COPPIE DESTATE SU UNA SFERA CONDUTTRICE DA UN CAMPO ROTANTE.

Ricerche del Dott. O. M. CORBINO ¹⁾.

1. La determinazione della coppia necessaria per far rotare una sfera conduttrice in un campo uniforme, coppia eguale a quella destata sulla sfera in quiete da un campo rotante, con eguale velocità, costituisce un problema purtroppo ancora insoluto malgrado la sua apparente semplicità.

Le più antiche ricerche teoriche sull'argomento, dovute al Prof. Felici, erano state proseguite dal Jochmann, il quale, però, dovè supporre, per semplicità, la velocità di rotazione molto piccola, in modo da potere trascurare gli effetti dell'autoinduzione.

Altre ricerche teoriche e sperimentali sono riassunte a pag. 517 (B. IV) del trattato del Wiedemann; ma non vi si trova menzionata, come neanche in molti lavori successivi, una magistrale memoria di Hertz ²⁾, il quale si propose di risolvere il problema completamente nel caso che il corpo considerato sia una sfera piena o cava, che i magneti siano fuori o dentro la sfera cava, e che la sfera stessa abbia o no proprietà magnetiche.

Malgrado il poderoso studio dell'Hertz, riflettente l'azione di un campo qualsiasi sulla sfera e molti casi particolari, il problema non è completamente risoluto neanche per un campo uniforme. Le formole cui egli perviene sono infatti calcolabili solo nel caso di uno strato sferico sottilissimo; mentre per la sfera piena lo sono soltanto nei casi limiti di velocità piccolissime o grandissime.

Resta sconosciuto il comportamento della sfera, dal punto di vista quantitativo, entro limiti molto estesi di frequenza, poichè la velocità di 5000 giri al secondo non è ancora abba-

1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Palermo, diretto dal Prof. D. Macaluso.

2) Hertz. Ueber die Induktion in rotierenden Kugeln. Inaugural - Dissertation. Berlin, Gesammelte Werke, Bd. 1^o, pag. 37.

stanza grande perchè si possa applicare la formola relativa alle grandi velocità, mentre l'altra è valida solo per pochi giri al secondo.

È quindi di grande interesse ricercare sperimentalmente il valore della coppia per tali velocità intermedie; ciò forma appunto l'oggetto delle presenti ricerche, nelle quali viene misurata la coppia destata su sfere di metalli diversi da campi rotanti con velocità comprese tra 500 e 6000 giri al secondo.

2. Credo necessario richiamare anzitutto i risultati principali della teoria di Hertz per precisare il campo di applicabilità delle sue formole, e dedurne una legge molto importante e semplice che è valida per qualunque velocità. Stabilito un sistema di assi ortogonali, col centro nel centro della sfera e con l'asse z secondo l'asse di rotazione e detta Ψ la *funzione di corrente* nel senso dell'Helmholtz, dalla quale dipendono le componenti della densità di corrente u, v, w in un punto qualunque della sfera, il calcolo della Ψ vien fatto sviluppando secondo funzioni sferiche il potenziale dei magneti χ e le correnti che ne derivano.

Tale sviluppo si riduce a un termine quando il campo è uniforme e normale all'asse z ; noi supporremo di essere in questo caso per semplificare l'interpretazione delle formole che rappresentano senza di ciò il termine generale di una serie.

Nel § 4 l'Hertz tratta il caso di una sfera piena o di spessore finito; comincia col dimostrare che le correnti sviluppate per la rotazione della sfera circolano secondo superficie sferiche aventi per centro l'origine; e quindi calcola la Ψ per mezzo di due funzioni ausiliarie f_1 e f_2 di grande importanza nello sviluppo ulteriore del lavoro. Dalla espressione di Ψ si può dedurre che l'autoinduzione, di cui l'autore non aveva tenuto conto nei primi paragrafi, lascia inalterata la forma delle linee di corrente, mentre produce i seguenti effetti:

1° di far rotare tutti i fenomeni di un certo angolo δ nel senso della rotazione della sfera; l'angolo δ è diverso per i vari strati e tale che $\text{tang } \delta = \frac{f_2}{f_1}$;

2° di attenuare l'intensità delle correnti in diversa misura nei vari strati, cosicchè in ogni strato la corrente sta nel rapporto

$$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} : 1$$

con quella calcolata senza tener conto dell'autoinduzione.

3. La determinazione di f_1 ed f_2 , funzioni del raggio vettore ρ di ogni punto interno alla sfera, della velocità di rotazione ω e della resistenza specifica x del materiale di cui è fatta la sfera, è molto laboriosa. Indicando con r ed R i valori estremi del raggio vettore nell'involucro sferico, (O ed R per la sfera piena), e posto

$$\frac{4\pi\omega}{x} = \mu^2; \quad \mu r = s; \quad \mu \rho = \sigma; \quad \mu R = S$$

ed infine indicando con λ_1 e λ_2 le due radici dell'equazione $\lambda^2 = -1$ aventi positive le parti reali, allora le f_1 e f_2 possono esprimersi per mezzo di altre funzioni p e q calcolabili per i successivi termini dello sviluppo in funzioni sferiche con l'aiuto di due formole ricorrenti.

