VII. *Untersuchung der durch Druck und Zug hervorgerufenen Doppelbrechung bei Kautschuk und Leimgallerten; von P. von Bjerkén.*

Dass isotrope Körper, wenn äussere mechanische Kräfte auf dieselben wirken, doppeltbrechend werden, ist schon seit dem Anfange dieses Jahrhunderts durch Brewster¹⁾ bekannt. Auch natürliche Krystalle ändern ihre optischen Eigenschaften durch Kräfte, die nicht von allen Seiten gleich sind. So z. B. wird ein optisch einaxiger Krystall durch einen senkrecht zur Axe ausgeübten Druck zweiachsig. Verschiedene Untersuchungen über diese Erscheinungen sind ausgeführt, und die geschichtliche Entwicklung der Frage ist sehr vollständig von Pockels²⁾ gegeben. Quantitative Bestimmungen der Abhängigkeit der Doppelbrechung von der Grösse der Kräfte und der Deformationen gibt es nicht viele, und besonders für Kautschuk, so viel ich weiss, gar keine. Im folgenden erlaube ich mir einige derartige Bestimmungen mitzutheilen, welche sich auf Kautschuk und Leimgallerten beziehen; ein Theil der Beobachtungen wurde früher in Upsala angestellt und veröffentlicht.³⁾

Anordnung der Versuche.

Das homogene Licht einer Natrium- oder Lithiumflamme *A* (Fig. 1), wurde durch ein Nicol *N*₁ in einer Ebene polarisirt, die einen Winkel von 45° mit der Verticalebene bildete. Das so polarisirte Licht ging in horizontaler Richtung durch den zu untersuchenden Körper *B*, wurde mit einer Linse *L*₁ convergirend gemacht und ging dann durch eine senkrecht zur Axe geschliffene Kalkspathplatte *K*, die um eine zu den Lichtstrahlen senkrechte Axe beweglich war. Das Licht

1) Brewster, Phil. Trans. mehrere Abh. 1815. 1816.

2) Pockels, Wied. Ann. 37. p. 144. 269. 372. 1889.

3) P. v. Bjerkén, Några undersökningar öfver accidentell dubbelbrytning hos gelatinösa ämnen. Inaug.-Diss. Upsala 1890.

wurde dann mit einem zweiten Nicol N_2 analysirt, dessen Hauptschnitt zu dem des vorigen senkrecht war. Wenn

Fig. 1.

der Körper B isotrop ist, so sieht man durch N_2 die gewöhnliche Interferenzfigur (Fig. 2). Hat man ferner bei M im Brennpunkte der Linse L_1 ein Fadenzkreuz und bei L_2 eine Zerstreuungslinse von passender Brennweite, so kann man durch Drehung der Platte K um eine horizontale oder verticale Axe (immer senkrecht zur Richtung der Lichtstrahlen) das Fadenzkreuz zum Zusammenfallen mit zwei entgegengesetzten Punkten eines dunklen Ringes bringen. Man erhält so den

Fig. 2—6.

doppelten Einfallswinkel, für welchen die Lichtstärke gleich Null ist. Um diesen Winkel zu messen, war auf derselben Axe, um welche die Platte K drehbar war, ein Fernrohr befestigt, durch welches ein Maassstab beobachtet wurde;

man erhielt so die trigonometrische Tangente des Drehungswinkels. Wurde jetzt der Körper *B* durch ein Gewicht gedehnt, so änderte sich sofort die Interferenzfigur, indem die Ringdiameter in der Zugrichtung grösser wurden und aus dem Mittelpunkt sich dunkle Flecke bildeten, während in der senkrechten Richtung die Diameter kleiner wurden, und die Figur ging continuirlich durch die Formen (Fig. 3, 4, 5, 6), wo die Pfeile die Zugrichtungen bedeuten. Bei Zusammen-drückung ging die Interferenzfigur durch dieselben Formen in entgegengesetzter Richtung.

Um die Stücke belasten und die Deformation messen zu können, wurden sie in folgender Weise vorbereitet. Die Leimgallerten wurden in derselben Weise hergestellt wie bei den Untersuchungen über ihre Elasticität und Wärmeer-scheinungen.¹⁾ Die warme Lösung wurde in ein Kästchen aus vier Glasscheiben und zwei Holzplatten gegossen. Nach dem Erkalten wurden die Glasscheiben weggenommen, und man hatte ein Parallelipipedon mit an den Enden festgeschmolzenen Holzplatten für das Aufhängen und die Belastung, wobei durch besondere Vorrichtungen dafür gesorgt wurde, dass das Licht immer denselben Theil des Paralleli-pipedons durchsetzte.

