

Zur Theorie der Determinanten.

(Von Herrn J. J. Weyrauch.)

Es sei die Determinante n^{ten} Grades

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

gegeben. Wir legen uns die Fragen vor:

- 1) Wieviel Glieder der Determinante D enthalten m *bestimmte* Elemente (weder mehr noch weniger) $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ der Diagonale?
- 2) Wieviel Glieder der Determinante D enthalten m *beliebige* Elemente der Diagonale?
- 3) Wieviel Glieder enthalten m oder weniger Diagonalelemente?
- 4) Wieviel Glieder enthalten k oder mehr Diagonalelemente?
- 5) In welcher Weise setzt sich die Gesamtgliederzahl aus den Gliedern mit 0 bis n Elementen der Diagonale zusammen?

Der Coefficient von a_{11} ist eine Determinante $n-1^{\text{ten}}$ Grades, es giebt also $(n-1)!$ Glieder, welche a_{11} enthalten; a_{22} kommt ebenfalls in $(n-1)!$ Gliedern vor, darunter befinden sich aber $(n-2)!$, worin auch a_{11} Factor ist. Die Determinante D hat also $2(n-1)! - (n-2)!$ Glieder, welche a_{11} oder a_{22} oder beide zugleich enthalten.

Um nun die Anzahl $F^{(1+)}$ der Glieder zu finden, in welchen überhaupt Elemente der Diagonale vorkommen, füge man zu $(n-1)!$ der Reihe nach die Anzahlen der Glieder, in welchen $a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots$ aber keines der vorhergehenden Elemente als Factor enthalten ist. Dann hat man folgende Aggregate zu summiren:

Die Gleichung (3.) führt noch auf die Relation:

$$(4.) \quad f_{n+1}^{(m)} = (n+1-m)f_n^{(m)} + (-1)^{n+1-m},$$

wobei allgemein unter $f_r^{(m)}$ die Function $f^{(m)}$ für die Determinante r^{ten} Grades zu verstehen ist.

Aus n Elementen lassen sich $\binom{n}{m}$ Combinationen m^{ter} Klasse herstellen. Daher beträgt die Anzahl der Glieder, welche irgend m Elemente der Diagonale enthalten

$$(5.) \quad F^{(m)} = (n-m)! \binom{n}{m} \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \right],$$

gültig von $m=0$ bis $m=n-2$, wofür $F^{(n-2)} = \binom{n}{2}$.

Die Anzahl der Glieder, welche m oder weniger Diagonalelemente enthalten, wird demnach

$$(6.) \quad F^{(m-)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} (n-\mu)! \binom{n}{\mu} \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-\mu}}{(n-\mu)!} \right]$$

und die Anzahl derjenigen, welche k oder mehr enthalten:

$$(7.) \quad F^{(k+)} = n! - \sum_{\mu=0}^{\mu=k-1} (n-\mu)! \binom{n}{\mu} \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-\mu}}{(n-\mu)!} \right].$$

Ist $m=k-1$, dann wird selbstverständlich:

$$(8.) \quad n! = F^{(k-1-)} + F^{(k+)}.$$

Aus der Gleichung (5.) folgt ferner:

$$(9.) \quad n! = 1 + \sum_{m=0}^{m=n-2} F^{(m)}.$$

Bezeichnet man die Anzahl der Glieder, bei welchen in einer Determinante r^{ten} Grades kein Diagonalelement vorkommt, durch $\varphi(r)$, so ergeben sich aus den bis jetzt erhaltenen Gleichungen folgende einfachste Formeln:

$$\text{I.} \quad f^{(m)} = \varphi(n-m),$$

$$\text{II.} \quad F^{(m)} = \binom{n}{m} \varphi(n-m),$$

$$\text{III.} \quad F^{(m-)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \binom{n}{\mu} \varphi(n-\mu),$$

$$\text{IV.} \quad F^{(k+)} = 1 + \sum_{\mu=k}^{\mu=n-2} \binom{n}{\mu} \varphi(n-\mu),$$

$$\text{V.} \quad n! = 1 + \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \binom{n}{\mu} \varphi(n-\mu),$$

als Beantwortung der fünf gestellten Fragen.

Aus Gleichung I ersieht man den Satz:

In den Gliedern der Determinante n^{ter} Ordnung kommen ebenso oft m bestimmte Elemente der Diagonale vor, wie $m-p$ bestimmte Elemente in Gliedern der Determinante $n-p^{\text{ter}}$ Ordnung.

Nach den bekannten Eigenschaften der Determinanten versteht es sich von selbst, dass die gefundenen Lösungen der Fragen in Betreff des Systems der n Diagonalelemente der Determinante D genau ebenso gelten, wenn man die Diagonalelemente durch irgend ein System n transversaler Elemente ersetzt, d. h. n solcher Elemente, unter welchen sich weder zwei aus derselben Horizontalreihe, noch zwei aus derselben Verticalreihe befinden.

Berlin, November 1871.