiben müssen. Was das Doppelintegral einer Function zweier reellen Veränderlichen betrifft, so lässt sich die im Vorstehenden angeführte Erklärung des einfachen Integrales wohl darauf ausdehnen, allein zur Ableitung der Eigenschaften der Doppelintegrale scheint mir die dadurch gewonnene neue Erklärung weniger geeignet als die gewöhnliche und zwar schon aus dem Grunde, weil auch solche Theile des Integrationsgebietes berücksichtigt werden müssten, deren Begrenzung nicht bloß aus geraden Linien besteht.

¹⁾ Fondamenti per la teorica etc. Nr. 184.

²⁾ Da in meinen „Grundzügen“ der Dini'sche Satz nicht berücksichtigt ist, so musste zu der Darstellung auf S. 358 d. I. Bd. ein Nachtrag im II. Bd. S. 330 geliefert werden. Bei Benutzung jenes bezw. des Satzes (I) i. T. fällt derselbe natürlich weg.