Berechnung der Beobachtungen.

Die Theorie liefert für die Lichtstärke den Ausdruck:

$$R^2 = \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \left\{ D(n_o - n_e) \pm \frac{D'}{\omega} (\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 i} - \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}) \right\};$$

wo λ die Wellenlänge des Lichts, D die Dicke, n_o und n_e die Hauptbrechungsexponenten des gedehnten Körpers, D' die Dicke, $1/\omega$ und $1/\epsilon$ die Hauptbrechungsexponenten der Kalkspathplatte K , und i der Einfallswinkel bei dem Eintritt der Strahlen in die Platte K sind. Das obere Zeichen zwischen den beiden Gliedern muss genommen werden, wenn die Drehungsaxe der Platte horizontal, das untere, wenn sie vertical ist. Sind die Einfallswinkel i nicht grösser als dass man die vierten und höheren Potenzen von $\sin i$ vernach-lässigen kann, so erhält man nach Reihenentwicklung:

1) v. Bjerkén, Wied. Ann. 43. p. 818. 1891.

$$R^2 = \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \left\{ D(n_o - n_e) \mp \frac{D'}{2\omega} (\varepsilon^2 - \omega^2) \sin^2 i \right\},$$

oder für die gegebene Platte, wo D' , ω und ε constant sind:

$$R^2 = \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \{ D(n_o - n_e) \mp k \sin^2 i \}.$$

In homogenem Licht hat man für die dunklen Linien:

$$R^2 = 0$$

zu setzen, oder:

$$D(n_o - n_e) \mp k \sin^2 i = m\lambda,$$

wo m eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Die Grösse k kann für die Platte berechnet werden, es ist aber zweckmässiger sie experimentell zu bestimmen, was einfach so geschieht, dass man den Winkel i_o misst, wenn das Licht keinen gedehnten Körper durchläuft. Die Kalkspathplatte war 5,8 mm dick und die Einfallswinkel immer so klein, dass das vernachlässigte Glied in der Reihenentwicklung $< 0,0_65$ war, wodurch man berechtigt ist den Gangunterschied $D(n_o - n_e)$ mit 6 Decimalstellen anzugeben.

Beobachtungen.

In den folgenden Tabellen theile ich einige der Beobachtungsreihen mit; die auf Leimgallerte bezüglich sind zum Theil schon vorher publicirt (l. c.), die übrigen im Physikalischen Institut der Universität Freiburg i. B. vorgenommen. Das untersuchte Kautschukstück war ein dünnes Blatt von demselben Präparate, das ich in Bezug auf Elasticität und Wärme untersucht habe. Die Leimparallelepiped hatten eine Länge von etwa 50 mm, Breite und Dicke von je 15 bis 20 mm. In einigen Fällen ist immer die Dicke D der letzteren beobachtet, in anderen Fällen die Länge L , jedenfalls berechnet man leicht die Verlängerung der Längeneinheit l , wenn man weiss, dass diese Körper bei Dehnung ihr Volumen nahezu unverändert beibehalten.¹⁾ P sind die Belastungen in Gramm und P/S die Belastungen der Flächeneinheit in g/cm².

1) v. Bjerkén, Wied. Ann. 43. p. 819. 1891.

Kautschuk.

 $B_0 = 24,6 \text{ mm}, \quad D_0 = 0,25 \text{ mm}, \quad \lambda = 0,0,589 \text{ mm}.$

$P \text{ g}$	$L \text{ mm}$	$\frac{P}{S} \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$	l	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$	$P \text{ g}$	$L \text{ mm}$	$\frac{P}{S} \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$	l	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
0	47	0			710	248	60900	4,28	17590
210	78	5670	0,66	1390	610	243	51300	4,17	17240
310	115	12300	1,45	2530	510	238	42000	4,06	17060
410	157	22300	2,34	4670	410	231	32800	3,91	16470
510	205	36200	3,36	8190	310	211	22600	3,49	12870
610	227	47900	3,83	13000	210	92	6680	0,96	1800
710	241	59200	4,13	15020	110	59	2250	0,25	560
810	251	70350	4,34	16640					

Leimgallerten.

