Reduction zweier Covarianten binärer Formen.

Von

E. STROH in München.

I. Reduction der Covariante i'' einer binären Form achter Ordnung*).

Die Covariante 4ter Ordnung 3ten Grades $(fk)^4 = f_k$ werde durch l bezeichnet. Ferner die aus ihr entspringenden Formen $(ll)^2$ und $(ll)^4$ beziehungsweise durch m und L . Dann lässt sich m durch die Grundform i_A und zerfallende Formen linear ausdrücken.

Es gilt nämlich die Entwicklung

$$(1) \quad \left\{ \begin{matrix} f & k & f_k \\ 0 & 2 & 4 \end{matrix} \right\} m = ((ff_k)^2 k)^4 + ((ff_k)^3 k)^3 + \frac{2}{7} ((ff_k)^4 k)^2.$$

Nun ist aber

$$(2) \quad \begin{cases} (ff_k)^2 = \frac{10}{3} i_2 + \frac{2}{7} k^2 + \frac{Ai - Bf}{9}, \\ (ff_k)^3 = -2i_3, \\ (ff_k)^4 = i_k + \frac{12}{7} \Delta + \frac{1}{5} Ak, \end{cases}$$

und daraus ergibt sich durch Ueberschiebung über k und Benützung einiger einfacher Identitäten:

$$\begin{aligned} ((ff_k)^2 k)^4 &= \frac{10}{3} i_{2k} + \frac{36}{245} Ck + \frac{Ai_k - Bf_k}{9}, \\ ((ff_k)^2 k)^3 &= -2i_{33}, \\ ((ff_k)^4 k)^2 &= i_{k2} + \frac{2}{7} Ck + \frac{1}{5} A\Delta. \end{aligned}$$

Demnach wird

$$m = \left(\frac{10}{3} i_{2k} - 2i_{33} + \frac{2}{7} i_{k2} \right) + \frac{8}{35} Ck + \frac{2}{35} A\Delta + \frac{Ai_k - Bf_k}{9}.$$

Der erste in Klammern eingeschlossene Theil dieses Ausdrucks kann durch i_A allein ausgedrückt werden. Da nämlich

*) Vergl. v. Gall, Math. Ann. Bd. XVII.—Sylvester, *American J.* Vol. IV, *Comptes Rendus* 1881 pag. 192 u. 365. — Wegen der Bezeichnungen siehe Gordan, das Formensystem binärer Formen, Leipzig 1875, und übrigens v. Gall, l. c.

$$(3) \quad \begin{cases} i_{2k} = \frac{3}{14} i_{k2} + \frac{1}{2} i_A, \\ i_{33} = \frac{1}{2} i_{k2} - \frac{1}{2} i_A, \end{cases}$$

so wird dieser Theil gleich $\frac{8}{3} i_A$ und somit der gesuchte Werth von m .

$$(4) \quad m = \frac{8}{3} i_A + \frac{8}{35} Ck + \frac{2}{35} A\Delta + \frac{Ai_k - Bf_k}{9}.$$

Es ist daher einerlei, ob man i_A'' oder $m'' = (m\Delta)^2$ auf niedrigere Formen zurückführt, da beide mittelst dieser Gleichung durch einander linear ausgedrückt werden können. Die Reduction von m'' ergibt sich nun aber in folgender Weise. Das Product $l_3 \cdot l_3$ lässt sich nach Formen von dem Typus $((ll)^{2\alpha} (kk)^{2\beta})^\gamma$ entwickeln, wo $2\alpha + 2\beta + \gamma = 6$ sein muss. Man hat zunächst:

$$(5) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} l & k & l_3 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix} \right\} l_3 \cdot l_3 = (ll_3, k)^3 + ((ll_3)^1 k)^2 + \frac{3}{10} ((ll_3)^2 k)^1.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich:

$$(6) \quad \begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} l & k & l \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix} \right\} l_3 \cdot l &= (l^2, k)^3 + \frac{6}{7} ((ll)^2 k)^1, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} l & k & l \\ 0 & 1 & 3 \end{smallmatrix} \right\} (l_3 l)^1 + \frac{1}{2} l_k \cdot l &= \frac{3}{2} m_2 + \frac{1}{4} Lk, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} l & k & l \\ 0 & 0 & 4 \end{smallmatrix} \right\} l_k \cdot l &= (l^2, k)^4 = \frac{12}{7} m_2 + \frac{1}{5} Lk, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} l & k & l \\ 1 & 1 & 3 \end{smallmatrix} \right\} (l_2 l)^2 &= -m_3. \end{aligned}$$