Le f si possono esprimere, in ultimo, a mezzo delle sole q e precisamente, nel caso di un campo uniforme normale all'asse z , la f_1 e la f_2 sono rispettivamente i coefficienti della parte reale e della parte immaginaria dell'espressione:

$$\frac{3}{2} \frac{q_2(\lambda\sigma)q_1(-\lambda\sigma) - q_2(-\lambda\sigma)q_1(\lambda\sigma)}{q_2(\lambda s)q_0(-\lambda S) - q_2(-\lambda s)q_0(\lambda S)}$$

ove le q hanno i valori seguenti

$$q_0(\sigma) = \frac{e^{-\sigma}}{\sigma}; \quad q_1(\sigma) = -\frac{2e^{-\sigma}}{\sigma^2} \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)$$

$$q_2(\sigma) = \frac{4e^{-\sigma}}{\sigma^3} \left(1 + \frac{3}{\sigma} + \frac{3}{\sigma^2}\right).$$

Nel caso di piccole velocità di rotazione si ha, tenendo conto delle sole prime potenze della velocità medesima nello sviluppo delle f ,

$$(1) \quad \text{arc tang } \frac{f_2}{f_1} = \delta = -\frac{2\pi\omega}{x} \left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5}\right)$$

mentre per velocità grandissime, quando si possa trascurare $\frac{1}{\sigma}$ di fronte a 1, si ha

$$\text{arc tang } \frac{f_2}{f_1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}} (R - \rho)$$

e

$$(2) \quad \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \frac{3}{u} \frac{R}{\rho^2} e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}} (R - \rho)}$$

il che permette di determinare la Ψ .

Le formole ottenute lasciano prevedere i fenomeni che devono prodursi al crescere della velocità nei seguenti termini:

Cominci l'autoinduzione a divenire notevole; allora non si altera la forma delle curve di corrente nei singoli strati, ma esse cominciano ad apparir rotate nel senso della rotazione, specialmente negli strati interni; la rotazione in questi è senza limiti, mentre quella dello strato esterno converge verso il limite finito $\frac{\pi}{4}$.

Se la velocità di rotazione è molto grande, il luogo dei punti corrispondenti dei diversi strati è una spirale di Archimede, con un numero di spire crescente indefinitamente a misura che aumenta la velocità di rotazione.

L'intensità aumenta in principio con la velocità di rotazione, più rapidamente negli strati esterni che negli interni; nei più esterni aumenta sempre, negli altri raggiunge per una certa velocità di rotazione un massimo, al di là torna a diminuire. Per grandi valori di ω essa diminuisce dall'esterno all'interno come una funzione esponenziale il cui esponente contiene $\sqrt{\omega}$.

4. Nel § 5 l'Hertz ricerca le forze necessarie per mantenere in rotazione la sfera, desumendole dal calore sviluppato dalle correnti indotte.

Nel caso da noi considerato tale calore è espresso da

$$(3) \quad W = \frac{\omega^2}{x} \frac{A^2}{2} \int_0^R \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 (f_1^2 + f_2^2) \rho^2 d\rho$$

e da questa si può avere direttamente il momento della coppia D :

$$D = \frac{W}{2 \pi \omega}.$$

Nel caso di velocità piccolissime, per cui sia $f_1 = 1$, e $f_2 = 0$ si ha dunque

$$(4) \quad D = \frac{\omega}{2 \pi x} \frac{A^2}{10} R^3$$

e invece per grandissime velocità, per cui vale la (2) si ha

$$(5) \quad D = \frac{A^2}{8 \pi^2} \sqrt{\frac{x}{2 \pi \omega}}.$$

Cosicchè, se si fa girare il campo esterno con velocità ω , si eserciterà sulla sfera una coppia che per piccoli valori di ω aumenta proporzionalmente a $\frac{\omega}{x}$ mentre per grandi valori di ω diminuisce al crescere di ω , e precisamente è proporzionale a $\sqrt{\frac{x}{\omega}}$, fino ad annullarsi per ω grandissimo.

Esclusi questi casi estremi, la formola non è calcolabile per le velocità intermedie; e anzi l'ultima ipotesi, che conduce al risultato paradossale di una coppia crescente indefinitamente al crescere della resistenza specifica, si riferisce a un caso praticamente irrealizzabile. Esso presuppone infatti che sia $\sigma = u \rho$ molto grande di fronte a 1. Ora a parte che ciò non potrà mai avvenire nelle regioni prossime al centro di una sfera massiccia, non avviene neanche per $\rho = R$, pur supponendo la sfera di rame di 2 cm. di diametro e il numero di giri eguale a 5000 per secondo. Posto infatti $R = 10$ mm. e $x = 200000$ per il rame (si adottano con ciò le unità adoperate dall' Hertz) si ha

$$\mu^2 = \frac{4 \pi \omega}{x} = \frac{4 \pi \cdot 2 \pi \cdot 5000}{200000}$$

e quindi

$$\mu = 1,4$$

e

$$\mu R = 14$$

Or $1/14$ non è invero trascurabile di fronte a 1, e molto meno lo sarà per velocità minori, dentro la sfera, e con metalli molto più resistenti del rame.