1. $D_0 = 21,41 \text{ mm}; \lambda = 0,0,671.$

$\frac{P}{S} \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$	$D \text{ mm}$	l	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
3,7	21,39	0,001	5,5
7,1	21,21	0,019	10,5
10,0	20,98	0,041	13,7
12,9	20,79	0,060	17,6
16,0	20,60	0,080	20,9
19,3	20,35	0,107	24,7
22,6	20,13	0,131	27,8
26,1	19,93	0,152	30,7
29,6	19,76	0,174	34,0
33,3	19,58	0,196	37,0
36,7	19,50	0,206	40,0

2. $D_0 = 16,57 \text{ mm}; \lambda = 0,0,671.$

$\frac{P}{S} \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$	$D \text{ mm}$	l	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
2,9	16,56	0,001	9,9
24,5	16,53	0,005	12,8
47,1	16,50	0,008	16,0
70,1	16,45	0,015	19,3
93,2	16,41	0,020	24,2
117,0	16,34	0,028	28,8
141,0	16,28	0,036	33,4
164,7	16,25	0,039	36,5
190,8	16,13	0,055	39,6
215,7	16,08	0,060	45,2
241,2	16,02	0,070	51,0

3. $D_0 = 24,41 \text{ mm}; \lambda = 0,0,589.$

$\frac{P}{S} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^2}$	$D \text{ mm}$	l	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
4,3	24,41	0,0	2,8
14,6	24,01	0,034	6,5
23,3	23,72	0,059	9,8
32,3	23,47	0,082	12,9
41,9	23,16	0,111	16,4
52,0	22,86	0,141	20,5
62,6	22,57	0,170	23,8
73,5	22,31	0,197	26,9
84,9	22,05	0,226	29,7
108,3	21,63	0,274	35,8

4. $I_0 = 40,0 \text{ mm}; \lambda = 0,0,589.$

$\frac{P}{S} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^2}$	$L \text{ mm}$	l	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
0,0	40,0	0,0	0,3
17,0	40,64	0,016	4,8
33,0	41,27	0,032	9,5
49,2	41,72	0,043	13,9
65,9	42,28	0,057	18,5
83,2	42,90	0,072	22,8
100,6	43,36	0,084	26,4
118,8	43,98	0,100	30,8
137,1	44,50	0,113	35,7
155,9	45,04	0,126	40,1
174,5	45,43	0,136	43,9

Discussion der Ergebnisse.

1. Bei den Dehnungen haben sich sowohl das Kautschuk als die Leimgallerten als negative ($n_o > n_e$) Körper, bei Zusammendrückung als positive ($n_o < n_e$) gezeigt. Das nämliche

Verhalten zeigt auch Glas nach mehreren Beobachtern. Entgegengesetzt verhalten sich einige andere Körper: Metaphosphorsäure¹⁾, Kirschgummi und Traganthgummi.²⁾

2. Was die Wellenlänge des Lichts betrifft, hat Wertheim³⁾, geglaubt schliessen zu können, dass die künstlich erzeugte Doppelbrechung davon unabhängig ist. Dagegen hat Macé⁴⁾ constatirt, dass dies nicht der Fall ist. Dasselbe geht auch aus meinen früheren Untersuchungen⁵⁾ ganz deutlich hervor.

3. Wenn man die Deformationen und die Doppelbrechung [durch die Quantität $(n_o - n_e)$ gemessen] als Ordinaten mit den Belastungen der Flächeneinheit als Abscissen graphisch construirt, so verlaufen die beiden Curven einander ganz ähnlich. Ferner ändert sich bei der Nachwirkung, während die Belastung constant bleibt, sowohl die Deformationen⁶⁾ als die Doppelbrechung. Aus diesen Gründen scheint es zweckmässig, die Doppelbrechung als Function der Verlängerung der Längeneinheit, l , anzusehen. Indessen ist in den Tabellen auch die Belastung der Flächeneinheit angegeben, welche für das gedehnte Stück berechnet ist.