Durch Substitution dieser Werthe in obige Gleichung folgt dann:

$$(7) \quad l_3 \cdot l_3 = (l^2)_{33} + \left(\frac{6}{7} m_{13} - \frac{3}{2} m_{22} - \frac{3}{10} m_{31} \right) + \frac{1}{2} l_k l_2 - \frac{1}{4} L\Delta.$$

Hierin kann der Term $(l^2)_{33}$ zunächst durch $(l^2)_{42}$ und $(l^2)_A$ mittelst der Beziehung

$$(8) \quad (l^2)_{33} = \frac{1}{2} (l^2)_{42} - \frac{1}{2} (l^2)_A$$

ersetzt werden, sodann aber mit Hilfe von Gleichung (6) überhaupt durch $(l^2)_A$ und zerfallende Formen. Dadurch wird dann:

$$l_3 \cdot l_3 = -\frac{1}{2} (l^2)_A + l_k l_2 - \frac{33}{14} m_{22} + \frac{6}{7} m_{13} - \frac{3}{10} m_{31} - \frac{7}{20} L\Delta.$$

Um nun aber den ersten Term $(l^2)_A$ zu beseitigen, entwickle ich das Product $l_A \cdot l$ in folgender Weise:

$$\left\{ \begin{matrix} l & \Delta & l \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix} \right\} l_A \cdot l = (l^2)_A + \frac{12}{7} m'' + \frac{1}{5} L \Delta.$$

Durch Substitution dieses Werthes für $(l^2)_A$ folgt dann

$$(9) \quad l_3 \cdot l_3 = \left(\frac{6}{7} m_{13} - \frac{33}{14} m_{22} - \frac{3}{10} m_{31} \right) - \frac{1}{2} l \cdot l_A + l_k \cdot l_2 + \frac{6}{7} m'' - \frac{1}{4} L \Delta.$$

Ganz ebenso wie in den Gleichungen (3) lassen sich nun auch hier die in der Klammer eingeschlossenen Terme durch andere ausdrücken. Dies geschieht mit Hilfe der Beziehungen:

$$(10) \quad \begin{cases} m_{13} = \frac{3}{5} m'' + \frac{1}{20} k m_k - \frac{3}{20} C \cdot m, \\ m_{22} = -\frac{1}{2} m'' + \frac{1}{6} k m_k + \frac{1}{12} C \cdot m, \\ m_{31} = -\frac{3}{2} m'' + \frac{1}{2} k m_k - \frac{1}{4} C \cdot m, \end{cases}$$

die für jede beliebige Form 4ter Ordnung m gültig sind, ebenso wie auch die Gleichungen (3). Dadurch wird der betreffende Ausdruck:

$$\frac{15}{7} m'' - \frac{1}{2} k \cdot m_k - \frac{1}{4} C \cdot m.$$

Durch Substitution desselben in Gleichung (9) ergibt sich dann die gesuchte Reductionsformel:

$$(11) \quad l_3^2 = 3 m'' - \frac{1}{2} l \cdot l_A + l_2 l_k - \frac{1}{2} k \cdot m_k - \frac{1}{4} C m - \frac{1}{4} L \Delta.$$

Dieselbe giebt die Form m'' und damit auch i''_A als lineare Function von zerfallenden Formen niederen Grades.

Es hat keine Schwierigkeit, den Ausdruck für i''_A selbst aufzufinden, jedoch erfordert dies etwas weitläufige Rechnung. Was zunächst den Werth von m'' angeht, so kann derselbe durch

$$(12) \quad m'' = \frac{8}{3} i''_A + \frac{2AE + 4C^2}{105} k - \frac{AC}{105} \Delta + \frac{1}{9} (A i''_k - B f''_k)$$

ersetzt werden. Es bedeuten hierin A, B, C, D, E die fundamentalen Invarianten 2ten, 3ten, 4ten, 5ten und 6ten Grades, letztere durch $(\Delta k)^4$ definit. Ferner können m_k und L durch die betreffenden Ausdrücke

$$(13) \quad \begin{cases} m_k = \frac{8}{3} i_{kA} + \frac{8}{35} C^2 + \frac{2}{35} AE + \frac{1}{9} A i_{kk} - \frac{1}{9} BD, \\ L = i_{kk} + \frac{12}{7} E + \frac{1}{5} AC \end{cases}$$