5. Un risultato molto interessante possiamo pur tuttavia ricavare dalla teoria di Hertz.

La coppia, nel caso più generale, ha per fattore il rapporto $\frac{\omega}{x}$, e contiene le funzioni f_1 e f_2 le quali sono esprimibili per mezzo delle q ; queste alla loro volta son funzioni di ρ e della grandezza μ dipendente dal rapporto $\frac{\omega}{x}$.

In ultima analisi, quindi, se la formola fosse sviluppabile, conterrebbe, per quanto in forma complicata, il raggio R e il rapporto $\frac{\omega}{x}$. Si può quindi enunciare la seguente legge:

Per un determinato raggio la coppia è funzione soltanto del rapporto tra la velocità di rotazione e la resistenza specifica del conduttore, cosicchè essa acquisterà lo stesso valore se si altera la velocità e la resistenza nella stessa misura.

Si avrà quindi la stessa coppia per una sfera di stagno a 500 giri e per una sfera eguale di bismuto a 5000 giri, se la resistenza del bismuto è decupla di quella dello stagno.

6. Tolta la legge enunciata, nessuna altra previsione quantitativa può farsi sulla base della teoria di Hertz; e, d'altra parte, finchè si tratta di prevedere l'andamento generale del fenomeno, può dare sufficienti lumi un ragionamento diretto. Le correnti indotte nella sfera si localizzano, per lo skin-effect, negli strati esterni, penetrando tanto più profondamente quanto minore è la frequenza e maggiore la resistenza specifica.

Può quindi avvenire che malgrado esse siano più intense negli strati esterni di una sfera di rame, si abbiano coppie più energiche con un metallo di maggior resistenza, perchè un maggior numero di strati viene impegnato nel fenomeno; ma si intende che un accrescimento ulteriore di resistenza possa far diminuire la coppia se già tutti gli strati fino al centro erano abbastanza impegnati; si può ancora prevedere che per una certa frequenza la resistenza specifica cui corrisponde la massima coppia debba esser tanto più elevata quanto maggiore è il raggio della sfera.

Alcune di queste conseguenze ho potuto verificare con la esperienza, servendomi di campi rotanti con velocità variabili da 500 a 6000 giri per secondo. Comincerò con l'esporre il metodo seguito per la creazione del campo e quindi i risultati delle esperienze eseguite con sfere di tre metalli: rame, stagno e bismuto, aventi le resistenze rispettive 1, 8, 80.

7. In un lavoro precedente¹⁾ ebbi a indicare un metodo per la produzione di campi rotanti a mezzo delle correnti di Duddel; esso è stato seguito in massima nelle presenti ricerche.

I circuiti 1 e 2 (fig. 1) hanno in presenza una parte con un coefficiente di induzione mutua M ; in G agisce un arco voltaico che determina nel sistema 1 delle correnti di Duddel.

Fig. 1.

Rendendo queste correnti sinusoidali, e scegliendo l'autoiduzione L_2 e la capacità C_2 in modo che il periodo proprio

¹⁾ Corbino. Sulla produzione di campi rotanti per mezzo di correnti di scarica sinusoidali o smorzate. Atti A. E. J. Dic. 1903. — N. Cim. S. 5., t. 7, pag. 175, 1904.

del sistema 2 sia eguale a quello delle correnti circolanti nel sistema 1, allora le tensioni esistenti agli estremi di L_2 e di C_2 si compensano in ogni istante, e il circuito 2 si comporta come se fosse costituito dalla sola resistenza r_2 ; la corrente i_2 sarà quindi in fase con la f. e. m. indotta dalle corrente i_1 del sistema 1, e quindi in quadratura con i_1 . Se si vuole che anche l'intensità massima I_2 sia eguale all'intensità massima I_1 basterà disporre le cose in modo da aversi

$$M\omega = r_2.$$

Le due correnti i_1 e i_2 potranno dunque servire per la produzione di un campo rotante quando esse traversino due bobine identiche disposte in piani ortogonali.

Collocando opportunamente un tubo di Braun con l'asse normale agli assi delle due bobine si disegnerà sul disco fluorescente, in generale, un'ellisse ad assi inclinati; essa si orienterà con gli assi principali secondo gli spostamenti prodotti dalle due bobine, se il periodo proprio del sistema 2 è rigorosamente eguale a quello delle correnti inducenti; e diverrà un cerchio, in quest'ultimo caso, se sarà soddisfatta l'ultima relazione.