4. Die künstliche Doppelbrechung ist der Verlängerung der Längeneinheit nicht proportional, und man kann auch nicht ein allgemein gültiges Gesetz dafür angeben. Wenn man nämlich die Quantität $(n_o - n_e) / l$ berechnet, so zeigt sich, dass diese Grösse, wenn l wächst, für Kautschuk zunimmt, im Fall 4 von Leimgallerten nahezu constant ist und in den Fällen 1, 2 und 3 abnimmt, obgleich die Aenderungen nicht so sehr gross sind. Im allgemeinen, wenn auch nicht ausnahmslos, ist die Doppelbrechung für eine Verlängerung der Längeneinheit = 1 um so grösser, je grösser der Elasticitätscoefficient. Dies zeigt folgende, aus meinen früheren Untersuchungen entnommene, Tabelle, in welcher Q den

1) Mach, Pogg. Ann. 146. p. 313. 1872.

2) v. Ebner, Wien. Ber. 97. p. 39. Jan. 1888.

3) Wertheim, Pogg. Ann. 86. p. 321. 1852.

4) Macé Compt. rend. 86. p. 326. 1878.

5) P. v. Bjerkén, l. c. p. 16.

6) Dabei ändert sich zwar auch ein wenig die Belastung der Flächeneinheit, aber in zu geringem Grade, um hier in Betracht zu kommen.

Elasticitätscoefficienten bedeutet und wo auch die Doppelbrechung β für $P/S = 1 \text{ gr/cm}^2$ verzeichnet ist, alle aus kleinen Verlängerungen berechnet.

5. Einige der Werthe von $(n_o - n_e)$ sind durch Zusammenrückung erhalten, in welchen Fällen sie, wie vorher gesagt, negativ gewesen sind. In Bezug auf die Grösse dieser Quantität habe ich keinen Unterschied zwischen Dehnung und Zusammendrückung beobachten können.

Q	$\beta \cdot 10^6$	$\frac{n_o - n_e}{l}$	Q	$\beta \cdot 10^6$	$\frac{n_o - n_e}{l}$
3600	0,17	0,0,615	301	0,38	0,0,115
2310	0,29	674	294	0,41	119
1740	0,30	530	262	0,38	099
450	0,40	180	185	0,51	094
403	0,50	202	161	0,86	137
365	0,38	137	142	0,88	125
333	0,37	121	138	1,39	191
333	0,40	132	126	1,37	172
323	0,42	125			

Für Kautschuk stellen sich diese Quantitäten in folgender Weise:

$$Q = 10000 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^2}; \quad \beta \cdot 10^6 = 0,25; \quad \frac{n_o - n_e}{l} = 0,0025.$$

Für verschiedene Glassorten hat Wertheim¹⁾ folgendes angegeben:

$$\begin{array}{lll} \text{Kronglas: } Q = 70 \times 10^7 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^2}; & \beta \cdot 10^6 = 0,0,186; & \frac{n_o - n_e}{l} = 0,130 \\ \text{Spiegelglas: } & 61 \times 10^7; & 0,0,210; \quad 0,128 \\ \text{Flintglas: } & 55 \times 10^7; & 0,0,237; \quad 0,130 \end{array}$$

Optische Erscheinung bei der elastischen Nachwirkung.

Da wir oben gesehen haben, dass die künstlich erzeugte Doppelbrechung mit den elastischen Deformationen sehr nahe zusammenhängt, so ist natürlich, dass bei der Nachwirkung auch die Doppelbrechung mit der Zeit wächst, und zwar nach etwa demselben Gesetz wie die Verlängerung. Unter den Versuchen, die ich in dieser Beziehung gemacht habe, mögen die folgenden angeführt werden. Sie wurden mit einem Stück Leimgallerte vorgenommen, das eine sehr grosse Nachwirkung zeigte und dessen Längenänderungen so gross waren,

1) Wertheim, l. c. p. 323.

dass sie einfach direct beobachtet werden konnten. Die Doppelbrechung wurde jede Minute bestimmt, wobei die Einstellung des Fadenkreuzes auf zwei einander diametral entgegengesetzte Punkte eines dunklen Ringes resp. 5 Secunden vor und 5 Secunden nach der angegebenen Zeit gemacht wurde. Die ursprünglichen Dimensionen des Stücks waren: Länge = 54,7, Breite = 33,7 und Dicke = 2,5 mm. In den Tabellen bedeutet t die Zeit in Minuten, nach dem die Belastung angebracht wurde, L die beobachtete Länge, woraus man, wie vorher gesagt ist, die Breite und Dicke berechnen kann.