ersetzt werden. Durch Einführung dieser Werthe ergibt sich dann für $8i''_A$ folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned}
8i''_{\mathcal{A}} = & f_{k3} \cdot f_{k3} + \frac{1}{2} f_{k\mathcal{A}} \cdot f_k - Df_{k2} + \frac{2}{3} Ci_{\mathcal{A}} + \frac{AC}{36} i_k - \frac{BC}{36} f_k - \frac{A}{3} i''_k \\
& + \frac{B}{3} f''_k + k \left\{ \frac{4}{3} i_{k\mathcal{A}} + \frac{Ai_{kk} - BD}{18} + \frac{2C^2 - AE}{35} \right\} \\
& + \Delta \left\{ \frac{1}{4} i_{kk} + \frac{3}{7} E + \frac{13}{140} AC \right\}.
\end{aligned}$$

Hierin kann dann noch die Invariante i_{kk} durch die ihr äquivalente E vermittelt

$$i_{kk} = \frac{4}{63} E + \frac{1}{9} AC - \frac{1}{405} A^3 + \frac{2}{27} B^2$$

ersetzt werden,

II. Reduction der Covarianten (HH_1) und $(HH_1)^2$ im simultanen Systeme zweier binärer Formen vierter Ordnung*).

Seien die Formen f und φ , ihre Hesse'schen Covarianten H und H_1 und ihre ersten Invarianten i und i_1 . Die gewünschte Reductionsformel für $(HH_1)^2$ folgt dann direct aus Gleichung (11) der vorigen Seite, wenn l durch f und k durch φ ersetzt wird. Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
(1) \quad 3(HH_1)^2 = & (f\varphi)^3 \cdot (f\varphi)^3 + \frac{1}{2} f(fH_1)^4 + \frac{1}{2} \varphi(\varphi H)^4 + \frac{1}{4} Hi_1 \\
& + \frac{1}{4} H_1 i - (f\varphi)^2 \cdot (f\varphi)^4.
\end{aligned}$$

Eine ähnliche Gleichung für (HH_1) kann auf demselben Wege erhalten werden. Setzen wir $(f\varphi)^2 = \Theta$, $(f\varphi)^4 = J$, dann ist:

$$\begin{aligned}
(2) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} f & \varphi & \Theta \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right\} (f\varphi)^3 \cdot \Theta = & (f\Theta, \varphi)^3 + \frac{3}{2} ((f\Theta)^1 \varphi)^2 + \frac{6}{7} ((f\Theta)^2 \varphi)^1 \\
& + \frac{1}{5} (f\Theta)^3 \cdot \varphi.
\end{aligned}$$

Die Formen $(f\Theta)^2$ lassen sich nun in folgender Weise entwickeln:

*) Man vergl. wegen dieser Formen, deren Reducibilität von Sylvester behauptet wurde, zunächst Gordan, Math. Annalen Bd. II, p. 275, Bertini, Math. Annalen Bd. XI, p. 36, Faà di Bruno, binäre Formen, übersetzt von Walter, pag. 369 und 372, sodann insbesondere d'Ovidio, Atti della R. Acc. di Torino, Vol. XV, pag. 302—304. An letzterer Stelle ist die Reduction dieser Formen mittelst symbolischer Rechnung gegeben, doch fehlt in dem Ausdruck für $(H, H_1)^2$ ein Coefficient 4. Der Werth von (H, H_1) stimmt mit dem im Texte gegebenen überein und ist letzterer nur der Vollständigkeit halber hier entwickelt worden.

$$\left\{ \begin{matrix} f & \varphi & f \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} \right\} \Theta \cdot f = (f^2 \varphi)^2 + \frac{2}{7} H \cdot \varphi,$$

$$\left\{ \begin{matrix} f & \varphi & f \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \right\} (\Theta f) + \frac{1}{2} (f \varphi)^3 \cdot f = (H \varphi),$$

$$\left\{ \begin{matrix} f & \varphi & f \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \right\} (f \varphi)^3 \cdot f = (f^2 \varphi)^3 + \frac{6}{7} (H \varphi),$$

$$(\Theta f) = -\frac{1}{2} (f^2 \varphi)^3 + \frac{4}{7} (H \varphi).$$

Aus

$$\left\{ \begin{matrix} f & \varphi & f \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} f & \varphi & f \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} f & \varphi & f \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix} \right\}$$