8. In pratica però le cose non vanno così semplicemente. La minima differenza tra il periodo proprio del sistema 2 e quello delle correnti inducenti distrugge il compenso tra la tensione agli estremi di L_2 e quella agli estremi di C_2 ; ne risulta che tra i_1 e i_2 non si ha più la differenza di fase di 90° e sul disco apparisce una ellisse ad assi inclinati.

La curva segue con grande squisitezza le minime variazioni di L_2 , di C_2 o di ω ; ottenuto, per esempio, il cerchio o una figura molto prossima ad un cerchio, essa si deforma incessantemente per le minime, ma inevitabili, variazioni del suono dell'arco e quindi del periodo delle correnti principali, come pure per una piccola variazione di L_2 e di C_2 .

Una seconda perturbazione, analoga a quella che ebbi a riferire altra volta, si ha in ciò che quando il periodo proprio del sistema 2 è minore di quello della corrente inducente, la curva cambia natura presentando delle vere rientranze e dei

gomiti bruschi, fino a dare le curve intrecciate caratteristiche della composizione di vibrazioni di diverso periodo; inoltre in prossimità della eguaglianza dei periodi l'arco si incanta bruscamente e non è possibile ristabilirne le vibrazioni.

Per vincere quest'ultimo ostacolo ho trovato utilissimo ricorrere a due archi in serie anzichè a uno solo.

Dopo alquanti tentativi ottenni un campo quasi circolare, ma era molto difficile averlo per diverse frequenze; invece era molto più agevole avere una figura di forma quasi ellittica, ma ben definita. Ora per il mio scopo un campo ellittico poteva servire egualmente come un campo circolare, potendosi decomporre il primo in un campo circolare di raggio eguale all'asse minore più un campo rettilineo oscillante secondo l'asse maggiore e che, per conto proprio, non determina alcuna coppia su una sfera metallica.

Malgrado i più pazienti ritocchi non fu tuttavia possibile ottenere, a frequenze elevate, curve veramente ellittiche, da cui poter dedurre l'intensità del campo rotante circolare.

Il campo subiva a quelle frequenze, durante la rotazione, notevoli ed irregolari variazioni di intensità, rivelando la non sinusoidalità della corrente principale; ciò rendeva illusorie le misure fatte sulla curva, pur restando degni di fede, come vedremo, i risultati relativi al confronto di *metalli diversi* per ciascuna frequenza.

9. Per potere stabilire fino a qual punto siano attendibili, con campi non ellittici, le misure relative a diversi metalli per una determinata frequenza occorre tener presente la vera forma delle correnti di Duddel. Tale forma, come fu da me dimostrato altrove ¹⁾, è quella di una senoide in cui la cresta sia troncata e vi sia sostituito un tratto rettilineo, in modo da risultarne il diagramma A B D H L M I (fig. 2) nel quale il tratto H L M I è eguale, sebbene spostato, al tratto D E F G, e l'area A B D H U è eguale all'area della mezza senoide.

1) Corbino. Sul meccanismo di produzione delle correnti di Duddel. Atti A. E. I. Ottobre 1903.

Il periodo complessivo è perciò maggiore di quello della sinusoide, secondo il rapporto :

$$K = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \arcsin \frac{b}{a} \right)$$

ove a indica l'ampiezza della sinusoide e b l'ordinata corrispondente alla troncatura.

Fig. 2.

Posto $AI = 2\pi$, il diagramma $ABDHLMI$ ha una rappresentazione analitica semplice nei tre intervalli AP , PU , UI .

Si ha infatti, posto

$$AP = \alpha, \quad AU = \beta$$

e indicando con y l'intensità corrispondente all'ascissa x ,

$$\text{tra } x = 0 \text{ e } x = \alpha \quad y = a \sin Kx$$

$$\text{tra } x = \alpha \text{ e } x = \beta \quad y = b$$

$$\text{tra } x = \beta \text{ e } x = 2\pi \quad y = a \sin (Kx - 2K\pi)$$

come è facile vedere.

Riesce quindi agevole esprimere la funzione y in tutto l'intervallo $0 - 2\pi$ per mezzo di una serie di Fourier della forma

$$y = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + A_3 \sin 3x + \dots \\ + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + B_3 \cos 3x + \dots$$

poichè è facile calcolarsi i coefficienti dello sviluppo

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \operatorname{sen} m x \, dx$$

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos m x \, dx$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} y \operatorname{sen} m x \, dx &= a \int_0^{\alpha} \operatorname{sen} K x \operatorname{sen} m x \, dx + b \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{sen} m x \, dx + \\ &+ a \int_{\beta}^{2\pi} \operatorname{sen} (K x - 2 K \pi) \operatorname{sen} m x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} a \left[\frac{\operatorname{sen} (K - m) x}{K - m} - \frac{\operatorname{sen} (K + m) x}{K + m} \right]_0^{\alpha} - \frac{b}{m} \left[\operatorname{sen} m x \right]_{\alpha}^{\beta} + \\ &+ \frac{1}{2} a \left[\frac{\operatorname{sen} [(K - m) x - 2 K \pi]}{K - m} - \frac{\operatorname{sen} [(K + m) x - 2 K \pi]}{K + m} \right]_{\beta}^{2\pi}. \end{aligned}$$

In modo analogo si svilupperebbe l'integrale che occorre per il calcolo di B_m .