1. $P = 810 \text{ g.}$ $\frac{P}{S} = 1323 \text{ bis } 1407 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}.$

t	$L \text{ mm}$	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
0,5	74,8	240
1,5	76,3	256
2,5	76,6	265
3,5	77,5	262
4,5	77,7	270
5,5	78,0	275
6,5	78,4	275
7,5	78,5	275
8,5	78,9	276
	79,5	282

2. $P = 0$ [810 g weggenommen].

t	$L \text{ mm}$	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
0,5	60,4	119
1,5	59,0	108
2,5	58,5	104
3,5	58,3	98
4,5	58,0	99
5,5	57,7	96
6,5	57,5	95
7,5	57,5	95
8,5	57,5	91
	57,4	91

3. $P = 1510 \text{ g.}$ $\frac{P}{S} = 3180 \text{ bis } 3500 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}.$

t	$L \text{ mm}$	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
0,5	96,5	411
1,5	99,0	431
2,5	100,3	442
3,5	101,0	444
4,5	101,6	449
5,5	102,3	449
6,5	102,6	455
7,5	103,2	458
8,5	103,4	458
20,0	106,1	475

4. $P = 0$ [1510 g weggenommen].

t	$L \text{ mm}$	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
0,5	67,5	179
1,5	64,3	145
2,5	63,3	139
3,5	62,5	133
4,5	62,0	129
5,5	61,6	124
6,5	61,4	123
7,5	61,2	122
8,5	61,1	120
20,0	60,1	113

Diese Beobachtungen können durch die Gauss'sche Formel¹⁾ ausgedrückt werden. Bezeichnen wir also:

$$(n_o - n_e) \cdot 10^6 = y,$$

so können wir setzen:

1) Weber, Pogg. Ann. **34**. p. 247. 1835.

$$L = a + \frac{b}{c+t}, \quad y = a' + \frac{b'}{c'+t}.$$

Aus den für jede Belastung gemachten 8 bis 10 Beobachtungen von L und y sind die Constanten dieser Formeln berechnet und daraus L_0 , y_0 , L_∞ und y_∞ zur Zeit $t = 0$ und $t = \infty$ und in der folgenden Tabelle angegeben. Ausserdem sind auch $|L_0 - L_\infty|$ und $|y_0 - y_\infty|$ verzeichnet, um zu zeigen, wie die Nachwirkung mit der Belastung wächst. Belastung gleich 0 bedeutet, dass die zuletzt angebrachte Belastung zur Zeit 0 weggenommen worden ist.

P g	L_0 mm	L_∞ mm	y_0	y_∞	$ L_0 - L_\infty $	$ y_0 - y_\infty $
510	64,1	67,5	143	175	3,4	32
0	58,3	54,9	86	67	3,4	19
610	67,0	71,4	161	207	4,4	46
0	61,1	56,1	89	69	5,0	20
710	69,7	76,5	200	270	6,8	70
0	61,1	56,6	117	78	4,5	39
810	73,7	80,2	220	285	6,5	65
0	61,4	56,4	136	88	5,0	48
910	77,7	85,1	263	321	7,4	58
0	64,7	57,7	132	85	7,0	47
1010	73,5	82,9	229	310	9,4	81 ¹⁾
0	62,7	57,4	123	96	5,3	27
1110	79,8	87,1	287	329	7,3	42
0	65,6	57,8	136	93	7,8	43
1210	83,5	91,0	318	377	7,5	59
0	66,5	58,7	—	—	7,8	—
1210	79,8	90,0	277	366	10,2	89 ²⁾
0	65,3	58,4	170	103	6,9	67
1310	84,9	93,5	324	393	8,6	69
0	65,9	58,5	183	106	7,4	77
1410	91,2	101,5	348	438	10,3	90
0	68,8	58,8	187	108	10,0	79
1510	95,2	107,2	396	473	12,0	77
0	71,1	59,8	208	107	11,3	101

Grosse Genauigkeit kann man bei diesen Zahlen nicht erwarten, weil erstens jede Zahl aus nur wenigen Beobachtungen abgeleitet ist, und zweitens, da man eine empirische Formel benutzt.

Bei diesen Bestimmungen, wo grosse Deformationen und deswegen grosse Doppelbrechung erreicht worden sind, ist die Doppelbrechung sehr nahe mit der Verlängerung der Längeneinheit proportional.

Physikalisches Institut Freiburg i. B., Mai 1891.

1) Nach 15 Stunden.

2) Nach 3 Stunden.