folgen ferner die Gleichungen:

$$(\Theta f)^2 + ((f \varphi)^3 f) + \frac{1}{3} J \cdot f = (H \varphi)^2 + \frac{1}{3} i \varphi,$$

$$((f \varphi)^3 f) + \frac{1}{2} J \cdot f = \frac{3}{2} (H \varphi)^2 + \frac{1}{4} i \varphi,$$

$$Jf = (f^2 \varphi)^4 + \frac{12}{7} (H \varphi)^2 + \frac{1}{5} i \varphi,$$

und daher:

$$(3) \quad (\Theta f)^2 = \frac{1}{6} Jf - \frac{1}{2} (H \varphi)^2 + \frac{1}{12} i \varphi,$$

$$(f^2 \varphi)^2 = Jf - \frac{12}{7} (H \varphi)^2 + \frac{1}{5} i \varphi.$$

Endlich folgen aus

$$\left\{ \begin{matrix} f & \varphi & f \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} f & \varphi & f \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix} \right\}$$

die Gleichungen:

$$(\Theta f)^3 + \frac{1}{2} ((f \varphi)^3 f)^2 = - (H \varphi)^3,$$

$$((f \varphi)^3 f)^2 = - (H \varphi)^3,$$

und demnach:

$$(\Theta f)^3 = -\frac{1}{2} (H \varphi)^3.$$

Damit sind alle Formen $(\Theta f)^4$ durch solche von dem Typus $((ff)^{2k} \varphi)^e$ ausgedrückt. Indem man in Gleichung (2) substituirt und abkürzend statt $((\Phi \varphi)^2 \varphi)^\mu = \Phi_{2\mu}$ schreibt, ergibt sich:

$$(f \varphi)^3 \cdot \Theta = (f^2)_{23} + \frac{3}{4} (f^2)_{32} + \left(\frac{2}{7} H_{03} - \frac{6}{7} H_{12} - \frac{3}{7} H_{21} \right)$$

$$+ \frac{1}{7} J(f \varphi) + \frac{1}{10} \varphi (H \varphi)^3.$$

Die beiden ersten Terme können nun mittelst

$$(f^2)_{23} = -\frac{1}{4} (f^2 H_1)^3 + \frac{5}{14} (f^2)_{41},$$

$$(f^2)_{32} = - (f^2 H_1)^3 + \frac{2}{3} (f^2)_{41}$$

durch andere ersetzt werden. Diese können dann mit Hülfe von Gleichung (3) und

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f & H_1 & f \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right\} (f H_1)^3 \cdot f = (f^2 H_1)^3 + \frac{6}{7} (H H_1)$$

weiter reducirt werden, so dass sich sodann folgender Ausdruck für $(f\varphi)^3 \cdot \Theta$ ergibt:

$$(f\varphi)^3 \cdot \Theta = \left(\frac{2}{7} H_{03} - \frac{6}{7} H_{12} - \frac{93}{49} H_{21} \right) + \frac{6}{7} (H H_1) + J(f\varphi) - f(f H_1)^3 \\ + \frac{1}{10} \varphi(H\varphi)^3.$$

Um den ersten in Klammern eingeschlossenen Theil amzuformen, benütze man die Identitäten:

$$H_{03} = \frac{6}{7} (H H_1) + \frac{1}{14} \varphi(H\varphi)^3,$$

$$H_{12} = \frac{1}{5} \varphi(H\varphi)^3,$$

$$H_{21} = - (H H_1) + \frac{1}{2} \varphi(H\varphi)^3.$$

Dann resultirt die gesuchte Formel:

$$3(H H_1) = (f\varphi)^3 (f\varphi)^2 - (f\varphi)^4 (f\varphi)^1 + f(f H_1)^3 - \varphi(\varphi H)^3.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wechselt ihr Vorzeichen, wenn man f mit φ vertauscht, was sehr gut als Controle für richtige Rechnung benützt werden kann.

Anmerkung. Die hier ausgeführten Reductionen sind specielle Fälle einer allgemeinen Reductionsmethode, welche ich demnächst veröffentlichen werde. Mit Hülfe derselben kann jede derartige Reduction auf vorgeschriebenem Wege bewerkstelligt werden, insbesondere wird das Problem erledigt werden: *Alle linearen Relationen zwischen Co-varianten derselben Ordnung und desselben Grades aufzufinden.*

Berlin, Februar 1883.