Con una serie di semplici trasformazioni, destinate a dare alle formole una forma comoda per il calcolo numerico si viene al seguente risultato: posto

$$\begin{aligned} P_m &= \left(\pi - \frac{\beta - \alpha}{2} \right) K + m \frac{\beta - \alpha}{2}; \quad Q_m = \left(\pi - \frac{\beta - \alpha}{2} \right) K + m \frac{\beta + \alpha}{2} \\ R_m &= \left(\pi - \frac{\beta - \alpha}{2} \right) K - m \frac{\beta - \alpha}{2}; \quad S_m = \left(\pi - \frac{\beta - \alpha}{2} \right) K - m \frac{\beta + \alpha}{2} \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} \pi A_m &= a \frac{\operatorname{sen} P_m \cos Q_m}{K - m} - a \frac{\operatorname{sen} R_m \cos S_m}{K + m} + 2 \frac{b}{m} \operatorname{sen} m \frac{\beta + \alpha}{2} \operatorname{sen} m \frac{\beta - \alpha}{2} \\ \pi B_m &= a \frac{\operatorname{sen} P_m \operatorname{sen} Q_m}{K - m} - a \frac{\operatorname{sen} R_m \operatorname{sen} S_m}{K + m} + 2 \frac{b}{m} \cos m \frac{\beta + \alpha}{2} \operatorname{sen} m \frac{\beta - \alpha}{2} \end{aligned}$$

Queste formole si prestano facilmente al calcolo, poichè si passa da P_m, Q_m , ecc. a P_{m+1}, Q_{m+1} , ecc. aggiungendo o togliendo $\frac{\beta-\alpha}{2}$ o $\frac{\beta+\alpha}{2}$.

Si dimostrano inoltre facilmente le seguenti relazioni

$$\beta - \alpha = \frac{2}{K} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}; \quad \beta + \alpha = \frac{2K-1}{K} \pi.$$

Per le correnti da me impiegate era $\frac{b}{a}$ non inferiore a $\frac{4}{5}$, nel caso delle alte frequenze; posto appunto $b=4$ e $a=5$, risulta dalla (6)

$$K = 1,034$$

cioè un'alterazione del periodo di circa $\frac{1}{30}$.

Si ha perciò nel caso attuale

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = 42^\circ.32; \quad \frac{\beta + \alpha}{2} = 95^\circ.7'.$$

E quindi per gli angoli P_1, Q_1, R_1, S_1 , da adoperare nel calcolo di A_1 e B_1 si ha

$$\begin{aligned} P_1 &= 4^\circ.40'; & Q_1 &= 2^\circ.53' \\ R_1 &= -80^\circ.23'; & S_1 &= -187^\circ.22' \end{aligned}$$

da cui si può passare facilmente ai valori necessari per il calcolo dei coefficienti successivi.

I risultati, estesi fino al sesto armonico, sono riportati nel seguente quadro, nel quale l'ultima colonna contiene le ampiezze dei successivi armonici

	A_m	B_m	$A_m^2 + B_m^2$	$\sqrt{A_m^2 + B_m^2}$
1	4,265	0,137	18,21	4,27
2	1,111	-0,987	2,21	1,49
3	0,234	0,362	0,186	0,43
4	-0,050	0,644	0,415	0,65
5	-0,062	-0,011	0,004	0,06
6	0,217	0,367	0,182	0,43

Come si vede, malgrado la troncatura sia piuttosto lieve e il periodo molto prossimo a quello corrispondente alla sinusoidalità, gli armonici successivi son lungi dall'essere trascurabili. Per formarsene un'idea netta occorre ricercare quale frazione dell'energia totale è trasportata dall'onda fondamentale; e perciò calcolare l'energia totale.

Or, a parte una costante, si ha per quest'ultima

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} y^2 dx = a^2 \int_0^{\alpha} \sin^2 Kx dx + b^2 (\beta - \alpha) + a^2 \int_{\beta}^{2\pi} \sin^2 (Kx - 2K\pi) dx \\ &= \frac{a^2}{2} [2\pi - (\beta - \alpha)] - \frac{a^2}{4K} [\sin 4K\pi - 2\sin K(\beta - \alpha) \cos K(\beta + \alpha)] + \\ &\quad + b^2 (\beta - \alpha) \end{aligned}$$

cioè, nel caso preso in considerazione,

$$W = 22 \pi .$$

La stessa energia sarebbe sviluppata da una corrente sinusoidale del periodo della fondamentale e avente per quadrato dell'ampiezza 22. Adunque l'onda fondamentale trasporta $\frac{18,2}{22}$ dell'energia totale, il che ci dà un'idea esatta della portata complessiva di tutti gli altri armonici.

10. Ben altra cosa avviene della corrente indotta nel sistema 2. Chiamato M il coefficiente di induzione mutua, e $I_1, I_2, \dots, I_m$ le ampiezze dei successivi armonici della corrente inducente, le rispettive forze elettromotrici indotte nel circuito 2 saranno

$$M \omega I_1, \quad 2 M \omega I_2, \quad 3 M \omega I_3, \dots, m M \omega I_m .$$

A queste diverse f. e. m. il sistema 2 oppone resistenze apparenti diverse. Tale resistenza, data per l' m -esimo armonico da

$$\sqrt{\left(L_2 m \omega - \frac{1}{C_2 m \omega} \right)^2 + r_2^2} ,$$

è eguale a r_2 per il primo armonico della corrente indotta se il periodo proprio del sistema 2 è eguale a quello del fonda-

mentale della corrente inducente, mentre diventa molto grande per gli armonici superiori.

Nel mio caso era $r_2 = 0,5$ ohm mentre era $L_2 = 0,81$ mil-lihenry; alla frequenza 3000 le resistenze apparenti per i successivi armonici erano quindi le seguenti:

1	2	3	4	5	6
r_2	$\frac{3}{2} L_2 \omega$	$\frac{8}{3} L_2 \omega$	$\frac{15}{4} L_2 \omega$	$\frac{24}{5} L_2 \omega$	$\frac{35}{6} L_2 \omega$
0,5	22	40	56	72	87

le ampiezze degli armonici successivi della corrente indotta staranno quindi come

954	13	3	4	0,4	2,4
-----	----	---	---	-----	-----

e le energie relative come

1000000	271	10	17,6	0,17	6,33.
---------	-----	----	------	------	-------

Se si confrontano questi numeri con quelli esprimanti le energie degli armonici nella corrente inducente, cioè coi numeri

1821	221	19	41	0,4	18
------	-----	----	----	-----	----

si vede che la corrente nel sistema 2 è molto purificata degli armonici superiori, cosicchè essa si può considerare praticamente come sinusoidale.

Inoltre mentre per l'onda fondamentale la corrente è in fase con $M \frac{di_1}{dt}$, cioè con la f. e. m. e quindi in quadratura con I_1 , per gli armonici superiori la resistenza ohmica r_2 è trascurabile di fronte alla resistenza induttiva $L_2 m \omega - \frac{1}{C_2 m \omega}$

e quindi la corrente è in quadratura con $M \frac{di_m}{dt}$ e perciò in fase con I_m . Ne consegue che *solo l'onda fondamentale nel sistema 2 darà un campo rotante con la corrispondente del sistema 1, mentre le altre componenti saranno molto deboli, non solo, ma daranno un campo oscillante rettilineo.*

Nel caso più generale in cui il periodo proprio del sistema 2 non sia esattamente dell'onda fondamentale del sistema 1,

e quindi del suono dell' arco, ma abbastanza prossimo ad esso, ne risulterà un indebolimento del 1° armonico indotto e una differenza di fase non esattamente di 90° . Ma in ogni caso noi potremo sempre ridurre il campo risultante a un campo circolare e a un campo rettilineo non sinusoidale *di nessun effetto sulla coppia che subisce la sfera rotante* ma che può deformare anche notevolmente la curva ottenuta al tubo di Braun.

Ciò vale ancora, si noti bene, anche se la corrente principale fosse di forma diversa di quella supposta, e ne risultasse una curva assolutamente irregolare. Ecco perchè nel caso di frequenze elevate, avendo trovato delle curve che non erano delle buone ellissi, e in qualche caso neanche mediocri, ho creduto prudente non eseguire misure sulle curve, per dedurne l'intensità del campo circolare, pur conservando fede ai valori ottenuti per le coppie relative *alla stessa curva* e a metalli diversi.

Nella esposizione della parte sperimentale sarà appunto riferito un caso tipico a questo riguardo, e che dimostra come i numeri ottenuti per le coppie relative a due metalli diversi e a una curva non buona conservano un rapporto inalterato migliorando la curva, mentre nessuna relazione si ha con le misure fatte su questa per ciò che si riferisce alla legge indiscutibile della proporzionalità al quadrato del campo.

11. Rinunziando adunque, almeno per le frequenze più alte, alla misura dell'intensità del campo, le esperienze venivano condotte nella maniera seguente.

Le due bobine L_1 e L_2 , identiche e dell'induttanza di 0,54 millihenry circa, erano disposte su due sostegni con gli assi orizzontali e ortogonali.

Il diametro interno della gola della bobina era di cm. 7; cosicchè la distribuzione del campo era presso a poco uniforme anche alquanto fuori dell'asse.

Nel punto di incrocio degli assi, e a eguale distanza dalle due bobine si poteva disporre o il tubo di Braun diretto verticalmente, ovvero una sfera metallica di 2,05 cm. di diametro sospesa a un filo di ottone dello spessore di $\frac{2}{10}$ di millimetro.

Uno specchietto fissato al filo serviva per la misura delle deviazioni, contrastate dalla torsione del filo medesimo. Le sfere, tutte di eguale diametro, erano completamente piene, e portavano due cappelletti di ebanite, fissati con mastice, agli estremi di un diametro; all'uno era attaccato l'uncino per la sospensione, all'altro un filo metallico portante all'estremo inferiore una lastrina di vetro.

Questa pescava in una bacinella d'acqua e funzionava da smorzatore. Ogni sfera era munita del suo uncino e del suo smorzatore, cosicchè la sostituzione di una sfera a un'altra poteva farsi rapidamente.

Si cominciava a disporre delle costanti dei circuiti in modo che la curva osservata al tubo di Braun abbracciasse una certa area; accorciando progressivamente e lentamente i due archi la curva si andava facendo più regolare, accostandosi alla forma ellittica, mentre il suono montava in altezza finchè, all'istante in cui gli archi si incantavano, il suono raggiungeva un'altezza limite e la curva una forma ben determinata.

Se non si era moltissimo lontani dalla forma ellittica si faceva con l'aiuto di un prisma a riflessione totale e di un cannocchiale munito di micrometro oculare, la misura dell'asse minore; si sostituiva allora al tubo la prima pallina; si determinava la posizione di riposo, poscia si mettevano in azione gli archi, accorciandoli come prima progressivamente e lentamente; la deviazione della pallina seguiva quasi aperiodicamente le variazioni del suono e quando si raggiungeva l'altezza limite, poco prima che il suono cessasse, acquistava un certo valore che si trovava quasi lo stesso ripetendo più volte l'esperienza.

Quindi si passava alle altre sferette, e alla fine si ritornava alla prima per verificare se durante la serie si fosse prodotto qualche cambiamento.

La stessa operazione si ripeteva per le diverse frequenze.

12. *Prima Esperienza.* — Per frequenze molto basse non potevo servirmi del dispositivo descritto, occorrendo allora disporre in unico circuito tutte le capacità e le autoinduzioni possedute. Per l'impiego di grandi induttanze le correnti semplici di Duddel erano sinusoidali; ritenni quindi più semplice

far percorrere le due bobine in serie da queste correnti, derivando ai poli di una di esse una resistenza ohmica la quale bastava a produrre uno sfasamento tra i due campi; si avevano allora buonissime ellissi. La capacità impiegata era di circa 8 microfarad l'induttanza complessiva superiore a 10 millihenry; e si adoperavano due archi in serie, non bastando uno solo a intrattenere le oscillazioni. La frequenza così raggiunta fu di circa 500 periodi a secondo coi seguenti risultati:

Rame 28 div.; stagno 16 div.; bismuto 1 div.

Seconda Esperienza. Diminuendo alquanto la capacità e l'autoinduzione nello stesso dispositivo precedente, si passò a 900 periodi per secondo. I valori ottenuti per le coppie furono:

Rame 32; stagno 40; bismuto 3.

Terza Esperienza. Si cominciò a ricorrere al sistema doppio di circuiti inducente e indotto.

Il primo era costituito da due archi, da 0,97 microfarad e da due bobine dell'induttanza complessiva di circa 5 m. h., una delle quali era utilizzata per la produzione del campo. Il secondo conteneva un condensatore di 7,4 microfarad e la bobina producente il campo.

I due circuiti avevano inoltre, invece che due tratti in presenza, addirittura un'altra bobina in comune dell'induttanza di 0,26 m. h.; con ciò il principio del metodo resta, come è evidente, invariato. Il numero di giri del campo divenne di 2280 a secondo, e si ebbero i seguenti risultati:

Rame 27; stagno 50; bismuto 6,5.

Quarta Esperienza. Il sistema 1 conteneva 0,98 microfarad, e oltre alla bobina comune col sistema 2, un'induttanza complessiva di circa 2,79 millihenry. Il sistema 2 era costituito dalla solita bobina producente il campo e da 4 microfarad.

Il numero di giri del campo divenne di 2900 a secondo; la curva diveniva però poco buona; si ebbero questi risultati:

Rame 30; stagno 60; bismuto 12.

Quinta Esperienza. Il sistema 1 conteneva 0,95 microfarad e, oltre alla bobina comune, un' induttanza complessiva di un millihenry circa. Il sistema 2 conteneva la solita bobina e 1,65 microfarad. Il numero di giri montò a 4900 per secondo, la curva divenne sempre più lontana dalla forma ellittica e si ebbe per le coppie :

Rame 13; stagno 40; bismuto 20.

Sesta Esperienza. Il 1° sistema aveva la sola bobina del campo e 0,75 microfarad.

Il 2° la stessa bobina e 0,82 microfarad. La curva, piuttosto stretta, era molto difficile a ottenere; il numero di giri salì a 6100 a secondo e si ebbero questi risultati :

Rame 10; stagno 18; bismuto 15.

13. La tabella che segue riassume i risultati ottenuti, modificati proporzionalmente in modo da lasciar fermo, alle varie frequenze, il numero esprimente la coppia relativa al rame; sono quindi confrontabili solo i numeri disposti sulla stessa verticale :

	500	900	2280	2900	4900	6100
Rame	30	30	30	30	30	30
Stagno	17	37	56	60	80	54
Bismuto	1	3	7,2	12	40	45

Come si vede dalla tabella vengono confermati qualitativamente i risultati previsti. Mentre a 500 giri la coppia destata sul rame è prevalente, a 900 giri è maggiore quella subita dallo stagno; e a 4900 giri il bismuto, avente una resistenza circa 80 volte maggiore del rame, lo oltrepassa nel valore della coppia ¹⁾.

1) Si noti che anche a 6100 giri la coppia non solo non è proporzionale alla resistenza, ma non è nemmeno crescente con essa. Siamo quindi ancora ben lontani dalle *grandissime velocità* cui si riferisce la formola (5) data dall' Hertz. Questo conferma quanto ebbi a dire alla fine del § 4.

14. Nel caso delle prime tre colonne la curva essendo di forma quasi perfettamente ellittica, è lecito dedurre l'intensità del campo dalla misura dell'asse minore.

Si fece a tal uopo un confronto diretto per il rame, coi seguenti risultati :

	500	900	2280
asse minore	3	3,7	4
quadrato del campo	9	14,5	16
coppie corrispondenti per il rame	30	32	28
coppie riferite al valore 3 del campo	30	20	16

Se poniamo questi numeri al posto corrispondente nella tabella precedente, riducendo in proporzione quelli degli altri metalli, otteniamo :

	500	900	2280
Rame	30	20	16
Stagno	17	24	21,8
Bismuto	1	2	3,8

e in questa tabella sono confrontabili i numeri disposti tanto su una orizzontale che su una verticale. Essa ci mostra nettamente che già tra 500 e 900 giri la coppia comincia a decrescere per il rame, mentre essa prima cresce e poi diminuisce per lo stagno ed è sempre crescente per il bismuto.

15. Per le frequenze più alte la misura delle curve, di cattiva forma, perde ogni significato. Così a 2900 giri si ha una curva piuttosto larga e deforme, che si migliora alquanto accorciando gli archi, con che il suono monta un poco in altezza. Il diametro minore della curva si restringe in pari tempo da 3,5 a 2,5.

Nei due casi il rame subisce le coppie 30 e 22, che non stanno affatto nel rapporto dei quadrati dei due diametri. Eppure il confronto tra rame e stagno diede

con curva larga : rame 30, stagno 60
con curva stretta : rame 22, stagno 45 .

Questo caso mostra nettamente quanto abbiamo previsto al paragr. 10, che cioè la legge di variazione del campo rotante può produrre notevoli deformazioni della curva, pur la-

sciando inalterati i valori relativi delle coppie per metalli diversi, cosicchè per il confronto tra questi occorre solo che la curva conservi una forma invariata.

Anche i valori della colonna 5^a (4900 giri) potrebbero essere introdotti nella ultima tabella osservando che, per la legge dedotta dalla teoria di Hertz al parag. 5, la quale farebbe dipendere la coppia solo dal rapporto $\frac{\omega}{x}$, la coppia subita dallo stagno a 500 giri deve essere all'incirca eguale a quella del bismuto a 4900, posto che la resistenza del bismuto sia circa decupla di quella dello stagno.

Così facendo i numeri di quella colonna divengono: rame 12, stagno 34, bismuto 17; e si può rilevare che la coppia dello stagno a 4900 giri risulta abbastanza vicina a quella del rame a 500 come deve essere, dato il rapporto delle resistenze di questi metalli.

Questo viene a confermare la legge suddetta.

Concludendo si può ritenere che i fenomeni procedono nelle loro linee generali come vuole la teoria. Una verifica quantitativa non è possibile sia perchè il problema non è risoluto, quantitativamente, dalla teoria, sia perchè, impiegando le correnti di Duddel, le misure del campo non possono più farsi a frequenze molto elevate.

Sarebbe desiderabile che queste ricerche, le quali mi riuscirono oltremodo penose dato il mezzo di produzione delle correnti alternate, vengano estese e completate disponendo dei nuovi apparecchi per la produzione di correnti sinusoidali a elevate frequenze.

Palermo, Istituto fisico della R. Università.

Febbraio 1905.